УДК 512.152

Н. В. ЕРЕМЕНКО

Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Харьков

МНОГОФАЗНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛОЖНЫХ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ЛОГИСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Предлагается представить сложные распределенные логистические системы в виде многофазных систем с экспоненциальными звеньями. Путем анализа аналитических выражений преобразований Лапласа для различных видов звеньев получены расчетные формулы для плотности и функции распределения времени пребывания и времени ожидания в логистической системе, и построены их графические зависимости. Предложенная методика основана на интегральном методе нахождения неопределенных параметров. Полученные расчетные формулы могут быть использованы для анализа временных характеристик сложных логистических систем с помощью систем массового обслуживания с одинаковыми и различными звеньями, что позволяет находить не только плотность и функцию распределения в аналитическом виде, но и их числовые характеристики.

Ключевые слова: *сложная логистическая производственная система, система массового обслуживания, обратное преобразование Лапласа, функция и плотность распределения времени пребывания и времени ожидания в системе, метод проверок, метод неопределенных коэффициентов.*

Введение

В условиях рыночной экономики выживаемость промышленных предприятий, завоевание ими конкурентных преимуществ возможны лишь при создании эффективной распределенной логистической системы, соответствующей достигнутым уровням знаний, техники, технологии, организации и управления производством с гибкой адаптацией к меняющимся условиям рынка. Это, в свою очередь, требует эффективного управления материальными и сопутствующими (информационными, финансовыми, сервисными) потоками для достижения корпоративных целей с минимальными затратами всех ресурсов. При этом под логистической системой понимается относительно устойчивая совокупность звеньев (структурных/функциональных подразделений компании, а также поставщиков, потребителей и логистических посредников), взаимосвязанных и объединенных единым управляемым логистическим процессом для реализации корпоративной стратегии организации бизнеса. Организация эффективного управления работы как отдельных звеньев логистической системы, так и их совокупности является актуальной задачей, которая рассматривается в данной статье.

Постановка задачи исследования

Логистическое управление рассматривает как единое целое весь цикл экономической деятельности предприятия, начиная от выбора целесообразных производственных задач и заканчивая организацией и построением процессов сбыта и реализации продукции. Любое управленческое решение можно представить в виде многофазной процедуры, эффективность которой напрямую зависит от методологической разработки технологического и экономического описания отдельных логистических фаз [1-3]. Так как большинство процессов в сложной производственной системе зависят от поведения рынка (носят случайных характер), то в качестве одного из способов формализованного описания можно использовать теорию систем массового обслуживания (СМО) [4-6].

Целью данной работы является разработка единой методики для определения временных характеристик последовательных сетей многофазной модели в виде последовательных каналов, что достаточно адекватно отражает реальные производственные процессы. Расчет последовательной сети, состоящей из одинаковых (под одинаковыми будем подразумевать звенья, имеющие равные интенсивности поступления и обработки заявок в системе) либо различных (под различными будем подразумевать звенья, имеющие отличные интенсивности поступления и обработки заявок в системе) звеньев, проводится по упрощенной схеме, когда каждое звено рассчитывается отдельно, так как считается, что звенья друг на друга не влияют [4, 5].

Решение задачи исследования

Рассмотрим различные типы многофазных систем, с помощью которых можно описать сложные распределенные логистические системы.

1. Многофазная система с одинаковыми звеньями. Пусть преобразование Лапласа плотности распределения времени пребывания заявки в системе для одного звена $\beta(s)=\dfrac{c}{c+s}$. Тогда преобразование Лапласа для n последовательных звеньев:

$$B(s)=\left(\frac{c}{c+s}\right)^n;\ c=\mu(1-\rho),\ \rho=\lambda/\mu,$$

где ρ – загрузка в одном звене, λ – интенсивность входящих запросов на одно звено, μ – интенсивность обработки запросов в оном звене ($\lambda<\mu$), s – формальная переменная.

а) **n=1**. Проведем обратное преобразование Лапласа (здесь и далее обратные преобразования взяты из таблиц в [5,7]): $\dfrac{c}{c+s}\equiv ce^{-ct}$, тогда плотность распределения времени пребывания ($T_{сист}$) заявки в системе $f(T_{сист})=ce^{-ct}$; функция распределения времени пребывания заявки в системе

$$F(T_{сист})=\int_0^t f(T_{сист})dt=-e^{-ct}\Big|_0^t=1-e^{-ct}.$$

б) **n=2**. Обратное преобразование Лапласа в этом случае: $\left(\dfrac{c}{c+s}\right)^2\equiv c^2te^{-ct}$.

Плотность распределения $f(T_{сист})=c^2te^{-ct}$.

Функция распределения времени пребывания заявки в системе:

$$F(T_{сист})=\int_0^t f(T_{сист})dt=cte^{-ct}-e^{-ct}\Big|_0^t=1-cte^{-ct}-e^{-ct}.$$

в) **n=3**: $\left(\dfrac{c}{c+s}\right)^3\equiv c^3\dfrac{t^2}{2}e^{-ct}$; $f(T_{сист})=c^3\dfrac{t^2}{2}e^{-ct}$;

$$F(T_{сист})=\int_0^t f(T_{сист})dt=-\frac{1}{2}c^2t^2e^{-ct}-cte^{-ct}-e^{-ct}\Big|_0^t=$$

$$=1-\frac{1}{2}c^2t^2e^{-ct}-cte^{-ct}-e^{-ct}.$$

г) **n=4**: $\left(\dfrac{c}{c+s}\right)^4\equiv c^4\dfrac{t^3}{6}e^{-ct}$; $f(T_{сист})=c^4\dfrac{t^3}{6}e^{-ct}$;

$$F(T_{сист})=\int_0^t f(T_{сист})dt=-\frac{1}{6}c^3t^3e^{-ct}-\frac{1}{2}c^2t^2e^{-ct}-cte^{-ct}-$$

$$-e^{-ct}\Big|_0^t=1-\frac{1}{6}c^3t^3e^{-ct}-\frac{1}{2}c^2t^2e^{-ct}-cte^{-ct}-e^{-ct}.$$

д) если система содержит n одинаковых звеньев, обратное преобразование Лапласа $\left(\dfrac{c}{c+s}\right)^n\equiv$ $\equiv\dfrac{c(ct)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-ct}$, то с помощью метода математической индукции получаем следующие значения для $f(T_{сист})$ и $F(T_{сист})$: $f(T_{сист})=\dfrac{c(ct)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-ct}$;

$$F(T_{сист})=\int_0^t f(T_{сист})dt=-\sum_{i=1}^{n}\frac{c(ct)^{i-1}}{(i-1)!}e^{-ct}\Bigg|_0^t=1-\sum_{i=1}^{n}\frac{c(ct)^{i-1}}{(i-1)!}e^{-ct}.$$

Для построения графиков функций (рис. 1) рассмотрим их поведение в крайних точках:

$$\lim_{t\to 0}f(T_{сист})=0;\ \lim_{t\to\infty}f(T_{сист})=0;$$

$$\lim_{t\to 0}F(T_{сист})=0;\ \lim_{t\to\infty}F(T_{сист})=1.$$

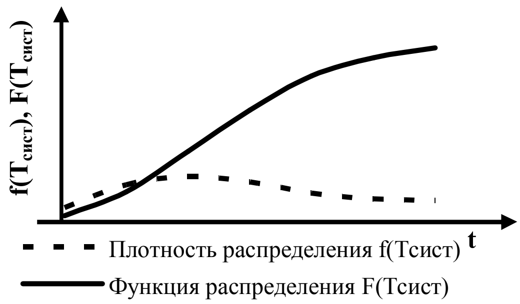

Рис. 1. Функция и плотность распределения времени пребывания заявки в системе из *n* одинаковых звеньев

2. Многофазная система с разными звеньями: $\beta(s)=\dfrac{c_i}{c_i+s}$; $B(s)=\prod\limits_{i=1}^{n}\dfrac{c_i}{c_i+s}$; $c_i=\mu_i(1-\rho_i)$, $\rho_i=\lambda/\mu_i$.

а) **n=2** (рис. 2):

$$B(s)=\prod_{i=1}^{2}\frac{c_i}{c_i+s}=\left(\frac{c_1}{c_1+s}\right)\left(\frac{c_2}{c_2+s}\right)=\frac{c_1c_2}{(c_1+s)(c_2+s)};$$

$$f(T_{сист})=c_1c_2\left(\frac{e^{-c_1t}}{c_2-c_1}+\frac{e^{-c_2t}}{c_1-c_2}\right);$$

$$F(T_{сист})=\int_0^t f(T_{сист})dt=c_1c_2\left(-\frac{1}{c_1}\frac{e^{-c_1t}}{c_2-c_1}-\frac{1}{c_2}\frac{e^{-c_2t}}{c_1-c_2}\right)\Bigg|_0^t=$$

$$=1-c_1c_2\left(\frac{e^{-c_1t}}{c_1(c_2-c_1)}+\frac{e^{-c_2t}}{c_2(c_1-c_2)}\right).$$

б) n=3: $B(s)=\prod\limits_{i=1}^{3}\dfrac{c_i}{c_i+s}=\dfrac{c_1c_2c_3}{(c_1+s)(c_2+s)(c_3+s)}$.

Обратное преобразование Лапласа будет иметь вид: $Ae^{-c_1t}+Be^{-c_2t}+Ce^{-c_3t}$, где A, B, C – константы, выраженные через c_1, c_2, c_3: $A=\dfrac{c_1c_2c_3}{(c_2-c_1)(c_3-c_1)}$;

$$B=\frac{c_1c_2c_3}{(c_1-c_2)(c_3-c_2)};\quad C=\frac{c_1c_2c_3}{(c_1-c_3)(c_2-c_3)}.$$

Тогда $f(T_{сист}) = Ae^{-c_1 t} + Be^{-c_2 t} + Ce^{-c_3 t}$;

$$F(T_{сист}) = \int_0^t f(T_{сист})dt = \frac{A}{c_1}e^{-c_1 t} + \frac{B}{c_2}e^{-c_2 t} + \frac{C}{c_3}e^{-c_3 t} + 1.$$

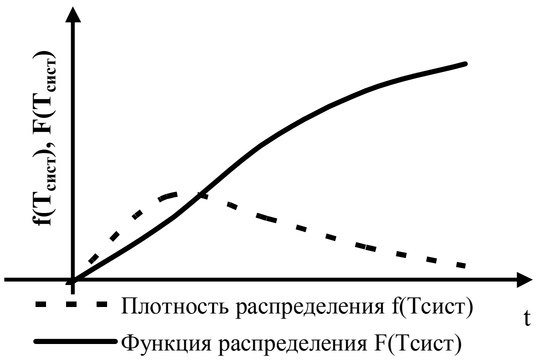

Рис. 2. Функция и плотность распределения времени пребывания заявки в системе с двумя различными звеньями

в) Если система содержит n звеньев, причем все звенья разные, то по индукции получим:

$$B(s)=\prod_{i=1}^{n}\frac{c_i}{c_i+s}=\frac{c_1\cdot c_2\cdot c_3\cdot\ldots\cdot c_n}{(c_1+s)(c_2+s)(c_3+s)\cdot\ldots\cdot(c_n+s)};$$

$$f(T_{сист}) = \sum_{i=1}^{n} A_i e^{-c_i t}\text{, где } A_i = \frac{\prod_{j=1}^{n} c_j}{\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}(c_i - c_k)};$$

$$F(T_{сист}) = \prod_{i=1}^{n} c_i \sum_{j=1}^{n} \frac{e^{-c_j t}-1}{\prod_{\substack{j,k,m=1\\k>m\\k=j \text{ или } m=j}}^{n} (-1)^{j+1} c_j (c_k - c_m)}.$$

3. Смешанный случай. В системе одновременно имеются одинаковые и разные звенья: $\beta(s)=\frac{c_i}{c_i+s}$; $c_i=\mu_i(1-\rho_i)$;

$$B(s)=\left(\frac{c_1}{c_1+s}\right)^{n_1}\left(\frac{c_2}{c_2+s}\right)^{n_2}\times\ldots\times\left(\frac{c_m}{c_m+s}\right)^{n_m}.$$

В этом случае для осуществления обратного преобразования Лапласа предлагается использовать метод проверок, дающий удобную схему обращения преобразований. Задача сводится к тому, чтобы представить B(s) в виде суммы членов, для каждого из которых обратное преобразование может быть найдено по таблицам. Тогда можно, пользуясь свойством линейности, искать обратные преобразования для слагаемых, а затем, сложив их, получить обратное преобразование для суммы. Основным методом представления B(s) в виде суммы является метод разложения на простые дроби [5]:

$$B(s) = \frac{A_{11}}{(s+c_1)^{n_1}} + \frac{A_{12}}{(s+c_1)^{n_1-1}} + \ldots + \frac{A_{1n_1}}{(s+c_1)} + \frac{A_{21}}{(s+c_2)^{n_2}} + \frac{A_{22}}{(s+c_2)^{n_2-1}} + \ldots + \frac{A_{2n_2}}{(s+c_2)} + \ldots + \frac{A_{m1}}{(s+c_m)^{n_m}} + \frac{A_{m2}}{(s+c_m)^{n_m-1}} + \ldots + \frac{A_{mn_1}}{(s+c_m)}. \quad (1)$$

Выразив B(s) в таком виде, можно по таблицам [5, 7] найти обращение для каждого из слагаемых. Коэффициенты A_{ij} могут быть найдены либо методом неопределенных коэффициентов (путем приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях s числителей в левой и правой частях равенства и разрешения полученной системы уравнений [8]), либо с помощью применения оператора дифференцирования по формуле [5]:

$$A_{ij} = \frac{1}{(j-1)!}\frac{\partial^{j-1}}{\partial s^{j-1}}\left[(s+c_i)^{n_i} B(s)\right]\Big|_{s=-c_i}. \quad (2)$$

Таким образом, получается полное описание обращения преобразования методом проверок для рациональной функции B(s):

$$f(T_{сист}) = \sum_{i=1}^{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{A_{ij}t^{(n_i-j)}}{(n_i-j)!}e^{-c_i t}; \quad (3)$$

$$F(T_{сист}) = \sum_{i=1}^{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{A_{ij}}{(n_i-j)!}\int_0^t t^{(n_i-j)}e^{-c_i t}dt = \quad (4)$$

$$= \sum_{i=1}^{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{A_{ij}}{(n_i-j)!}\left(\frac{t^{(n_i-j)}e^{-c_i t}}{-c_i} + \frac{n_i-j}{c_i}\int_0^t t^{(n_i-j)-1}e^{-c_i t}dt\right).$$

Приведем пример для иллюстрации метода. Пусть $B(s)=\frac{c_1^3 c_2^2 c_3}{(c_1+s)^3(c_2+s)^2(c_3+s)}$.

Разложим полученное выражение на простые дроби в соответствии с формулой (1):

$$B(s)=\frac{A_{11}}{(s+c_1)^3}+\frac{A_{12}}{(s+c_1)^2}+\frac{A_{13_1}}{(s+c_1)}+\frac{A_{21}}{(s+c_2)^2}+\frac{A_{22}}{(s+c_2)}+\frac{A_{31}}{(s+c_3)}.$$

Вычислим коэффициенты A_{ij}. Коэффициенты A_{11}, A_{21} и A_{31} получить довольно просто, так как для их вычисления не требуется дифференцирования. Получаем

$$A_{11} = (s+c_1)^3 B(s)\Big|_{s=-c_1} = \frac{c_1^3 c_2^2 c_3}{(c_2-c_1)^2(c_3-c_1)};$$

$$A_{21} = (s + c_2)^2 B(s)\Big|_{s=-c_2} = \frac{c_1^3 c_2^2 c_3}{(c_1 - c_2)^3 (c_3 - c_2)};$$

$$A_{31} = (s + c_3) B(s)\Big|_{s=-c_3} = \frac{c_1^3 c_2^2 c_3}{(c_1 - c_3)^3 (c_2 - c_3)^2}.$$

Для получения коэффициентов A_{12}, A_{22} необходимо провести одно дифференцирование:

$$A_{12} = \frac{\partial}{\partial s}\left[(s + c_1)^2 B(s)\right]\Bigg|_{s=-c_1} = \frac{-c_1^3 c_2^2 c_3 (2c_3 - 3c_1 + c_2)}{(c_2 - c_1)^3 (c_3 - c_2)^2};$$

$$A_{22} = \frac{\partial}{\partial s}\left[(s + c_2) B(s)\right]\Bigg|_{s=-c_2} = \frac{-c_1^3 c_2^2 c_3 (3c_3 + c_1 - 4c_2)}{(c_1 - c_2)^4 (c_3 - c_2)^2}.$$

И, наконец, вычисление A_{13} включает двукратное дифференцирование. Но первое дифференцирование уже было проведено, и можно воспользоваться производной, полученной при вычислении A_{12} до подстановки значения $s = -c_1$:

$$A_{13} = \frac{1}{2!}\frac{\partial^2}{\partial s^2}\left[\frac{-c_1^3 c_2^2 c_3 (c_2 + s)(2c_3 + 3s + c_2)}{(c_2 + s)^4 (c_3 + s)^2}\right]\Bigg|_{s=-c_1} =$$

$$= \frac{c_1^3 c_2^2 c_3 ((2c_3 - 3c_1 + c_2)^2 - (2c_2 - 3c_1 + c_3)(c_3 - c_1))}{(c_2 - c_1)^4 (c_3 - c_1)^3}.$$

Полученное окончательное разложение на простые дроби позволяет получить обращение методом проверок:

$$f(T_{сист}) = \frac{A_{11} t^2}{2!} e^{-c_1 t} + \frac{A_{12} t}{1!} e^{-c_1 t} + A_{13} e^{-c_1 t} +$$

$$+ \frac{A_{21} t}{1!} e^{-c_2 t} + A_{22} e^{-c_2 t} + A_{31} e^{-c_3 t};$$

$$F(T_{сист}) = -\frac{A_{11}}{2!} e^{-c_1 t}\left(\frac{t^2}{c_1} + \frac{2t}{c_1^2} + \frac{2}{c_1^3}\right) - \frac{A_{12}}{c_1^2} e^{-c_1 t} \times$$

$$\times (c_1 t + 1) - \frac{A_{13}}{c_1} e^{-c_1 t} - \frac{A_{21} t}{c_2^2} e^{-c_2 t}(c_2 t + 1) - \frac{A_{22}}{c_2} e^{-c_2 t} -$$

$$- \frac{A_{31}}{c_3} e^{-c_3 t} + \frac{A_{11}}{c_1^3} + \frac{A_{12}}{c_1^2} + \frac{A_{13}}{c_1} + \frac{A_{21}}{c_1^2} + \frac{A_{22}}{c_2} + \frac{A_{31}}{c_3}.$$

$$\lim_{t \to 0} f(T_{сист}) = A_{13} + A_{22} + A_{31};$$

$$\lim_{t \to 0} F(T_{сист}) = 0; \ \lim_{t \to \infty} f(T_{сист}) = 0;$$

$$\lim_{t \to \infty} F(T_{сист}) = \frac{A_{11}}{c_1^3} + \frac{A_{12}}{c_1^2} + \frac{A_{13}}{c_1} + \frac{A_{21}}{c_2^2} + \frac{A_{22}}{c_2} + \frac{A_{31}}{c_3}.$$

4. Функция распределения времени ожидания. Рассмотрим логистическую систему, состоящую из различных видов звеньев экспоненциальной сети, где преобразование Лапласа плотности распределения времени ожидания ($T_{оч}$) имеет вид:

$$B(s) = \left(a_1 + \frac{c_1}{b_1 + s}\right)^{n_1} \left(a_2 + \frac{c_2}{b_2 + s}\right)^{n_2} \times \ldots \times \left(a_m + \right.$$

$$\left. + \frac{c_m}{b_m + s}\right)^{n_m} = \frac{\prod_{i=1}^{m} (a_i b_i + c_i + a_i s)^{n_i}}{\prod_{i=1}^{m} (b_i + s)^{n_i}},$$

где $a_i = (1 - \rho_i)$; $c_i = \lambda(1 - \rho_i)$; $b_i = \mu_i(1 - \rho_i)$.

В этом случае B(s) является неправильной дробью, так как степени старшего члена числителя и знаменателя равны. Поэтому для осуществления обратного преобразования необходимо, сначала, получить правильные дроби (степень числителя должна быть строго меньше степени знаменателя). Известно, что всякая неправильная дробь может быть преобразована в сумму многочлена и правильной дроби при помощи выделения целой части (деление многочлена на многочлен) [8]. Тогда выражение для B(s) может быть преобразовано к виду:

$$B(s) = \frac{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_m s^{n_1 + n_2 + \ldots + n_m}}{\prod_{i=1}^{m} (b_i + s)^{n_i}} +$$

$$+ \frac{\prod_{i=1}^{m} (a_i b_i + c_i + a_i s)^{n_i} - a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_m s^{n_1 + n_2 + \ldots + n_m}}{\prod_{i=1}^{m} (b_i + s)^{n_i}};$$

$$B(s) = a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_m + \frac{\sum_{i=0}^{n_1 + n_2 + \ldots + n_m - 1} G_i s^i}{\prod_{i=1}^{m} (b_i + s)^{n_i}}, \qquad (5)$$

где G_i – некоторые коэффициенты.

Как и в предыдущем случае для осуществления обратного преобразования предлагается использовать метод проверок. Выражение (5) раскладывается на простые дроби (1) с известными коэффициентами (2). Единственным отличием от предыдущего случая (3) является наличие в B(s) свободного члена $a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_m$, обратное преобразование для которого имеет вид $a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_m u_0(t)$, где $u_0(t)$ – единичный импульс, обладающий следующими свойствами:

$$u_0(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0, \\ 0, & t \neq 0; \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(t) dt = 1; \quad \int_{-\infty}^{t} u_0(x) dx = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Тогда для нахождения плотности и функции распределения времени ожидания заявки в системе необходимо к выражению (4) прибавить значение интеграла $\int_0^t a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_m u_0(t) dt = a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_m$.

Приведем пример. Пусть

$$B(s)=\left(a+\frac{c_1}{c_2+s}\right)\left(b+\frac{c_3}{c_4+s}\right)=ab+\frac{A_{11}}{c_2+s}+\frac{A_{21}}{c_4+s},\ \text{где}$$

$$A_{11}=\frac{bc_1(c_2-c_4)-c_1c_3}{c_2-c_4},\quad A_{21}=\frac{ac_3(c_2-c_4)+c_1c_3}{c_2-c_4}.$$

С помощью формул (3) и (4) с учетом наличия свободного члена ab получим:

$$f(T_{оч})=abu_0(t)+A_{11}e^{-c_2t}+A_{21}e^{-c_4t};$$

$$F(T_{оч})=ab+\frac{A_{11}}{c_2}+\frac{A_{21}}{c_4}-\frac{A_{11}}{c_2}e^{-c_2t}-\frac{A_{21}}{c_4}e^{-c_4t}=$$

$$=\frac{(bc_4+c_3)(ac_2+c_1)}{c_2c_4}-\frac{A_{11}}{c_2}e^{-c_2t}-\frac{A_{21}}{c_4}e^{-c_4t}.$$

Учитывая, что $a=(1-\rho_1)$, $b=(1-\rho_2)$, $c_1=\lambda(1-\rho_1)$, $c_3=\lambda(1-\rho_2)$, $c_2=\mu_1(1-\rho_1)$, $c_4=\mu_2(1-\rho_2)$, найдем значение свободного члена:

$$\frac{(bc_4+c_3)(ac_2+c_1)}{c_2c_4}=\frac{\left[\mu_2(1-\rho_2)^2+\lambda(1-\rho_2)\right]}{\mu_1\mu_2(1-\rho_1)(1-\rho_2)}\times$$

$$\times\left[\mu_1(1-\rho_1)^2+\lambda(1-\rho_1)\right]=1.$$

Тогда $F(T_{оч})=1-\frac{A_{11}}{c_2}e^{-c_2t}-\frac{A_{21}}{c_4}e^{-c_4t}$, что совпадает с результатами, полученными в [4] для случая, когда система содержит только различные звенья.

В качестве еще одного примера рассмотрим смешанный случай когда:

$$B(s)=\left(a+\frac{c_1}{c_2+s}\right)^2\left(b+\frac{c_3}{c_4+s}\right)=\frac{a^2bs^3+D_1s^2+D_2s+D_3}{(c_2+s)^2(c_4+s)},$$

где $D_1=a^2bc_4+a^2c_3+2abc_1$;

$$D_2=a^2bc_2^2+bc_1^2+2abc_1c_2+2abc_1c_4+2ac_1c_3;$$

$$D_3=a^2bc_2^2c_4+a^2c_2^2c_3+2abc_1c_2c_4+2ac_1c_2c_3+bc_1^2c_4+c_1^2c_3.$$

Разделим числитель на знаменатель, выделим целую часть, и получим правильную дробь:

$$B(s)=a^2b+\frac{G_1s^2+G_2s+G_3}{(c_2+s)^2(c_4+s)},\ \text{где}\quad G_1=D_1-a^2b(2c_2+c_4),$$

$$G_2=D_2-a^2b(c_2^2+2c_2c_4),\quad G_3=D_3-a^2bc_2^2c_4.$$

Разложим полученное выражение на простые дроби в соответствии с формулой (1):

$$B(s)=a^2b+\frac{A_{11}}{(c_2+s)^2}+\frac{A_{12}}{c_2+s}+\frac{A_{21}}{c_4+s}.$$

Вычислим коэффициенты A_{ij}.

$$A_{11}=(s+c_2)^2B(s)\Big|_{s=-c_2}=\frac{(-G_1c_2+G_2)(c_4-c_2)}{(c_4-c_2)^2}-$$

$$-\frac{G_1c_2^2-G_2c_2+G_3}{(c_4-c_2)^2};$$

$$A_{21}=(s+c_4)B(s)\Big|_{s=-c_4}=\frac{(-G_1c_4+G_2)(c_2-c_4)^2}{(c_2-c_4)^4}-$$

$$-\frac{2(c_2-c_4)(G_1c_4^2-G_2c_4+G_3)}{(c_2-c_4)^4}.$$

Для получения коэффициента A_{12} необходимо провести одно дифференцирование:

$$A_{12}=\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{(-G_1s+G_2)(c_4+s)-(G_1s^2-G_2s+G_3)}{(c_4+s)^2}\right]\Bigg|_{s=-c_2}=$$

$$=\frac{(-G_1c_4+4G_1c_2)(c_4-c_2)^2-2(c_4-c_2)}{(c_4-c_2)^4}-$$

$$-\frac{((G_1c_2+G_2)(c_4-c_2)-(G_1c_2^2-G_2c_2+G_3))}{(c_4-c_2)^4}.$$

С помощью формул (3) и (4) с учетом наличия свободного члена a^2b получим окончательный ответ (рис. 3):

$$f(T_{оч})=a^2bu_0(t)+\frac{A_{11}}{1!}e^{-c_2t}+A_{12}e^{-c_2t}+A_{21}e^{-c_4t};$$

$$F(T_{оч})=a^2b+\frac{A_{11}}{c_2^2}+\frac{A_{12}}{c_2}+\frac{A_{21}}{c_4}-$$

$$-\frac{A_{11}}{c_2^2}e^{-c_2t}(c_2t+1)-\frac{A_{12}}{c_2}e^{-c_2t}-\frac{A_{21}}{c_4}e^{-c_4t}.$$

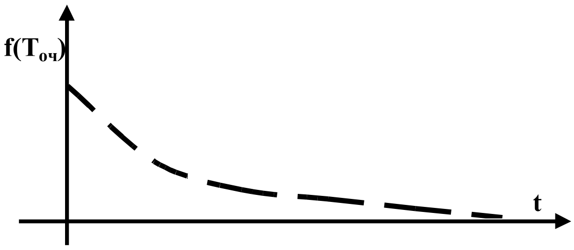

Рис. 3. Плотность распределения времени ожидания заявки в системе (смешанный случай)

Заключение

В работе решена задача определения плотности и функции распределения времени нахождения и ожидания заявки в производственной системе в условиях многофазной системы обслуживания при экспоненциальном распределении времени обслуживания в каждом отдельном звене. Предложенная методика основана на интегральном методе нахождения неопределенных параметров. Актуальность разработанной методики заключается в едином подходе для расчета заданных характеристик сложных производственных систем с одинаковыми, различными звеньями и для смешанных случаев. Полученные расчетные формулы применимы для анализа временных характеристик систем обслуживания, что позволяет находить не только плотность и функцию распределения в аналитическом виде, но и их числовые характеристики (математическое ожидание, дисперсию, коэффициент вариации и др.). Указанные результаты могут быть использованы при определении средних значений временных характеристик для реальных производственных процессов, в частности, полное время прохождения заявки в системе определяет время производственного цикла, суммарное время ожидания определяет время пролеживания детали перед обработкой. Для систем связи полное и среднее время пребывания заявки в системе определяет среднее время передачи запроса от начального пункта к адресату.

Литература

1. *Артюх Р. В. Математическое моделирование многофазных материальных потоков внутрипроизводственной логистики [Текст] / Р. В. Артюх, Д. Э. Лысенко // Системи обробки інформації. – 2013. – Вип. 2. – С. 271-274*
2. *Teimoury E. An integrated queuing model for site selection and inventory storage planning of a distribution center with customer loss consideration [Text] / E. Teimoury, I. G. Khondabi, M. Fathi // International jpurnal of industrial engineering and production research. – 2011. – № 3. – P. 151-158.*
3. *Попов, В. О. Імовірнісні моделі промислової логістики [Текст] : навч.посібник / В. О. Попов. – Харків : Нац. аерокосм. ун-т «Харк. авіац. ін-т», 2006. – 190 с.*
4. *Саати, Т. Л. Элементы теории массового обслуживания и ее применение [Текст] / Т. Л. Саати. – М. : Сов. Радио, 1971. – 520 с.*
5. *Клейнрок, Л. Теория массового обслуживания [Текст] / Л. Клейнрок. – М. : Машиностроение, 1979. – 432 с.*
6. *Кофман, А. Массовое обслуживание. Теория и приложения [Текст] / А. Кофман, Р. Крюок. – М. : Мир, 1965. – 446 с.*
7. *Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров [Текст] / Г. Корн, Т. Корн. – М. : Наука, 1968. – 720 с.*
8. *Бронштейн, И. Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗов [Текст] / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. – М. : Наука, 1986. – 544 с.*

Поступила в редакцию 4.11.2014, рассмотрена на редколлегии 18.11.2014

Рецензент: д-р техн. наук, проф., профессор кафедры инженерии программного обеспечения И. В. Шостак, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Харьков.

БАГАТОФАЗНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СКЛАДНИХ РОЗПОДІЛЕНИХ ЛОГІСТИЧНИХ СИСТЕМ

Н. В. Єременко

Пропонується представити складні розподілені логістичні системи у вигляді багатофазних систем з експоненціальними ланками. Шляхом аналізу аналітичних виразів перетворень Лапласа для різних видів ланок отримані розрахункові формули для щільності і функції розподілу часу перебування і часу очікування в логістичній системі, і побудовані їх графічні залежності. Запропонована методика заснована на інтегральному методі знаходження невизначених параметрів. Отримані розрахункові формули можуть бути використані для аналізу часових характеристик складних логістичних систем за допомогою систем масового обслуговування з однаковими і різними ланками, що дозволяє знаходити не тільки щільність і функцію розподілу в аналітичному вигляді, але і їх числові характеристики.

Ключові слова: складна логістична виробнича система, система масового обслуговування, зворотне перетворення Лапласа, функція і щільність розподілу часу перебування і часу очікування в системі, метод перевірок, метод невизначених коефіцієнтів.

MULTIPHASE SIMULATION OF COMPLEX DISTRIBUTED LOGISTICS SYSTEMS

N. V. Eremenko

Complex distributed logistic systems in the form of multi-phase systems with exponential links are provided. By analyzing the analytical expressions of Laplace transforms for different types of links the formulas of density and distribution function of residence time and the waiting time in the logistic system are obtained and their graphic dependence are constructed. The offered technique is based on an integrated method of an uncertain parameters determination. The resulting calculation formulas can be used to analyze the temporal characteristics of complex logistics systems using service systems of a queuing, both with identical, and with various links, that allows to find not only denseness and cumulative distribution function in an analytical kind, but also their numerical characteristics.

Key words: complex logistic manufacturing system, system of a queuing, reconversion of the Laplace, function both density function of a response time and waiting time in a system, method of checks, method of undetermined coefficients.

Еременко Наталья Валентиновна – младший научный сотрудник кафедры информационных управляющих систем, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт», Харьков, Украина, e-mail: khai302@ukr.net.