

УДК 519.248

Ю. А. ДОЛГОВ

*Приднестровский государственный университет им. Т. Г. Шевченко, Тирасполь,  
Приднестровская Молдавская Республика*

## ИССЛЕДОВАНИЕ ТОЧНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ВЫБОРОК МАЛОГО ОБЪЕМА РАЗЛИЧНЫМИ МЕТОДАМИ

*Проводится анализ и сравнение существующих методов расчета параметров выборок малого объема с помощью интервальных оценок среднеквадратического отклонения. Предлагается новый метод – робастный метод выборок точечных распределений (РМТР), который сочетает в себе достоинства метода точечных распределений с достоинствами робастных средних величин Уолша. Метод позволяет сократить величину интервальных оценок в 4-7 раз по сравнению с классическим методом и при этом уменьшить ошибку вычисления СКО практически в 3 раза.*

**Ключевые слова:** выборка малого объема, средние величины Уолша, робастный метод выборок точечных распределений (РМТР).

### 1. Постановка задачи

В предыдущей статье [1] нами сделана успешная попытка найти метод расчета параметров выборок малого объема, который позволял бы получать их с точностью, превосходящей точность классического метода [2]. В качестве такого метода был предложен метод точечных распределений (МТР), который позволяет примерно в 2 раза снизить относительную ошибку расчета среднего квадратического отклонения (СКО), в 3-4 раза сокращает размер интервальной оценки дисперсии, что приводит к уменьшению в 2-2,5 раза доли ложной приемки и ложной браковки изделий при использовании на производстве контрольных выборок малого объема при большом объеме партии (например, контроль параметров кристаллов при производстве интегральных микросхем). Последующими исследованиями установлено, что имеется возможность дальнейшего уменьшения указанных ошибок, что и показано в настоящей статье.

### 2. Теоретические и экспериментальные исследования

Покажем возможности повышения точности расчета параметров выборок малого объема на примере самого распространенного объема контрольной выборки при производстве кристаллов ИМС  $n=5$  единиц.

Исходная выборка объема  $n=5$  взята из совокупности, распределенной по нормальному закону

$$X_i : 9,1; 10,2; 11,5; 12,8; 16,9. \quad (1)$$

Расчет параметров этой выборки ведем по че-

тырем различным методам.

1. Классический метод [2].

Среднее арифметическое

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = 12,10. \quad (2)$$

Выборочная дисперсия

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = 9,125. \quad (3)$$

Интервальная оценка математического ожидания (при  $q=0,05$ )

$$\begin{aligned} \bar{X} - t_p \frac{S}{\sqrt{n}} \leq M[X] \leq \bar{X} + t_p \frac{S}{\sqrt{n}} \\ = 9,02 \leq M[X] \leq 15,18. \end{aligned} \quad (4)$$

Интервальная оценка дисперсии (при  $q=0,05$ )

$$\frac{nS^2}{\chi_{1-q/2}^2} \leq D[X] = \sigma^2 \leq \frac{nS^2}{\chi_{q/2}^2} = 4,0956 \leq \sigma^2 \leq 94,2665. \quad (5)$$

где,  $2,0238 \leq \sigma \leq 9,7091$ .

Относительная ошибка СКО [3]

$$\frac{\sigma(S)}{\sigma} 100\% = \sqrt{\frac{1}{2n-1,4}} * 100\% = 434,1\%. \quad (6)$$

2. Устойчивая (робастная) оценка Ходжеса-Лемана среднего арифметического выборки по средним Уолша [4].

Преобразуем исходные величины выборки  $X_i$  в среднее Уолша

$$Z_i = \frac{X_i + X_j}{2} \quad (i, j = \overline{1, n}; i \neq j) \quad (7)$$

$Z_i = 9,65; 10,30; 10,85; 10,95; 11,50; 12,15; 13,00; 13,55; 14,20; 14,85$ . Здесь объем выборки стал  $n=10$ .

Тогда робастная оценка среднего равна медиане выборки  $Z$

$$\bar{X} = \bar{Z} = Me = \frac{Z_5 + Z_6}{2} = \frac{11,50 + 12,15}{2} = 11,825, \quad (8)$$

а оценка выборочной дисперсии

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (Z_i - \bar{Z})^2 = 3,1257; \quad S = 1,7680. \quad (9)$$

Интервальная оценка математического ожидания при прежних условиях равна

$$10,56 \leq M[X] \leq 13,09, \quad (10)$$

а интервальная оценка дисперсии

$$1,6434 \leq \sigma^2 \leq 11,5766, \quad (11)$$

и СКО – 1

$$1,2820 \leq \sigma \leq 3,4025. \quad (12)$$

Относительная ошибка СКО

$$\frac{\sigma(S)}{\sigma} 100\% = 23,19\%. \quad (13)$$

### 3. Метод точечных распределений (МТР) [5,6]

Границы эквивалентного распределения

$$a = \bar{X} - 2,4s = 4,85; \quad b = \bar{X} + 2,4S = 19,35. \quad (14)$$

Шаг эквивалентной выборки  $c = \frac{b-a}{k} \approx 0,5$ .

Вспомогательный коэффициент

$$\rho' = \frac{0,3435}{n-0,7076} = 0,400. \quad (15)$$

Ширина половины ядра

$$\rho = \rho' (b-a) = 6,00. \quad (16)$$

Тогда среднее арифметическое и дисперсия

$$m_X^* = \frac{\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n p_{ij} \cdot X_i \cdot \exp \left[ -4,5 \left( \frac{X_j - X_i}{\rho} \right)^2 \right]}{\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n p_{ij} \cdot \exp \left[ -4,5 \left( \frac{X_j - X_i}{\rho} \right)^2 \right]} = \quad (17)$$

$$= 11,9684;$$

$$\mu_2^* = \frac{\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n p_{ji} \cdot X_i \cdot \exp \left[ -4,5 \left( \frac{X_j - X_i}{\rho} \right)^2 \right]}{\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n p_{ji} \cdot \exp \left[ -4,5 \left( \frac{X_j - X_i}{\rho} \right)^2 \right]} = \quad (18)$$

$$- (m_X^*)^2 = 9,9703.$$

Интервальная оценка математического ожидания (эквивалентный объем выборки  $n_3=16$ )

$$10,29 \leq M[X] \leq 13,65; \quad (19)$$

интервальная оценка дисперсии (при  $q=0,05$ )

$$5,8030 \leq \mu_2 = \sigma^2 \leq 25,4751, \quad (20)$$

интервальная оценка СКО

$$2,4089 \leq \sigma \leq 5,0473. \quad (21)$$

Относительная ошибка СКО

$$\frac{\sigma(S)}{\sigma} 100\% = 18,08\%. \quad (22)$$

### 4. МТР на базе средних Уолша

Границы эквивалентной выборки

$$a = \bar{Z} - 2,4S = 7,58; \quad b = \bar{Z} + 2,4S = 16,07. \quad (23)$$

Объем эквивалентной выборки  $n_3=27$ .

Шаг:

$$C = \frac{b-a}{k} = \frac{16,07 - 7,58}{30} \approx 0,28. \quad (24)$$

Вспомогательный коэффициент

$$\rho' = \frac{0,3435n}{n-0,7076} = 0,370. \quad (25)$$

Ширина половины ядра

$$\rho = \rho' (b-a) = 3,141. \quad (26)$$

Тогда среднее арифметическое и дисперсия

$$m_Z^* = 12,0270; \quad \mu_2^* = 3,4547. \quad (27)$$

Интервальная оценка среднего

$$11,29 \leq M[X] \leq 12,76; \quad (28)$$

интервальная оценка дисперсии

$$2,225 \leq \sigma^2 \leq 6,740; \quad (29)$$

интервальная оценка СКО

$$1,492 \leq \sigma \leq 2,596; \quad (30)$$

Относительная ошибка СКО

$$\frac{\sigma(S)}{\sigma} 100\% = 13,79\%. \quad (32).$$

Для наглядности полученные результаты можно представить в графическом виде представленном на рис. 1 и 2.

Проделав аналогичную работу с другими объемами выборок, получим результаты, сведенные в таблицу 1, где условно за 100% приняты величины, полученные при расчетах по классическому методу, а остальные результаты – в процентах от них.

## Выводы

Анализ таблиц 1 и 2 показывает, что метод 4, основанный на применении метода точечных распределений, выборку которого составляют средние Уолша (т.е. происходит замена первоначальных переменных), дает возможность получить интервальные оценки в 4-7 раз меньше (для средних и СКО), чем такие же оценки, полученные классическим методом 1, при этом относительная ошибка вычислений снижается почти в 3 раза, а по отношению к МТР – в 1,5-2,0 раза.

Назовем новый метод 4 робастным методом точечных распределений (РМТР).

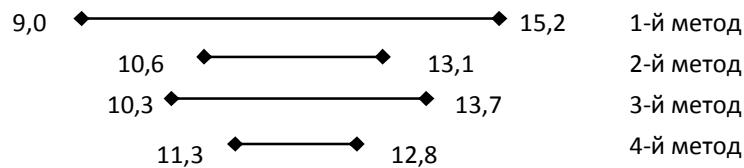


Рис. 1. Интервальная оценка среднего

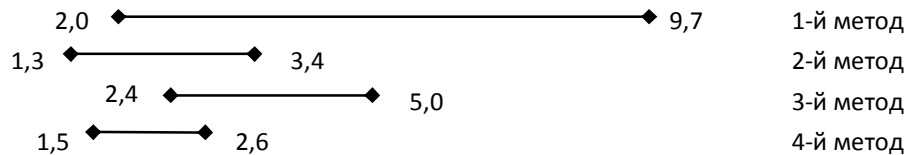


Рис. 2. Интервальная оценка СКО

Таблица 1

Относительное снижение интервальных оценок

Метод	Интервальная оценка средних	Интервальная оценка дисперсий	Интервальная оценка СКО
1	100	100	100
2	40	11	27
3	55	22	34
4	24	5	14

Таблица 2

Изменение эквивалентного объема выборки и относительной ошибки СКО

Метод	Результаты								
	Объем (кол-во единиц)	3	4	5	6	7	8	9	10
1	Объем (кол-во единиц)	3	4	5	6	7	8	9	10
2		3	5	10	15	21	28	36	45
3		10	13	16	18	20	23	25	28
4		10	16	28	38	49	61	75	90
1	Относительная ошибка СКО, %	46,6	38,9	34,1	30,7	28,2	26,2	24,5	23,2
2		46,6	34,1	23,2	18,7	15,7	13,5	11,9	10,6
3		23,3	20,2	18,1	17,0	16,0	15,1	14,2	13,6
4		23,3	18,1	13,6	11,6	10,2	9,1	8,2	7,5

## Литература

1. Долгов, Ю. А. Исследование интервальных оценок и моментов высшего порядка для выборок малого объема [Текст] / Ю. А. Долгов // *Радиоелектронні і комп'ютерні системи*. – 2012. – №5(57). – С. 165-170.

2. Митропольский, А. К. Техника статистических вычислений [Текст] / А. К. Митропольский. – 2-е изд., переаб. и доп. – М.: Наука, 1971. – 576 с.

3. Шор, Я. Б. Статистические методы анализа и контроля качества и надежности [Текст] / Я. Б. Шор. – М.: Сов. радио, 1962. – 552 с.

4. Кобзарь, А. И. Прикладная математическая

статистика. Для инженеров и научных работников [Текст] / А. И. Кобзарь. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 816 с.

5. Dolgov, Y. A. Stochastic Check for Control of Electronic Wires Quality [Text] / Y. A. Dolgov, A. Y. Dolgov // *Trans. of 10-th Intern. Symp. on Applied Stochastic Models and Data Analysis*. - 12-15 June 2001. - V. 1/2. - Univer. Technologic de Compiègne, France. - P. 387-390.

6. Долгов, Ю. А. Метод повышения точности вычисления параметров выборки малого объема (метод точечных распределений) [Текст] / Ю. А. Долгов, А. Ю. Долгов, Ю. А. Столяренко // *Вестник ПГУ*. – 2010. – Юб. вып. – С. 232-242.

Поступила в редакцію 22.01.2014, рассмотрена наредколлегии 24.03.2014

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. Ю. П. Кодратенко, Национальный университет кораблестроения им. адм. Макарова, Николаев, Украина.

### ДОСЛІДЖЕННЯ ТОЧНОСТІ ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ ВИБІРОК МАЛОГО ОБ'ЄМУ РІЗНИМИ МЕТОДАМИ

*Ю. О. Долгов*

Проводиться аналіз і порівняння існуючих методів розрахунку параметрів вибірок малого обсягу з допомогою інтервальних оцінок середньоквадратичного відхилення. Пропонується новий метод – робастний метод вибірок то-чечних розподілів (РМТР), який поєднує в собі достоїнства методу точкових розподілів з достоїнствами робастних середніх величин Уолша. Метод дозволяє скоротити величину інтервальних оцінок в 4-7 разів в порівнянні з класичним методом і при цьому зменшити помилку обчислення СКО практично в 3 рази.

**Ключові слова:** вибірка малого об'єму, середні величини Уолша, робастний метод вибірок точкових розподілів (РМТР).

### INVESTIGATION OF EXACTNESS OF SMALL SIZE SAMPLE PERAMETERS WITH DIFFERENT METHODS

*Y. A. Dolgov*

The analysis and comparison of existing methods for calculating the parameters small samples using interval estimates of the standard deviation. It is suggested a new method of calculation – robust point distribution method (RPDM), which combined qualities of point distribution method with qualities of Walsh means. The method allows tom reduce of confidence intervals in 4-7 times as compared with classic methods and also to reduce standard deviation in 3 times.

**Key words:** small size sample, the qualities of Walsh means, robust point distribution method (RPDM).

**Долгов Юрий Александрович** – действительный член РАЕН, д-р техн. наук, профессор кафедры «Информационных технологий и автоматизированного управления производственными процессами» Приднестровского государственного университета им. Т. Г. Шевченко (ПГУ), Тирасполь, Приднестровье, e-mail: dolax2012@yandex.ru.