

С. В. ЯКОВЛЕВ^{1,2}, О. В. КАРТАШОВ¹, О. А. МУМРІЄНКО¹

¹ Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут», Харків, Україна

² Лодзинський політехнічний університет, Польща

ФОРМАЛІЗАЦІЯ ТА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ МАКСИМАЛЬНОГО ПОКРИТТЯ ОБЛАСТІ З ВИКОРИСТАННЯМ БІБЛІОТЕКИ SHAPELY ДЛЯ МОНІТОРИНГУ ТЕРИТОРІЙ

Для забезпечення життєдіяльності суспільства виникає необхідність створення систем моніторингу процесів чи об'єктів за допомогою мережі датчиків, здатних контролювати певну частину простору (території). Під моніторингом розуміється систематичне спостереження за параметрами об'єкта з метою отримання інформації щодо їх відповідності початковим припущенням. При цьому будується фізична модель, що пов'язує характеристики об'єкта та інформацію про спостереження, яка дозволяє здійснити ідентифікацію властивостей об'єкта. Таким чином, фізична модель пов'язана з вимірюванням здатності та якості сприйняття датчиків контролю, фіксуючи геометричне співвідношення між ними та точками простору. Зазначеній фізичній моделі відповідає геометрична постановка задачі покриття області моніторингу сукупністю геометричних об'єктів, форма та розміри яких визначаються зонами дії датчиків. При обмеженій кількості датчиків виникає задача про максимальне можливе покриття області. У цій статті ми абстрагуємося від типу об'єкту моніторингу та розглянемо геометричні особливості задач покриття, що виникають при проектуванні систем моніторингу простору різноманітного призначення. Метою статті є розроблення конструктивних засобів математичного моделювання для розв'язування геометричних задач максимального покриття. Для формалізації умов покриття застосована концепція побудови конфігураційного простору геометричних об'єктів та спеціальний клас функцій, що дозволяють встановлювати залежність міри (площі, об'єму) конфігурації покриття від параметрів розміщення покриваючих об'єктів. Оскільки отримати аналітичний вигляд зазначених функцій вкрай складно запропоновано алгоритмічний підхід для їх обчислення. Підхід реалізовано на алгоритмічній мові Python з використанням бібліотеки Shapely. Сплановано та проведено обчислювальний експеримент для встановлення залежності часу обчислення від кількості геометричних об'єктів, що складають конфігурацію покриття. Для розв'язання задач максимального покриття. Для пошуку максимального покриття використовується метод локальної оптимізації BFGS пакету Scipy.optimize. Наведено чисельні приклади реалізації запропонованого підходу. **Висновки.** В статті обґрунтовано використання програмно-алгоритмічного підходу для формалізації, обчислення та оптимізації конфігурацій максимального покриття, який дозволяє ефективно розв'язувати складні задачі моніторингу простору та територій.

Ключові слова: моніторинг простору; сенсорна мережа; покриття; геометричний об'єкт; математична модель; оптимізація.

Вступ

У процесі забезпечення життєдіяльності суспільства виникає необхідність створення систем моніторингу простору. Під моніторингом як правило розуміється систематичне спостереження за параметрами деякого процесу або об'єкта з метою фіксувати відповідність (або невідповідність) цих параметрів початковим припущенням. При цьому будується фізична модель, що пов'язує характеристики об'єкта і спостережливу інформацію, яка дозволяє здійснити ідентифікацію властивостей об'єкта. Як правило, така інформація базується на обробці сигналів, отриманих з використанням спеціальних датчиків контролю. Датчик реагує на фізичні подразники

(наприклад тепло, світло, звук, тиск тощо) і перетворює параметри фізичного подразника в записувані сигнали (наприклад, електричні сигнали, механічні сигнали тощо). Ці сигнали потім оцифровуються для отримання даних о зонах дії датчиків. Таким чином, фізична модель пов'язана з вимірюванням здатності та якості сприйняття датчиків контролю, фіксуючи геометричне співвідношення між точкою простору та датчиками.

Вузол датчика зазвичай включає в себе один або кілька блоків датчиків, блок живлення, блок обробки даних, сховище даних і блок передачі даних. Сенсорна мережа складається з сенсорних вузлів, які розгорнуті в різних географічних точках в межах одного сенсорного поля для колективного

моніторингу фізичних явищ. Така мережа також включає один або кілька приймачів, що збирають дані від вузлів датчиків.

Сенсорні мережі можуть застосовуватися в різних областях. Огляд практичних постановок та сучасних підходів до оптимізації бездротових сенсорних мереж можна знайти в оглядових статтях [1-3]. Зазначимо, що моделі таких задач безпосередньо пов'язані із задачами покриття області (простору, територій, тощо). Мова йдеться про спостереження над космічним простором [4-6], моніторинг навколишнього середовища, лісових пожеж [7, 8], планування аварійно-рятувальних робіт [9], в робототехніці [10] та промисловій діагностиці [11, 12] тощо.

Природно в сенсорних мережах виникає питання ефективності її функціонування. Вирішення даної задачі нерозривно пов'язане з моделлю датчика, яка включає такі показники як чутливість, динамічний діапазон, передаточну функцію, точність і т. д. При цьому одним з найбільш важливих показників ефективності функціонування мережі є ступінь контролю датчиками області моніторингу, що, у свою чергу, пов'язано з якістю покриття областей дії датчиків. Таким чином, моделі покриття датчиків - це абстрактні моделі, що визначають наскільки добре датчики можуть ідентифікувати фізичні явища в тому чи іншому місці, або, іншими словами, наскільки добре зони дії датчиків можуть покривати область моніторингу.

У сенсорних мережах проблеми покриття можуть виникати на всіх етапах створення мережі і можуть бути сформульовані по-різному з довільними сценаріями, припущеннями та цілями. На етапі проектування виникає задача визначення мінімальної кількості датчиків, які в сукупності забезпечують покриття кожної точки контрольованої області. На етапі розгортання мережі необхідно визначити оптимальне розташування датчиків при виконанні умови покриття. На етапі експлуатації необхідно враховувати проведення планових робіт з метою продовження часу роботи мережі при збереженні її покриття.

Будемо формувати мережу датчиків, їх кількість і розташування таким чином, щоб:

- контроль за кожною такою точкою області моніторингу повинен бути здійснений при мінімальному числі контролюючих датчиків;

- при обмеженій кількості датчиків, мережа повинна забезпечувати якомога більшу область контролю;

- вплив зовнішніх шумів, перешкод і дублювання фіксацій сигналів різними датчиками має бути мінімальним або повністю виключеним.

У цій статті ми абстрагуємося від фізичного типу об'єкта і розглянемо геометричні особливості

задач моніторингу, пов'язані з обробкою геометричної інформації як про область контролю, так і про області дії контролюючих датчиків.

1. Матеріали і методи

1.1. Огляд літературних джерел

Розглянемо наступний клас геометричних задач покриття. Нехай в арифметичному Евклідовому просторі R^d задана множина геометричних об'єктів $\Omega_0 = \{S_0, S_1, \dots, S_n\}$. Позначимо $\Omega = \{S_1, \dots, S_n\}$. Класична постановка задачі геометричного покриття полягає в тому, щоб знайти таке розташування об'єктів з Ω , при якому кожна точка S_0 буде належати хоча б одному з них. Геометричний об'єкт S_0 назвемо областю покриття, а сім'ю $\Omega = \{S_1, \dots, S_n\}$ - об'єктами, що покривають. Як правило, ставиться задача вибору такої множини $\Omega' \subseteq \Omega$, що забезпечують покриття S_0 об'єктами сім'ї Ω' , що покривають, а потужність $|\Omega'|$ цієї сім'ї буде мінімальна. Як узагальнення розглядається задача про мінімізацію сумарної площі (об'єму) об'єктів $\Omega = \{S_1, \dots, S_n\}$, що покривають. Очевидно, що для даного класу задач передбачається, що покриття S_0 об'єктами із Ω існує.

Зазначимо, що на теперішній час вкрай недостатньо досліджень геометричних задач покриття областей довільної форми. З одного боку, існують «класичні» постановки задач покриття, що були поставлені ще у минулому сторіччі (*L.F. Tóth, J. Molnár, C.A. Rogers*). Указані задачі пов'язані з покриттям необмеженого простору ідентичними об'єктами простої просторової форми (круги, трикутники, кулі, правильні багатогранники) або дослідженням щільності покриття простору трансляціями одного об'єкту. Саме таким задачам присвячена основна увага математиків (*див. наприклад* [13]). Практичне же застосування теорії покриття вимагає розгляду довільної форми як області так і об'єктів, що покривають. Однак на теперішній час задачі розглядаються виключно як інженерні, з урахуванням лише вимог нормативних документів без спроб оптимізувати кількісний та якісний склад систем, що розглядалися.

Оптимізаційні задачі геометричного покриття в загальній постановці на теперішній час взагалі не формалізовані через відсутність відповідних засобів моделювання взаємовідношень над сукупністю об'єктів. Для опису геометричних об'єктів складної фо-

рми академіком В. Л. Рвачьовим була запропонована теорія R-функцій [14], що дозволила розв'язувати обернену задачу аналітичної геометрії – побудови рівняння границі матеріального об'єкту за його виглядом. Ю. Г. Стояном такі дослідження були продовжені на випадок бінарних взаємовідношень, що призвело до створення теорії Ф-функцій [15, 16]. і дозволило формалізувати умови неперетину двох об'єктів. Однак узагальнити зазначені результати для формалізації умов покриття сукупністю об'єктів не вдалось. Саме тому фахівці виділяють лише спеціальні класи задач покриття, здебільшого обмежуючись однаковими об'єктами, що покривають, простої форми: колами [18, 19], сферами [20] або прямокутниками [21]. При цьому переважна більшість наукових праць, що мають відношення до задач кругового покриття, присвячена дослідженню евристичних методів розв'язання, за виключенням хіба що використання решіток Вороного [22-24]. В даному випадку задачі покриття ототожнюються з класом задач розбиття [25, 26].

Ця робота присвячена дослідженню класу задач геометричного покриття, коли повне покриття або не існує або розв'язання задачі істотно ускладняється в силу її NP-складності. У цьому випадку очевидно виникає необхідність покриття якомога більшої площі (об'єму) області покриття.

2. Результати

2.1. Конфігураційний простір геометричних об'єктів

Для формалізації вказаного класу задач максимального геометричного покриття скористаємося концепцією побудови конфігураційних просторів геометричних об'єктів, запропонованої в [27, 28]. У загальному випадку конфігураційний простір визначається сукупністю узагальнених змінних, що задають розташування в просторі деякої системи та її частин як щодо один одного, так і щодо заданої системи відліку.

Під конфігурацією відповідно до [29] розумітимемо відображення η деякої вихідної множини Ω елементів довільної природи в абстрактну множину Σ певної структури при виконанні заданого набору обмежень, тобто $\eta: \Omega \rightarrow \Sigma$.

Нехай Ω є скінченна множина геометричних об'єктів. Під геометричним об'єктом S у просторі R^d будемо розуміти геометричне місце точок $P \in R^n$, що задовольняють нерівності $f(P) \geq 0$. При цьому рівняння $f(P) = 0$ задає межу об'єкта S , яку позначимо $fr S$.

У загальному випадку рівняння межі об'єкта містить константи $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_\alpha)$, які характеризують його тополого-метричні властивості (розміри), тобто $f(P, \mathbf{m}) = 0$, $P \in R^d$. Компоненти вектора $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_\alpha)$ назвемо метричними параметрами просторової форми об'єкта. Об'єкт S , що має метричні параметри форми \mathbf{m} , будемо позначати $S(\mathbf{m})$.

Надалі обмежимося розглядом геометричних об'єктів у просторі R^2 , поклавши $P = (x, y) \in R^2$. Нехай функція $f(P, \mathbf{m})$ визначена і неперервна за $P \in R^2$ для будь яких $\mathbf{m} \in D$, де D - множина допустимих значень метричних параметрів форми \mathbf{m} . Під геометричним об'єктом $S(\mathbf{m}) \subset R^2$ будемо розуміти таке геометричне місце точок $P \in R^2$, що для будь-якого фіксованого $\mathbf{m} \in D$ виконуються умови

$$f(P, \mathbf{m}) = 0, \text{ якщо } P \in fr S(\mathbf{m});$$

$$f(P, \mathbf{m}) > 0, \text{ якщо } P \in int S(\mathbf{m});$$

$$f(P, \mathbf{m}) < 0, \text{ якщо } P \in R^2 \setminus cl S(\mathbf{m}),$$

де $int S$ і $cl S$ відповідно операції топологічної внутрішності та замикання геометричного об'єкта S .

Задамо в просторі R^2 систему координат Oxy , яку назвемо нерухомою, а з об'єктом S пов'яжемо власну (рухому) систему координат, початок якої назвемо полюсом об'єкта. Для характеристики взаємного розташування вказаних систем координат введемо так звані параметри розміщення $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_\beta) = (\mathbf{v}, \theta)$, де \mathbf{v} – вектор координат полюса об'єкта S в нерухомій системі координат, а θ – вектор кутових параметрів, що визначають взаємне розташування осей власної і нерухомої систем координат. У випадку $S \subset R^2$ маємо $\beta = 3$ і скалярний кутовий параметр $\theta = \theta$, тобто

$$\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_\beta) = (\mathbf{v}, \theta) = (v_1, v_2, \theta).$$

Положення об'єкта S щодо нерухомої системи координат задається рівнянням загального положення, яке має вигляд

$$F(P, \mathbf{m}, \mathbf{v}, \theta) = f(A(P - \mathbf{v}), \mathbf{m}) = 0, \quad (1)$$

де A – ортогональний оператор, виражений через кутові параметри θ .

Для $S \subset \mathbb{R}^2$ маємо

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Нехай рівняння загального стану об'єкта S має вигляд (1). Для загального опису об'єкта S в роботах [27, 28] введено поняття конфігураційного простору $\Xi(S)$, узагальненими змінними якого є метричні параметри форми $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_\alpha)$ та параметри розміщення $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_\beta) = (\mathbf{v}, \boldsymbol{\theta})$. Будь-якій точці $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_\gamma) = (\mathbf{m}, \mathbf{p})$, $\gamma = \alpha + \beta$ конфігураційного простору $\Xi(S)$ відповідає параметризований геометричний об'єкт $S(\mathbf{g}) \subset \mathbb{R}^2$, такий що

$$F(P, \mathbf{m}, \mathbf{p}) = 0, \text{ якщо } P \in \text{fr } S(\mathbf{g});$$

$$F(P, \mathbf{m}, \mathbf{p}) > 0, \text{ якщо } P \in \text{int } S(\mathbf{g});$$

$$F(P, \mathbf{m}, \mathbf{p}) < 0, \text{ якщо } P \in \mathbb{R}^2 \setminus \text{cl } S(\mathbf{g}).$$

2.2. Математична модель задачі максимального покриття

Позначимо

$$N_n = \{1, 2, \dots, n\}, N_n^0 = \{0\} \cup N_n = \{0, 1, \dots, n\}.$$

Нехай $\Omega = \{S_i, i \in N_n^0\}$ - вихідна множина геометричних об'єктів. За аналогією з проведеними вище міркуваннями введемо їх метричні параметри форми $\mathbf{m}^i = (m_1^i, \dots, m_{\alpha_i}^i)$ та параметри розміщення $\mathbf{p}^i = (p_1^i, \dots, p_\beta^i) = (\mathbf{v}^i, \boldsymbol{\theta}^i)$, $i \in N_n^0$, $\beta \leq 3$. Сформуємо конфігураційні простори $\Xi(S_i)$ об'єктів S_i із узагальненими змінними $\mathbf{g}^i = (\mathbf{m}^i, \mathbf{p}^i)$, $i \in N_n^0$.

Побудуємо конфігураційний простір

$$\Xi(\Omega) = \Xi(S_0) \times \Xi(S_1) \times \dots \times \Xi(S_n),$$

узагальнені змінні якого $\mathbf{g} = (\mathbf{g}^0, \mathbf{g}^1, \dots, \mathbf{g}^n)$.

Визначення 1 [27]. Відображення $\xi: \Omega \rightarrow \Xi(\Omega)$ множини геометричних об'єктів Ω у конфігураційний простір $\Xi(\Omega)$, що задовольняє заданому набору обмежень Λ , задає просторову конфігурацію об'єктів S_0, S_1, \dots, S_n .

При фіксованих значеннях узагальнених змінних $\mathbf{g} = (\mathbf{g}^0, \mathbf{g}^1, \dots, \mathbf{g}^n)$ конфігураційного простору $\Xi(\Omega)$ відповідні геометричні об'єкти можуть бути у різних відносинах між собою, що дозволяє виділяти різні класи просторових конфігурацій.

Задамо відображення $\phi: \Omega \rightarrow S_\phi$, що ставить множини Ω у відповідність так званій складній об'єкт $S_\phi = \phi(S_0, S_1, \dots, S_n)$. Говоритимемо, що відображення ϕ задає структуру складного об'єкта S_ϕ .

У конфігураційному просторі $\Xi(\Omega)$ складному об'єкту $S_\phi = \phi(S_0, S_1, \dots, S_n)$ відповідає параметризований об'єкт

$$S_\phi(\mathbf{g}) = S_\phi(\mathbf{g}^0, \mathbf{g}^1, \dots, \mathbf{g}^n) = \phi(S_0(\mathbf{g}^0), S_1(\mathbf{g}^1), \dots, S_n(\mathbf{g}^n))$$

Нехай множини $S_i(\mathbf{g}^i) \subset \mathbb{R}^2$, $i \in N_n^0$ будуть виміряні за Лебегом при будь-якому $\mathbf{g}^i \in \Xi(S_i)$.

Визначимо функцію

$$\omega_\phi(\mathbf{g}) = \omega_\phi(\mathbf{g}^0, \mathbf{g}^1, \dots, \mathbf{g}^n) = \mu(S_\phi(\mathbf{g}^0, \mathbf{g}^1, \dots, \mathbf{g}^n)),$$

де $\mu(\cdot)$ - міра Лебега відповідної множини.

Визначення 2 [30]. Функцію $\omega_\phi: \Xi(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^1$ назвемо ω -функцією параметризованого геометричного об'єкта $S_\phi(\mathbf{g})$.

Для формалізації ω -функції введемо характеристичну функцію

$$\lambda_\phi(P, \mathbf{g}) = \begin{cases} 1, & \text{if } P \in S_\phi(\mathbf{g}); \\ 0, & \text{if } P \notin S_\phi(\mathbf{g}). \end{cases}$$

Тоді, якщо $P \in \mathbb{R}^2$, то

$$\omega_\phi(\mathbf{g}) = \iint \lambda_\phi(P, \mathbf{g}) dP.$$

Визначення 3 [28]. Відображення $\xi: \Omega \rightarrow \Xi(\Omega)$ визначає конфігурацію покриття, якщо

$$S_0(\mathbf{g}^0) \subseteq \bigcup_{i \in N_n} S_i(\mathbf{g}^i).$$

Використовуємо наведені вище міркування для формалізації завдань максимального покриття. Поєднаємо систему координат області покриття S_0 з нерухомою системою координат, задавши цим положення S_0 в просторі R^2 . Тоді $\mathbf{p}^0 = (p_1^0, \dots, p_\beta^0) = \mathbf{0} = (0, \dots, 0)$. Зафіксуємо метричні параметри області покриття, поклавши $\mathbf{m}^0 = \hat{\mathbf{m}}^0$ і нехай $\hat{\mathbf{g}}^0 = (\hat{\mathbf{m}}^0, \mathbf{0})$. Тоді

Зафіксуємо метричні параметри форми геометричних об'єктів $\Omega = \{S_0, S_1, \dots, S_n\}$, поклавши

$$\mathbf{m}^i = \hat{\mathbf{m}}^i, \hat{\mathbf{g}}^0 = (\hat{\mathbf{m}}^0, \mathbf{0}), \mathbf{g}^i = (\hat{\mathbf{m}}^i, \mathbf{p}^i), i \in N_n.$$

Таким чином узагальненими змінними конфігураційного простору $\Xi(\Omega) = \Xi(S_0) \times \Xi(S_1) \times \dots \times \Xi(S_n)$ будуть лише параметри розміщення об'єктів, що покривають $\mathbf{p}^i, i \in N_n$.

При фіксованих метричних параметрах геометричних об'єктів їх міра Лебега (площа) не залежить від параметрів розміщення. Позначимо $\mu_i = \mu(S_i(\hat{\mathbf{m}}^i))$. Очевидно, що в цьому випадку відображення $\xi: \Omega \rightarrow \Xi(\Omega)$ задаватиме конфігурацію покриття, якщо

$$\mu\left(S_0(\hat{\mathbf{m}}^0, \mathbf{0}) \cap \bigcup_{i=1}^n S_i(\hat{\mathbf{m}}^i, \mathbf{p}^i)\right) = \mu_0$$

З використанням визначення ω -функції маємо

$$\begin{aligned} \omega_\phi(\mathbf{g}) &= \omega_\phi(\hat{\mathbf{m}}^0, \mathbf{0}, \hat{\mathbf{m}}^1, \mathbf{p}^1, \dots, \hat{\mathbf{m}}^n, \mathbf{p}^n) = \\ &= \mu\left(S_\phi(\hat{\mathbf{m}}^0, \mathbf{0}, \hat{\mathbf{m}}^1, \mathbf{p}^1, \dots, \hat{\mathbf{m}}^n, \mathbf{p}^n)\right) = \mu_0, \quad (2) \end{aligned}$$

де $S_\phi = \phi(S_0, S_1, \dots, S_n) = S_0 \cap \bigcup_{i=1}^n S_i$,

$$S_\phi(\mathbf{g}) = S_0(\hat{\mathbf{m}}^0, \mathbf{0}) \cap \bigcup_{i=1}^n S_i(\hat{\mathbf{m}}^i, \mathbf{p}^i).$$

З іншого боку, умова (2) еквівалентна наступній:

$$\omega_\phi(\hat{\mathbf{m}}^0, \mathbf{0}, \hat{\mathbf{m}}^1, \mathbf{p}^1, \dots, \hat{\mathbf{m}}^n, \mathbf{p}^n) \rightarrow \max, \quad (3)$$

де оптимізація здійснюється за змінними параметрами розміщення $\mathbf{p}^i, i \in N_n$.

Таким чином функція (3) задає критерій оптимізації по незалежним змінним $\mathbf{p}^i, i \in N_n$.

Особливістю задачі (3) у тому, що відоме значення її глобального максимуму, що дорівнює μ_0 . У той же час, якщо зазначене значення недосяжно при будь-яких допустимих параметрах розміщення $\mathbf{p}^i, i \in N_n$, то природно виникає задача пошуку максимально можливого покриття області S_0 системою об'єктів, що покривають $\Omega = \{S_1, \dots, S_n\}$.

Визначення 4 [28]. Відображення $\xi: \Omega \rightarrow \Xi(\Omega)$ визначає конфігурацію максимального покриття, якщо при фіксованих метричних параметрах форми $\mathbf{m}^i = \hat{\mathbf{m}}^i$ геометричних об'єктів $S_i, i \in N_n^0$ маємо

$$\begin{aligned} \omega_\phi(\hat{\mathbf{m}}^0, \mathbf{0}, \hat{\mathbf{m}}^1, \mathbf{p}^1, \dots, \hat{\mathbf{m}}^n, \mathbf{p}^n) = \\ = \mu\left(S_0(\hat{\mathbf{m}}^0, \mathbf{0}) \cap \bigcup_{i=1}^n S_i(\hat{\mathbf{m}}^i, \mathbf{p}^i)\right) \rightarrow \max \end{aligned}$$

на множині всіх допустимих параметрів розміщення $\mathbf{p}^i, i \in N_n$, які відповідають заданому набору обмежень Λ .

2.3. Обчислення ω -функції засобами мови Python

Обчислення ω -функції для довільних просторових конфігурацій покриття пропонується здійснювати засобами алгоритмічної мови Python. Це обумовлено тим, що наразі мова Python є однією з найбільш розповсюджених та затребуваних серед користувачів програмних продуктів. Під неї розроблені та розробляються велика кількість модулів і бібліотек для рішення різноманітних практичних задач.

Розглядаючи питання роботи з геометричними об'єктами заданої форми, можна знайти потужний перелік бібліотек, що дозволяють працювати з такими об'єктами (фігурами), зокрема, *SymPy*, *Shapely*, *CGAL*, *SpaceFuncs* та багато інших. На основі аналізу наявних бібліотек з урахуванням необхідного функціоналу для обчислення ω -функції просторових конфігурацій (складних геометричних об'єктів) нами було обрано бібліотеку *Shapely* [31]. *Shapely* – це пакет *Python* для теоретичного аналізу точкових множин і маніпулювання площинними об'єктами з використанням через модуль *ctypes Python* функцій із добре відомої та широко розгорнутої бібліотеки *GEOS*. Зазначимо, що *GEOS* як порт пакету *Java Topology Suite (JTS)* є механізмом геометрії просто-

рового розширення *PostGIS* для СУБД *PostgreSQL*. Проекти *JTS* і *GEOS* в основному керуються специфікацією доступу до простих функцій і *Open Geospatial Consortium*, а *Shapely* дотримується в основному єдиних стандартних класів і операцій. Таким чином, пакет *Shapely*, з одного боку, є глибоко вкоріненим у конвенціях світу географічних інформаційних систем (ГІС), а з іншого боку прагне бути однаково корисним для програмістів, які працюють над нетрадиційними проблемами, зокрема, обробки зображень і геометричного проєктування.

Зробимо декілька зауважень. Перша передумова *Shapely* полягає в тому, що програмісти *Python* повинні мати можливість виконувати операції геометрії типу *PostGIS* за межами СУБД. Не будь яка геометрична інформація походить або знаходиться в СУБД чи найкраще обробляється за допомогою *SQL*. Можливо завантажувати дані в просторову *RDBMS*, щоб виконувати роботу. Друга передумова полягає в тому, що збереження, серіалізація та проєкція на відповідну площину геометричних об'єктів є значними, але умовними проблемами. У багатьох випадках немає потреби використовувати програми для читання та записування формату ГІС чи безлічі проєкцій *State Plane*, і *Shapely* не обтяжується ними. Третя передумова полягає в тому, що ідіоми *Python* у даному випадку перевершують ідіоми *GIS* або *Java*, оскільки бібліотека *GEOS* походить від *JTS* проекту *Java*.

Саме за допомогою бібліотеки *Shapely* є можливість будувати складні фігури шляхом теоретико-множинних операцій над геометричними об'єктами (об'єднання, перетину, симетричної різниці, добутку) з множини базових фігур (круг, еліпс, багатокутник тощо), а також здійснювати такі ж операції над довільними складними фігурами, що будуються за допомогою базових. При цьому принциповим є можливість розраховувати площу будь-якої складної фігури. Зазначимо, що геометричні об'єкти створюються типовим способом *Python*, використовуючи самі класи як фабрики екземплярів.

Типи даних *Point*, *LineString* і *LinearRing* мають як найважливіший атрибут кінцеву послідовність координат, яка визначає їхні внутрішні, граничні та зовнішні набори точок. Лінія може бути визначена лише за 2 точками, але містить нескінченну кількість точок. Послідовність координат незмінна. Третє значення просторової координати може використовуватися під час побудови екземплярів, але не впливає на геометричний аналіз. Всі операції виконуються в площині *Oxy*.

У всіх конструкторах числові значення перетворюються на тип *float*. *Shapely* не перевіряє топологічну простоту або валідність складних об'єктів, коли вони створені, оскільки вартість обробки геомет-

ричної інформації (просторової форми, метричних параметрів, параметрів розміщення) у більшості випадків не виправдана. Перевірка фабрик легко реалізується за допомогою предиката `:attr:is_valid` користувачами, яким вони потрібні. В бібліотеці *Shapely* в пакеті *geometry* знаходиться клас багатокутника, що має назву *Polygon*. Багатокутник задається в якості масиву кортежів, що містять координати вершин

Окремого типу даних для еліпсу в бібліотеці *Shapely* немає – для побудови еліпсів існує пакет *affinity*. Набір функцій афінного перетворення міститься в модулі *shapely.affinity*, який повертає перетворені геометричні фігури шляхом безпосереднього надання коефіцієнтів до матриці афінного перетворення, або за допомогою спеціального іменованого перетворення (поворот, масштаб тощо). Для побудови еліпса потрібен стандартний набір параметрів розміщення – координати центру (точка), радіус по вертикалі, радіус по горизонталі, кут повороту. При цьому використовується функція *affinity.scale* з параметрами:

- *geom* – геометрична фігура з пакету *shapely.geometry*;

- *xfact* – значення для масштабування по осі *x*;

- *yfact* – значення для масштабування по осі *y*;

Точка центру (полос еліпса) масштабується по всім абсцисі і ординаті на значення, що дорівнюють радіусам еліпсу. Щоб повернути еліпс, треба додатково скористатися функцією *affinity.rotate* з параметрами:

- *geom* – геометрична фігура з пакету *shapely.geometry*;

- *angle* – кут повороту, що за замовчуванням задається в градусах;

- *use_radians* – має дорівнювати *True*, якщо кут задано в радіанах.

Результатом такого масштабування буде еліпс, побудований за точками – він має також тип даних *Polygon*. В цьому причина простоти операцій між еліпсами і багатокутниками – фактично це операції між двома багатокутниками.

Для проведення логічних операцій у класу *Polygon* є наступні методи (друга фігура задається як єдиний аргумент методу):

- *difference* – повертає виключення другої фігури з першою;

- *intersection* – повертає перетин двох фігур;

- *union* – повертає об'єднання двох фігур;

- *symmetric_difference* – повертає симетричну різницю двох фігур.

Для вирахування площі у складної фігури існує поле *area*.

Підсумовуючи сказане надаймо фрагмент коду на *Python* для алгоритмічного обчислення ω -функції, що використовується для опису умови покриття області S_0 сукупність об'єктів S_1, \dots, S_n , що її покривають:

```

from shapely.geometry import (
    Point,
    Polygon,
)
from shapely import affinity
# функція обов'язкова
Для опису об'єктів різної просторової форми маємо:
# Опис кола
circle_center = Point(x, y)
# x, y - координати полюса
circle = circle_center.buffer(r)
# r - радіус кола
# Опис еліпса
ellipse_center = Point(x, y)
# x, y - координати полюса
Ellipse = affinity.scale(ellipse_center, xfact=a,
yfact=b)
# a, b - напіввісі / радіуси
# Опис багатокутника
polygon_x = [x 1, x 2, ..., x n]
polygon_y = [y 1, y 2, ..., y n]
# кількість елементів масивів x та y дорівнює кількості вершин багатокутника
Polygon = Polygon(list(zip(polygon_x,
polygon_y)))
# функція list(zip()) об'єднує масиви координат x та y
# Повертання об'єкту
affinity.rotate(ellipse, a)
# повертання в градусах, a - кількість
affinity.rotate(polygon, a, use_radians=True)
# повертання в радіанах, a - кількість
# Операція об'єднання об'єктів (на прикладі еліпсів)
ellipses = [ellipse 1, ellipse 2, ..., ellipse n]
# масив еліпсів
figure = ellipse[0]
# перший еліпс обирається як результуючий складний об'єкт  $S_\phi = S_1$ 
for ellipse in ellipses[1:]:
# здійснюється додавання еліпсів, починаючи з другого
figure = figure.union(ellipse)

```

на кожному шагі об'єднуємо вже сформований складний об'єкт з наступним; в результаті маємо

$$S_\phi = \bigcup_{i=1}^n S_i$$

Операція перетину області S_0 зі сформованою конфігурацією S_ϕ об'єднання об'єктів

result = polygon.intersection(union)

$$S_\phi = S_0 \cap S_\phi = S_0 \cap \bigcup_{i=1}^n S_i \quad (4)$$

Площа складного об'єкту

result.area

Таким чином, за допомогою програмних засобів мови *Python* та бібліотеки *shapely* є можливість алгоритмічно розраховувати значення ω -функції, що дозволяє в подальшому реалізувати розв'язання задач покриття саме цими засобами.

3. Обчислювальні експерименти

3.1. Отримання часових залежностей для обчислення площі конфігурації покриття

Для обґрунтування вибору ефективного методу оптимізації необхідно оцінити залежність часу обчислення цільової функції від кількості покриваючих об'єктів. У зв'язку з цим реалізуємо наступний експеримент.

Нехай область покриття S_0 та покриваючі об'єкти S_1, \dots, S_n мають форму еліпса. Зазначимо, що запропонований підхід використовується для будь яких форм області покриття та покриваючих об'єктів. Обмеження стосуються лише вибору відповідних бібліотек обчислювальної геометрії. Вибір форми еліпсу у експерименті обґрунтовується тим, що в цьому випадку маємо ще більші обчислювальні витрати за часом, ніж для багатокутників. Тому і висновки розповсюджуються на більш широкі класи задач покриття.

Структура, що задає конфігурацію покриття, має вигляд

$$S_\phi = \phi(S_0, S_1, \dots, S_n) = S_0 \cap \bigcup_{i=1}^n S_i .$$

Тоді узагальненими змінними конфігураційного простору $\Xi(\Omega) = \Xi(S_0) \times \Xi(S_1) \times \dots \times \Xi(S_n)$ будуть

$$\mathbf{g} = (\mathbf{g}^0, \mathbf{g}^1, \dots, \mathbf{g}^n) = (a_0, b_0, x_0, y_0, \theta_0, a_1, b_1, x_1, y_1, \theta_1, \dots, a_n, b_n, x_n, y_n, \theta_n),$$

де $\mathbf{m}^i = (a_i, b_i)$ - напіввісі еліпсів S_i , а $\mathbf{p}^i = (x_i, y_i, \theta_i)$ - параметри розміщення, $i \in N_n^0$.

Покладемо $x_0 = y_0 = \theta_0 = 0$. Напіввісі еліпсів $(a_i, b_i), i \in N_n$ будемо генерувати рівномірно розподіленими на інтервалі $(0,50)$. У подальшому розрахуємо сумарну площу побудованих еліпсів

$$h = \pi \sum_{i=1}^n a_i b_i,$$

та обчислимо метричні параметри області покриття – еліпсу з напіввісями $a_0 = \sqrt{2h/\pi}$, $b_0 = \frac{a_0}{2}$, $x_0 = y_0 = \theta_0 = 0$.

Параметри розміщення еліпсів $\mathbf{p}^i = (x_i, y_i, \theta_i)$, $i \in N_n$ будемо генерувати рівномірно розподіленими на інтервалах $(-\frac{a_0}{2}, \frac{a_0}{2})$, $(-\frac{b_0}{2}, \frac{b_0}{2})$, $(0, 180)$ відповідно.

Будемо покладати $n = 50k$, $k \in N_n$. При кожному k проводимо по 30 обчислень площі конфігурації покриття та розраховуємо середній час таких обчислень (табл. 1). Побудуємо графік залежності часу розрахунку площі конфігурації покриття від кількості покриваючих еліпсів (рис. 1). Випробування проводилися на ПК у наступній конфігурації:

Процесор Intel Core i7-5557U, 2 ядра, 4 потоки з тактовою частотою 3.1 ГГц; ОЗП 16 Гб DDR3 1866 МГц; графічний адаптер Intel Iris Graphics 6100 з 1.5 Гб відеопам'яті SSD ємністю 512 Гб. Операційна система Mac OS X 11.0 Big Sur.

Як можна побачити з графіку, залежність часу T обчислення площі конфігурації покриття від кількості k еліпсів близька до лінійної і може бути описана регресійною прямою $T = 0.00055 * k$.

Такий результат надихає на перспективне використання запропонованого підходу до розв'язання задач максимального покриття з використанням сучасних методів локальної та глобальної оптимізації. Проілюструємо це на наступному прикладі.

3.2. Застосування методів локальної оптимізації в задачах максимального покриття

Для чисельної реалізації запропонованого підходу було обрано задачу максимального покриття прямокутної області заданих розмірів сукупністю еліпсів. Вихідні дані напіввісей еліпсів були взяті з статті [32], в якій розглядалися методи оптимального розміщення еліпсів в областях, що мають форму

Таблиця 1

Час підрахунку площі конфігурації покриття еліпсів

Номер випробування k	Кількість об'єктів n	Час виконання, T (с)
1	50	0.02
2	100	0.04
3	150	0.07
4	200	0.09
5	250	0.12
6	300	0.18
7	350	0.19
8	400	0.22
9	450	0.24
10	500	0.24
11	550	0.25
12	600	0.28
13	650	0.30
14	700	0.34
15	750	0.38
16	800	0.42
17	850	0.47
18	900	0.55
19	950	0.59
20	1000	0.64

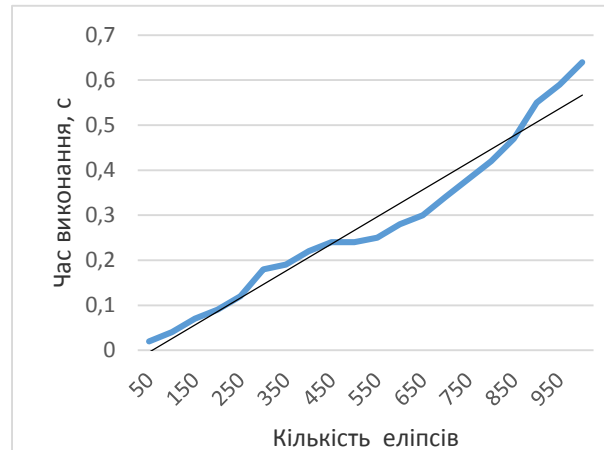


Рис. 1. Графік залежності часу обчислення площі конфігурації покриття від кількості фігур

багатокутника, кола, еліпса. Маємо $n = 36$ еліпсів з такими метричними характеристиками

$$\hat{\mathbf{m}}^i = (a_i, b_i):$$

$$a_i = 2.22, b_i = 1.80, i = 1, \dots, 9;$$

$$a_i = 2.60, b_i = 1.70, i = 10, \dots, 18;$$

$$a_i = 3.50, b_i = 0.70, i = 19, \dots, 27;$$

$$a_i = 3.60, b_i = 2.70, i = 28, \dots, 36.$$

При цьому послідовно розглядалися області покриття у формі прямокутників зі сторонами (a_0, b_0) відповідно (30, 24), (26, 22), (24, 20).

Як було зазначено у розділі 2.2 задача максимального покриття має вигляд (3) та зводиться до максимізації функції

$$\omega_\phi(\hat{\mathbf{m}}^0, \mathbf{0}, \hat{\mathbf{m}}^1, \mathbf{p}^1, \dots, \hat{\mathbf{m}}^n, \mathbf{p}^n).$$

При заданих параметрах розміщення $\mathbf{p}^i = (x_i, y_i, \theta_i), i \in N_n^0$ значення ω -функції конфігурації покриття (4) обчислювалось алгоритмічно за допомогою пакету *Shapely*.

Вихідні дані параметрів розміщення еліпсів $\hat{\mathbf{p}}^i = (\hat{x}_i, \hat{y}_i, \hat{\theta}_i), i \in N_n$ обирались випадково, рівномірно розподіленими на інтервалах $(0, a_0), (0, b_0), (0, 180)$. Локальна оптимізація здійснювалась за методом BFGS з використанням пакету *Scipy.optimize* алгоритмічної мови *Python*.

Було отримано результати, що ілюструються на рис. 2 – 4.

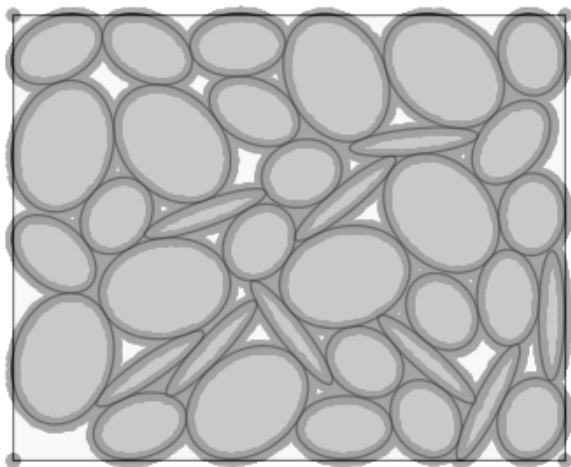


Рис. 2. Конфігурація максимального покриття, що співпадає з конфігурацією розміщення

Зазначимо, що у першому випадку (рис. 2) ми отримали таку конфігурацію покриття, що задовольняє умовам попарного неперетину еліпсів. Тобто конфігурація максимального покриття співпадає з конфігурацією розміщення згідно з класифікацією просторових конфігурацій, що наведена в [28].

У другому випадку (рис. 3) маємо конфігурацію максимального покриття, що не є конфігурацією покриття, оскільки у кінцевому результаті

$$\omega_\phi(\hat{\mathbf{m}}^0, \mathbf{0}, \hat{\mathbf{m}}^1, \mathbf{p}^1, \dots, \hat{\mathbf{m}}^n, \mathbf{p}^n) \neq a_0 b_0,$$

тобто можна вказати такі точки області покриття S_0 , що не належать жодному з еліпсів S_i , які покривають.

В останньому варіанті (рис. 4) отримано конфігурацію покриття всієї області S_0 , оскільки

$$\omega_\phi(\hat{\mathbf{m}}^0, \mathbf{0}, \hat{\mathbf{m}}^1, \mathbf{p}^1, \dots, \hat{\mathbf{m}}^n, \mathbf{p}^n) = a_0 b_0.$$

Наведені чисельні результати підтверджують обґрунтованість та ефективність програмно-алгоритмічного підходу до формалізації та розв'язування задач максимального покриття областей довільної просторової форми.

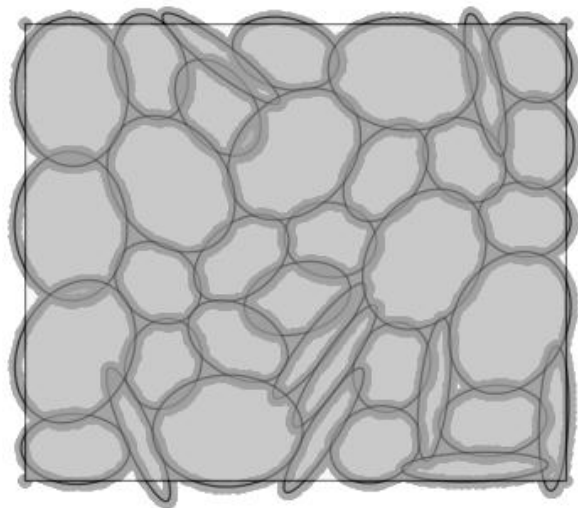


Рис. 3. Конфігурація максимального покриття

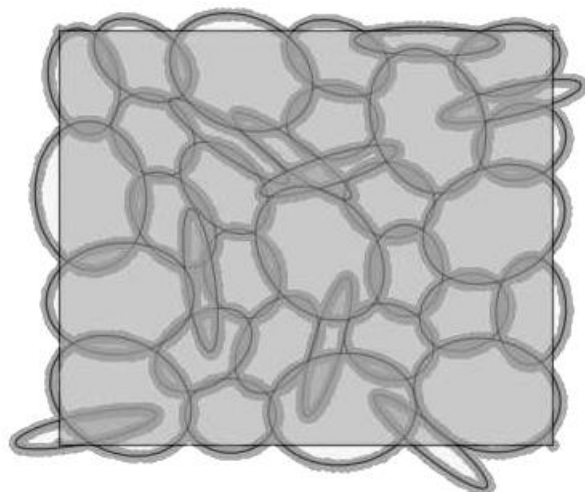


Рис. 4. Конфігурація максимального покриття, що співпадає з конфігурацією повного покриття

Висновки

Розглянуті практичні задачі моніторингу, що за своєю постановкою можуть бути сформульовані як геометричні задачі покриття області. В статті запропоновані конструктивні засоби математичного моделювання для розв'язування геометричних задач максимального покриття. Для формалізації умов покриття застосована концепція побудови конфігураційного простору геометричних об'єктів та спеціальний клас ω -функцій, що дозволяють встановлювати залежність міри конфігурації покриття від узагальнених параметрів покриваючих об'єктів. Для обчислення ω -функцій пропонується використовувати пакет *Shapely* алгоритмічної мови *Python*. Сплановано та проведено обчислювальний експеримент для встановлення залежності часу обчислення ω -функції від кількості геометричних об'єктів, що складають конфігурацію покриття. Для розв'язання задач максимального покриття використовуються методи локальної оптимізації пакету *Scipy.optimize* алгоритмічної мови *Python*. Наведено чисельні приклади реалізації запропонованого підходу.

Напрямки подальших досліджень

Вважаємо перспективними подальші дослідження та впровадження запропонованого підходу до розв'язання задач покриття зі змінними метричними характеристиками об'єктів. Дійсно, підвищуючи потужність датчиків, з одного боку, можна зменшити їх кількість, а з іншого, - збільшити площу території, що контролюється. Для задач максимального покриття планується зробити порівняльний аналіз методів глобальної оптимізації із відповідними рекомендаціями до їх використання.

Має інтерес дослідження особливостей практичних застосувань підходу при оптимізації сенсорних мереж, враховуючи складний характер зон впевненого прийому датчиків. Дотепер, як правило, такі зони розглядались у формі кола, а датчики обирались однотипними, тобто розглядалась задача покриття ідентичними об'єктами. Наш підхід дозволяє працювати як з довільними формами, так і з різними датчиками.

Важливим є і той факт, що у реальних системах моніторингу територій, задача покриття розглядається як допоміжна, а основна увага приділяється оптимізації техніко-економічних показників мережі. Тому перспективним вважаємо розробку підходу, що інтегрує зазначені напрямки досліджень.

Внесок авторів: теоретичні дослідження щодо формалізації задач максимального покриття, побудова відповідних математичних моделей – **С. В. Яков-**

лев; алгоритмічні підходи до обчислення ω -функції для конфігурацій покриття – **О. В. Карташов;** локальні методи оптимізації, чисельні експерименти для тестових задач максимального покриття – **О. А. Мумрієнко;** аналіз особливостей використання пакетів обчислювальної геометрії для класу задач, що розглядаються, запропонував використання пакету *Shapely* алгоритмічної мови *Python* та досліджував залежність часу обчислення площі конфігурації покриття від кількості об'єктів, що покривають – **О. А. Мумрієнко.** Усі автори прочитали та погодилися з опублікованою версією рукопису.

Подяка

Дослідження, результати якого наведені у цій статті, підтримані Міністерством освіти та науки України в рамках проекту «Технології, засоби математичного моделювання, оптимізації та системного аналізу задач покриття в системах моніторингу простору».

Література

1. A survey of multi-objective optimization in wireless sensor networks: metrics, algorithms and open problems [Text] / Z. Fei, B. Li, S. Yang et al. // *IEEE Communications Surveys & Tutorials*. – 2017. – Vol. 19, iss. 1. – P. 550-586. DOI: 10.1109/comst.2016.2610578.
2. Wei, R. Coverage Location Models: Alternatives, Approximation, and Uncertainty [Text] / R. Wei // *International Regional Science Review*. – 2017. – Vol. 39, iss. 1. – P. 48-76. DOI: 10.1177/0160017615571588.
3. Zafari, F. A survey of indoor localization systems and technologies) [Text] / F. Zafari, A. Gkelias and K. K. Leung // *IEEE Commun. Surveys Tuts*. – 2019. – Vol. 21, no. 3. – P. 2568-2599. DOI: 10.1109/COMST.2019.2911558.
4. Wu, C. Q. On Efficient Deployment of Wireless Sensors for Coverage and Connectivity in Constrained 3D Space [Text] / C. Q. Wu, L. Wang // *Sensors*. – 2017. – Vol. 17, iss. 2304 – P. 1-26. DOI: 10.3390/s17102304.
5. Statistical synthesis of aerospace radars structure with optimal spatio-temporal signal processing, extended observation area and high spatial resolution [Text] / S. Zhyla, V. Volosyuk, V. Pavlikov et al. // *Radioelectronic and Computer Systems*. – 2022. – № 1(101). – P. 178-194. DOI: 10.32620/reks.2022.1.14.
6. Yaloveha, V. Convolutional neural network hyperparameter optimization applied to land cover classification [Text] / V. Yaloveha, A. Podorozhniak, H. Kuchuk // *Radioelectronic and Computer Systems* –

2022. – No. 1(101). – P. 115-128. DOI: 10.32620/reks.2022.1.09.

7. Murray, A. T. *Optimising the spatial location of urban fire stations* [Text] / A. T. Murray // *Fire Safety Journal*. – 2013. – Vol. 62. – P. 64–71. DOI: 10.1016/j.firesaf.2013.03.002.

8. *Optimization of fire stations services in Minna metropolis using maximum covering location model (MCLM)* [Text] / E. A. Adesina, J. O. Odumosu, O. O. Morenikeji, E. Umoru, A. O. Ayokanmbi, E. B. Ogunbode // *J Appl Sci Environ Sustain*. – 2017. – Vol. 3, Iss. 7. – P. 172–187.

9. *A new direct coefficient-based heuristic algorithm for set covering problems* [Text] / A. H. Gholami, U. Venkatadri, A. Wojciechowski, D. Streimikiene // *International Journal of Fuzzy Systems*. – 2022. – Vol. 24, Iss. 2. – P. 1131–1147. DOI: 10.1007/s40815-021-01208-5.

10. *Placing sensors for area coverage in a complex environment by a team of robots* [Text] / Xu Li, G. Fletcher, A. Nayak, and I. Stojmenovic // *ACM Transactions on Sensor Networks*. – 2014. – Vol. 11, iss. 1. – P. 1–22. DOI: 10.1145/2632149.

11. *Kliushnikov, I. M. Scheduling UAV fleets for the persistent operation of UAV-enabled wireless networks during NPP monitoring* [Text] / I. M. Kliushnikov, H. V. Fesenko, V. S. Kharchenko // *Radioelectronic and Computer Systems*. – 2020. – № 1(93). – P. 29-36. DOI: 10.32620/reks.2020.1.03.

12. *Song, P. A new sensing direction rotation approach to area coverage optimization in directional sensor network* [Text] / P. Song and X. Yonghua // *J. Adv. Comput. Intell. Intell. Inform.* – 2020. – Vol. 24, iss. 2. – P. 206-213. DOI: 10.20965/jaciii.2020.p0206.

13. *Dorninger, D. On a conjecture of L. Fejes Tóth and J. Molnár about circle coverings of the plane.* [Text] / D. Dorninger // *Period Math Hung.* – 2019. – Vol. 78. – P. 242-253. DOI: 10.1007/s10998-018-0254-z.

14. *Рвачев В. Л. Теория R-функции и некоторые ее приложения* [Text] : монография / В. Л. Рвачев. – Киев : Наук. думка, 1982. – 552 с.

15. *Φ -functions for complex 2D-objects.* [Text] / Y. Stoyan, G. Scheithauer, N. Gil, T. Romanova // *4OR*. – 2004. – Vol. 2, iss. 1. – P. 69-84. DOI: 10.1007/s10288-003-0027-1.

16. *Tools of mathematical modeling of arbitrary object packing problems.* [Text] / J. Bennell, G. Scheithauer, Y. Stoyan, T. Romanova // *Annals of Operations Research*. – 2010. – Vol. 179, Iss. 1. – P. 343–368. DOI: 10.1007/s10479-008-0456-5.

17. *Gaspar, Z. Partial covering of a circle by equal circles. Part 1: The mechanical models.* [Text] / Z. Gaspar, T. Tarnai, K. Hincz // *Journal of Computational Geometry*. – 2014. – vol. 5, iss. 1. – P. 104-125. DOI: 10.20382/jocg.v5i1a6/

18. *Stoyan, Y. G. Covering a compact polygonal set by identical circles* [Text] / Y. G. Stoyan, V. M. Patsuk // *Comp. Opt. and Appl.* – 2010. – Vol. 46, iss.1. – P. 75-92. DOI: 10.1007/s10589-008-9191-8.

19. *Антошкін, О. А. Узагальнена математична модель задачі покриття області ідентичними колами та її основні реалізації* [Text] / О. А. Антошкін, О. В. Панкратов // *Системи обробки інформації*. – 2019. – № 1(156). – С. 44-49. DOI: 10.30748/soi.2019.156.06.

20. *An optimized covering spheroids by spheres* [Text] / A. Pankratov, T. Romanova, I. Litvinchev, J. A. Marmolejo-Saucedo // *Applied Sciences (Switzerland)*. – 2020. – Vol. 10, iss. 5. – Article No. 1846. DOI: /10.3390/app10051846.

21. *Covering a polygonal region by rectangles.* [Text] / Y. G. Stoyan, T. Romanova, G. Scheithauer, A. Krivulya // *Computational Optimization and Applications*. – 2011. – Vol. 48, iss.3. – P. 675-695. DOI: 10.1007/s10589-009-9258-1.

22. *Voronoi Based Area Coverage Optimization for Directional Sensor Networks* [Text] / J. Li, R. Wang, H. Huang and L. Sun // *Proc. of the 2009 2nd Int. Symp. on Electronic Commerce and Security*. – 2009. – P. 488-493. DOI: 10.4236/wsn.2009.15050.

23. *An algorithm to construct generalized Voronoi diagrams with fuzzy parameters based on the theory of optimal partitioning and neuro-fuzzy technologies* [Text] E. M. Kiseleva, L. Hart, O. Prytomanova, O. Kuzenkov // *CEUR Workshop Proceedings*. – 2019. – Vol. 2386. – P. 148-162.

24. *Sung, T.-W Localised sensor direction adjustments with geometric structures of Voronoi diagram and Delaunay triangulation for directional sensor networks* [Text] / T.-W. Sung and C.-S. Yang // *Int. J. of Ad Hoc and Ubiquitous Computing* – 2015. – Vol.20, No.2. – P. 91-106.

25. *Kiseleva, E. M. The emergence and formation of the theory of optimal set partitioning for sets of the n-dimensional Euclidean space. Theory and application* [Text] / E. M. Kiseleva // *Journal of Automation and Information Science. Journal of Automation and Information Sciences*. – 2018. – Vol. 50, No. 7. – P. 1-24. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v50.i9.10.

26. *Kiseleva, E. M. Solving a continuous single-product problem of optimal partitioning with additional conditions* [Text] / E. M. Kiseleva, Y. E. Kadochnikova // *Journal of Automation and Information Science*. – 2009. – Vol. 41, No. 7. – P. 48-63. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v41.i7.30.

27. *Stoyan, Y. G. Configuration Space of Geometric Objects* [Text] / Y. G. Stoyan, S. V. Yakovlev // *Cybernetics and Systems Analysis*. – 2018. – Vol. 54, No. 5. – P. 716–726. DOI: 10.1007/s10559-018-0073-5.

28. *Yakovlev, S. V. On some classes of spatial configurations of geometric objects and their formalization* [Text] / S. V. Yakovlev // *Journal of Automation and Information Sciences*. – 2018. – Vol. 50, Iss. 9. – P. 38-50. DOI:10.1615/JAutomatInfScien.v50.i9.30

29. *Berge, C. Principes de combinatoire* [Text] / C. Berge. – Paris : Dunod, 1968. – 146 p.

30. *Yakovlev, S. V. Formalizing Spatial Configuration Optimization Problems with the Use of a*

Special Function Class [Text] / S. V. Yakovlev // Cybernetics and Systems Analysis. – 2019. – Vol. 55, Iss. 4. – P. 581-589. DOI: 10.1007/s10559-019-00167-y.

31. Gillies, Sean *The Shapely User Manual [Электронный ресурс] / Sean Gillies. – Режим доступа: <https://shapely.readthedocs.io/en/stable/manual.html>. – 12.03.2022.*

32. Pankratov, A. V. *Development of effective algorithms for optimal packing of ellipses [Text] / A. V. Pankratov, T. Ye. Romanova, I. A. Subbota // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. – 2014. – Vol. 5, no. 4 (71). – P. 28–35. DOI: 10.15587/1729-4061.2014.28015.*

References

1. Fei, Z., Li, B., Yang S., et. al. A survey of multi-objective optimization in wireless sensor networks: metrics, algorithms and open problems, *IEEE Communications Surveys & Tutorials*, 2017, vol. 19, iss. 1, pp. 550-586. DOI: 10.1109/comst.2016.2610578

2. Wei, R. Coverage location models: alternatives, approximation, and uncertainty. *International Regional Science Review*, 2017, vol. 39, iss. 1, pp. 48-76. DOI: 10.1177/0160017615571588.

3. Zafari, F., Gkelias, A., and Leung, K. A survey of indoor localization systems and technologies. *IEEE Commun. Surveys Tuts*, 2019, vol. 21, no. 3, pp. 2568–2599. DOI: 10.1109/COMST.2019.2911558.

4. Wu, C. Q., Wang, L. On efficient deployment of wireless sensors for coverage and connectivity in constrained 3D space. *Sensors*, 2017, vol. 17, iss. 2304, pp. 1-26. DOI: 10.3390/s17102304.

5. Zhyla, S., Volosyuk, V., Pavlikov V., et.al. Statistical synthesis of aerospace radars structure with optimal spatio-temporal signal processing, extended observation area and high spatial resolution. *Radioelectronic and Computer Systems*, 2022, no. 1(101), pp. 178-194. DOI: 10.32620/reks.2022.1.14.

6. Yaloveha, V., Podorozhniak, A., Kuchuk, H. Convolutional neural network hyperparameter optimization applied to land cover classification. *Radioelectronic and Computer Systems*, 2022, no. 1(101), pp. 115-128. DOI: 10.32620/reks.2022.1.09.

7. Murray, A. T. Optimising the spatial location of urban fire stations. *Fire Safety Journal*, 2013, vol. 62, pp. 64–71. DOI: 10.1016/j.firesaf.2013.03.002.

8. Adesina, E. A., Odumosu, J. O., Morenikeji, O. O., Umoru, E., Ayokanmbi, A. O., Ogunbode, E. B. Optimization of fire stations services in Minna metropolis using maximum covering location model (MCLM). *J Appl Sci Environ Sustain*, 2017, vol. 3, iss. 7, pp. 172–187.

9. Hashemi, A., Gholami, H., Venkatadri, U., Wojciechowski, A., Streimikiene, D. A new direct coefficient-based heuristic algorithm for set covering problems. *International Journal of Fuzzy Systems*, 2022, vol. 24, iss. 2, pp. 1131–1147. DOI: 10.1007/s40815-021-01208-5.

10. Li, Xu, Fletcher, G., Nayak, A., and Stojmenovic, I. Placing sensors for area coverage in a complex environment by a team of robots. *ACM Transactions on Sensor Networks*, 2014, vol. 11, iss. 1, pp. 1–22. DOI: 10.1145/2632149.

11. Kliushnikov, I. M., Fesenko, H. V., Kharchenko, V. S. Scheduling UAV fleets for the persistent operation of UAV-enabled wireless networks during NPP monitoring. *Radioelectronic and Computer Systems*, 2020, no. 1(93), pp. 29-36. DOI: 10.32620/reks.2020.1.03.

12. Song, P. and Yonghua, X. A new sensing direction rotation approach to area coverage optimization in directional sensor network. *J. Adv. Comput. Intell. Inform.*, 2020, vol. 24, iss. 2, pp. 206-213. DOI: 10.20965/jaciii.2020.p0206.

13. Dorninger, D. On a conjecture of L. Fejes Tóth and J. Molnár about circle coverings of the plane. *Period Math Hung*, 2019, vol. 78, pp. 242–253. DOI: 10.1007/s10998-018-0254-z.

14. Rvachev, V. L. *Teoriya R-funktsii i nekotoryye yeye prilozheniya: monografiya* [Theory of the R-function and some of its applications: monograph]. Kyiv: “Nauk. Dumka” Publ., 1982. 552 p.

15. Stoyan, Y., Scheithauer, G., Gil, N., Romanova, T. Φ -functions for complex 2D-objects. *4OR*, 2004, vol. 2, iss. 1, pp. 69-84. DOI: 10.1007/s10288-003-0027-1.

16. Bennell, J., Scheithauer, G., Stoyan, Y., Romanova, T. Tools of mathematical modeling of arbitrary object packing problems. *Annals of Operations Research*, 2010, vol. 179, iss. 1, pp. 343–368. DOI: 10.1007/s10479-008-0456-5.

17. Gaspar, Z., Tarnai, T., Hincz, K. Partial covering of a circle by equal circles. Part 1: The mechanical models. *Journal of Computational Geometry*, 2014, vol. 5, iss. 1, pp. 104–125. DOI: 10.20382/jocg.v5i1a6.

18. Stoyan, Y. G., Patsuk, V. M. Covering a compact polygonal set by identical circles. *Comp. Opt. and Appl.*, 2010, vol. 46, iss.1, pp. 75-92. DOI: 10.1007/s10589-008-9191-8.

19. Antoshkin, O. A., Pankratov, O. V. Uzahal'nena mate-matychna model' zadachi pokryttya oblasti identychnymy kolamy ta yiyi osnovni realizatsiyi [The mathematical model of the problem covering the areas of identical stakes and the main implementations has been elaborated]. *Sistemy obrobky informatsiyi* [Information processing systems], 2019, no. 1(156), pp. 44-49. DOI: 10.30748/soi.2019.156.06.

20. Pankratov, A., Romanova, T., Litvinchev, I., Marmolejo-Saucedo, J. A. An optimized covering spheroids by spheres. *Applied Sciences (Switzerland)*, 2020, 10 (5), paper № 1846, DOI: /10.3390/app10051846

21. Stoyan, Y. G., Romanova, T., Scheithauer, G., Krivulya, A. Covering a polygonal region by rectangles. *Computational Optimization and Applications*, 2011, vol. 48, iss.3, pp. 675-695. DOI: 10.1007/s10589-009-9258-1.

22. Li, J., Wang, R., Huang, H. and Sun, L. Voronoi based area coverage optimization for directional sensor networks. *Proc. of the 2009 2nd Int. Symp. on Electronic Commerce and Security*, 2009, pp. 488-493. DOI: 10.4236/wsn.2009.15050.
23. Kiseleva, E., Hart, L., Prytomanova, O., Kuzenkov, O. An algorithm to construct generalized Voronoi diagrams with fuzzy parameters based on the theory of optimal partitioning and neuro-fuzzy technologies. *CEUR Workshop Proceedings*, 2019, vol. 2386, pp. 148-162.
24. Sung, T.-W., Yang, C.-S. Localised sensor direction adjustments with geometric structures of Voronoi diagram and Delaunay triangulation for directional sensor networks. *Int. J. of Ad Hoc and Ubiquitous Computing*, 2015, vol. 20, no. 2, pp. 91-106. DOI: IJAHUC.2015.071694.
25. Kiseleva, E. M. The emergence and formation of the theory of optimal set partitioning for sets of the n-dimensional Euclidean space. Theory and application *Journal of Automation and Information Sciences*, 2018, vol. 50, no. 9, pp. 1-24. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v50.i9.10.
26. Kiseleva, E. M., Kadochnikova, Y. E. Solving a Continuous Single-product Problem of Optimal Partitioning with Additional Conditions. *Journal of Automation and Information Science*, 2009, vol. 41, no. 7, pp. 48-63. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v41.i7.30.
27. Stoyan, Y. G., Yakovlev, S. V. Configuration Space of Geometric Objects. *Cybernetics and Systems Analysis*, 2018, vol. 54, no. 5, pp. 716-726. DOI: 10.1007/s10559-018-0073-5.
28. Yakovlev, S. V. On some classes of spatial configurations of geometric objects and their formalization. *Journal of Automation and Information Sciences*, 2018, vol. 50, iss. 9, pp. 38-50. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v50.i9.30.
29. Berge, C. *Principes de combinatoire*. Paris, Dunod Publ., 1968. 146 p.
30. Yakovlev, S. V. Formalizing spatial configuration optimization problems with the use of a special function class. *Cybernetics and Systems Analysis*, 2019, vol. 55, iss. 4, pp. 581-589. DOI: 10.1007/s10559-019-00167-y.
31. Gillies, S. *The Shapely User Manual*. Available at: <https://shapely.readthedocs.io/en/stable/manual.html> (accessed 12.03.2022).
32. Pankratov, A. V., Romanova, T. Ye., Subbota, I. A. Development of effective algorithms for optimal packing of ellipses. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 2014, vol. 5, no. 4 (71), pp. 28-35. DOI: 10.15587/1729-4061.2014.28015.

Надійшла до редакції 21.09.2021, Розглянута на редколегії 15.04.2022

ФОРМАЛИЗАЦИЯ И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ МАКСИМАЛЬНОГО ПОКРЫТИЯ ОБЛАСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ БИБЛИОТЕКИ SHAPELY ДЛЯ МОНИТОРИНГА ТЕРРИТОРИЙ

С. В. Яковлев, А. В. Карташов, А. А. Мумриенко

Для обеспечения жизнедеятельности общества возникает необходимость создания систем мониторинга процессов или объектов с помощью сети датчиков, способных контролировать часть пространства (территории). Под мониторингом понимается систематическое наблюдение за параметрами объекта с целью получения информации по их соответствию начальным предположениям. При этом строится физическая модель, связывающая характеристики объекта и сведения о наблюдении, позволяющая осуществить идентификацию свойств объекта. Такая информация базируется на обработке сигналов, получаемых с использованием специальных датчиков контроля. Сигналы оцифровываются для предоставления данных о зонах действия датчиков. Таким образом, физическая модель связана с измерением способности и качества восприятия датчиков контроля, фиксируя геометрическое соотношение между ними и точками пространства. Указанной физической модели соответствует геометрическая постановка задачи покрытия области мониторинга совокупностью геометрических объектов, форма и размеры которых определяются зонами действия датчиков. При ограниченном количестве датчиков возникает задача о максимально возможном покрытии области. В этой статье мы отвлечемся от типа объекта мониторинга и рассмотрим геометрические особенности задач покрытия, возникающие при проектировании систем мониторинга пространства разнообразного назначения. **Целью статьи** является разработка конструктивных средств математического моделирования для решения геометрических задач максимального покрытия. Для формализации условий покрытия применена концепция построения конфигурационного пространства геометрических объектов и специальный класс функций, позволяющих устанавливать зависимость меры (площади, объема) конфигурации покрытия от параметров размещения покрывающих объектов. Поскольку получить аналитический вид указанных функций крайне сложно предложен алгоритмический подход к их вычислению. Подход реализован на алгоритме Python с использованием библиотеки Shapely. Спланирован и проведен вычислительный эксперимент для установления зависимости времени вычисления от количества геометрических объектов, составляющих конфигурацию покрытия. Для поиска максимального покрытия используется метод локальной оптимизации BFGS пакета Scipy.optimize. Приведены многочисленные примеры реализации предлагаемого подхода. **Выводы.** В статью обосновано использование программно-алгоритмического подхода для формализации, вычисления и опти-

мизации конфигураций максимального покрытия, позволяющего эффективно решать сложные задачи мониторинга пространства и территорий.

Ключевые слова: мониторинг пространства; сенсорная сеть; покрытие; геометрический объект; математическая модель; оптимизация.

FORMALIZATION AND SOLUTION OF THE MAXIMUM AREA COVERAGE PROBLEM USING LIBRARY SHAPELY FOR TERRITORY MONITORING

Sergiy Yakovlev, Olexii Kartashov, Alexarsder Mumrienko

To ensure the life of society, it becomes necessary to create systems for monitoring processes or objects using a network of sensors that can control part of the space (territory). Monitoring is understood as a systematic observation of the parameters of an object to obtain information on their compliance with the initial assumptions. Simultaneously, a physical model is constructed that links the characteristics of the object and information about the observation, which making it possible to identify the properties of the object. Such information is based on the processing of signals received using special control sensors. These signals are digitized to provide data on the coverage areas of the sensors. Thus, the physical model is associated with measuring the ability and quality of perception of control sensors, fixing the geometric relationship between them and points in space. The specified physical model corresponds to the geometric statement of the problem of covering the monitoring area with a set of geometric objects, the shape and size of which is determined by the coverage areas of the sensors. With a limited number of sensors, the problem arises of the maximum possible coverage of the area. In this article, we digress from the type of monitoring object and consider the geometric features of coverage problems that arise when designing systems for monitoring a space of various purposes. The current article presents constructive means of mathematical modeling for solving geometric problems of maximum coverage. To formalize the coverage conditions, the concept of constructing the configuration space of geometric objects and a special class of functions are used to establish the dependence of the measure (area, volume) of the coverage configuration on the placement parameters of the covering objects. Since it is extremely difficult to obtain an analytical form of these functions, an algorithmic approach to their calculation is proposed. The approach was implemented on the Python algorithm using the Shapely library. A computational experiment was planned and carried out to establish the dependence of the computation time on the number of geometric objects that make up the coverage configuration. To find the maximum coverage, the BFGS local optimization method of the Scipy.optimize package is used. Numerous examples of the implementation of the proposed approach are given. **Conclusions.** The article substantiates the use of a software-algorithmic approach for formalization, calculation and optimization of maximum coverage configurations, which makes it possible to effectively solve complex problems of monitoring space and territories.

Keywords: space monitoring; sensor network; coating; geometric object; mathematical model; optimization.

Яковлев Сергій Всеволодович – д-р фіз.-мат. наук, проф., проф. каф. математичного моделювання та штучного інтелекту, Національний аерокосмічний університет ім. М. С. Жуковського «Харківський авіаційний інститут», Харків, Україна; професор Інституту інформаційних технологій Лодзинського політехнічного університету, Польща.

Карташов Олексій Вікторович – канд. фіз.-мат. наук, доц., доц. каф. математичного моделювання та штучного інтелекту, Національний аерокосмічний університет ім. М. С. Жуковського «Харківський авіаційний інститут», Харків, Україна.

Мумрієнко Олександр Андрійович – магістр прикладної математики, каф. математичного моделювання та штучного інтелекту, Національний аерокосмічний університет ім. М. С. Жуковського «Харківський авіаційний інститут», Харків, Україна.

Sergiy Yakovlev – Dr. Sc. in Physics and Mathematics, Professor of the Department of Mathematical Modelling and Artificial Intelligence, National Aerospace University "Kharkiv Aviation Institute"; Kharkiv, Ukraine, Professor of Institute of Information Technology of Lodz University of Technology, Poland, e-mail: svsyak7@gmail.com, ORCID: 0000-0003-1707-843X.

Oleksii Kartashov – PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Mathematical Modelling and Artificial Intelligence, National Aerospace University "Kharkiv Aviation Institute", Kharkiv, Ukraine, e-mail: AlexeyKartashov@gmail.com, ORCID: 0000-0002-6282-553X.

Alexander Mumrienko – Master of Applied Mathematics, Department of Mathematical Modelling and Artificial Intelligence, National Aerospace University "Kharkiv Aviation Institute", Kharkiv, Ukraine, e-mail: mcdexn@gmail.com.