УДК 681.5.004.3

С. В. БУРМИСТРОВ

Черкасский государственный технологический университет, Черкасский государственный бизнес-колледж, Украина

РЕАЛИЗАЦИЯ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ АПРИОРНОГО ВЫБОРА ИХ АРГУМЕНТОВ ПРИ СОЗДАНИИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПОДИНТЕРВАЛОВ

Проведен анализ особенностей метода реализации булевых функций с помощью ортогональных подинтервалов (q-функций) и предложен его модифицированный вариант для минимизации булевых функций с помощью априорного выбора аргументов в Ф-преобразованиях. В его основе лежит предварительный априорный выбор последовательности аргументов булевых функций в Ф-преобразованиях универсального базиса, с помощью которого выражают булеву функцию в виде знакопеременного числового ряда с расширенным базисом. Применение данного метода позволяет еще более оптимизировать суммарные показатели сложности реализации комбинационных схем цифровых блоков, в основе которых лежат булевы функции. Использование метода целесообразно на этапе логического проектирования булевых функций.

Ключевые слова: *булевы функции, метод ортогональных подинтервалов, расширенная система q-функций, априорный выбор аргументов при создании ортогональных подинтервалов.*

Введение

Класс ортофункциональных Ф-преобразований известен с XIX века, начиная с работ Фурье [1], и является частным случаем более общего класса функциональных преобразований (ФП).

В ФП математические объекты различной природы (для определенности назовем их – оригиналы) преобразуются частным образом, чтобы обеспечить ту или иную выгоду при дальнейшей работе с преобразованными оригиналами. Такое преобразование далее будем наименовать прямым, а результат преобразования – изображением.

Известными примерами ФП, которые существенно повлияли на развитие точных наук, являются:

– известный из элементарной математики метод подстановки;

– из вычислительной математики – использование логарифмов, которое позволило заменить многоразрядное умножение/деление чисел более простым сложением, вычитанием логарифмов;

– из теории электрических цепей – символический (комплексный) метод, который обеспечил алгебризацию систем интегрально-диференциальных уравнений описания электрических цепей в соответствии, например, с законами Кирхгофа и ряд других.

Ортофункциональные преобразования (ОФП) в работах Фурье [1] представляли собой математическое описание поперечных колебаний упругой струны в виде гармонического ряда, который в настоящее время именуется чаще всего как ряд Фурье:

$$\begin{aligned} y(x) &= A_0 + A_{1S}\sin\omega x + A_{1C}\cos\omega x + \\ &A_{2S}\sin 2\omega x + A_{2C}\cos 2\omega x + \ldots = A_0 + \\ &+A_{1m}\sin(\omega x + \varphi_1) + A_{2m}\sin(2\omega x + \varphi_2) + \\ &+A_{3m}\sin(3\omega x + \varphi_3) + \ldots, \end{aligned} \tag{1}$$

где y(x) – отклонение струны от положения равновесия; ω – базовая частота гармоник, φ – начальный сдвиг по фазе гармоники.

Общим признаком ОФП является переход от оригинала к изображению в виде ортогонального ряда. В частности, для оригинала в виде функции одного аргумента $y(x)$:

$$y(x) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \varphi_i(x), \tag{2}$$

где $\varphi_i(x)$ – ортогональные функции системы $\{\varphi(x)\}$, являющиеся компонентами ряда; C_i – весовые коэффициенты разложения в ряд по функциям системы $\{\varphi(x)\}$.

Работами большого числа математиков (Эрмит, Лагерр, Лехандр, Чебышев, Уолш, Хаар и др.) был существенно расширен класс ортогональных систем $\{y(x)\}$, причем этот класс преобразований сами авторы именовали как обобщение преобразования Фурье. Общим признаком для этого класса ОФП является правило вычисления коэффициентов разложения в ряд (2), согласно которому близость между оригиналом и изображением оценивается величиной квадратной погрешности

$$\int_0^T [y(x) - \sum_{i=0}^{\infty} C_i \varphi_i(x)]^2_{dx} \to \min . \qquad (3)$$

Указанная близость между оригиналом и изображением в ряде (2) принято именовать близостью в метрике пространства в канонической метрике L^2 – пространства функций с интегрируемым квадратом.

Дальнейшим этапом работ в ОФП стало введение ОФП с неканонической метрикой [2], для которых правила определения коэффициентов C_i ряда (2) уже не определяются из соображений минимизации квадратической погрешности, а диктуются другими соображениями.

В [2] приведен ряд и виды разработанных ОФП с неканонической метрикой, например, 3К-преобразование, в котором функции-оригиналы трех пространственных координат и времени $u(x, y, z, t)$ для рабочих областей (3) после дискретизации рабочей области по пространству и времени представляются в виде ряда:

$$u(x, y, z, t) \approx \sum_{\substack{i=0\\ j=0\\ k=0\\ l=0}}^{\infty} u(i, j, k, l)\varphi(i, j, k, l) , \qquad (4)$$

где ≈ – знак соответствия оригинала и k-изображения; $u(i, j, k, l)$ – отсчеты функции-оригинала в узлах решетки РО; $\varphi(i, j, k, l)$ – ортогональные функции, упорядоченные в системе $\{ \varphi_{i,j,k,l}(t) \}$

Постановка задачи исследования

Целью данного исследования является применение ортофункциональных Ф-преобразований к проблеме минимизации булевых функций (БФ), дальнейшая разработка, реализация и усовершенствование метода реализации БФ путем увеличения количества и определения оптимального размера подинтервалов КП_БФ, что позволит уменьшить величины показателей структурной сложности реализации БФ.

В данной работе используется, так называемое, Ф-преобразование, в котором оригиналами являются булевы функции от n аргументов $f(x_1, x_2,..., x_n)$. Оригиналы представляются в виде кусочно-постоянных функций (КПФ) одного аргумента X с единичными по длине интервалами постоянства, определенными на общем интервале $[0, 2^n-1]$. Номер единичного интервала совпадает с номером строки таблицы истинности (ТИ) БФ, на основании которой и задается оригинал. Значения КПФ на указанных интервалах соответствуют значениям оригинала в ТИ БФ.

В [3] разработаны правила перехода от БФ к КПФ, введена ортогональная система {q(X)}, так называемый q-базис, а также показано, что система {q(X)} состоит из 2^n компонентов, а ряд (5) также содержит не более 2^n членов ряда с единичными весовыми коэффициентами C_i :

$$f(x_1, x_2,..., x_n) \approx \sum_{i=1}^{2^n-1} q_{in}(X) , \qquad (5)$$

где n – количество аргументов, X – непрерывный аргумент на интервале $[0, 2^n-1]$

Пусть задана некоторая БФ от 3 аргументов в виде ТИ (табл. 1):

Таблица 1

Таблица истинности БФ-оригинала

№ строки	Аргумент			Функция
	x_3	x_2	x_1	y
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	1
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	0
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

На рис. 1 в качестве примера для указанной БФ задано соответствующее ей Ф-изображение – график БФ в виде КПФ:

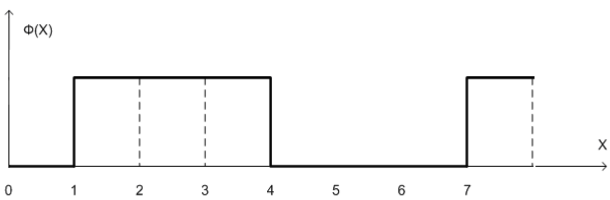

Рис. 1. Пример БФ с n=3 и соответствующая ей кусочно-постоянная функция Ф(X)

В [3] показано, что число членов ряда (5) равно числу единиц БФ в ТИ, а Q-базис имеет ряд преимуществ по сравнению с другими ортобазисами, имеющими также 2^n единичных интервалов (Уолша, Хаара).

На рис. 2 показаны базисные q-функции 3–го порядка – q-функции БФ от 3 аргументов (q-базис

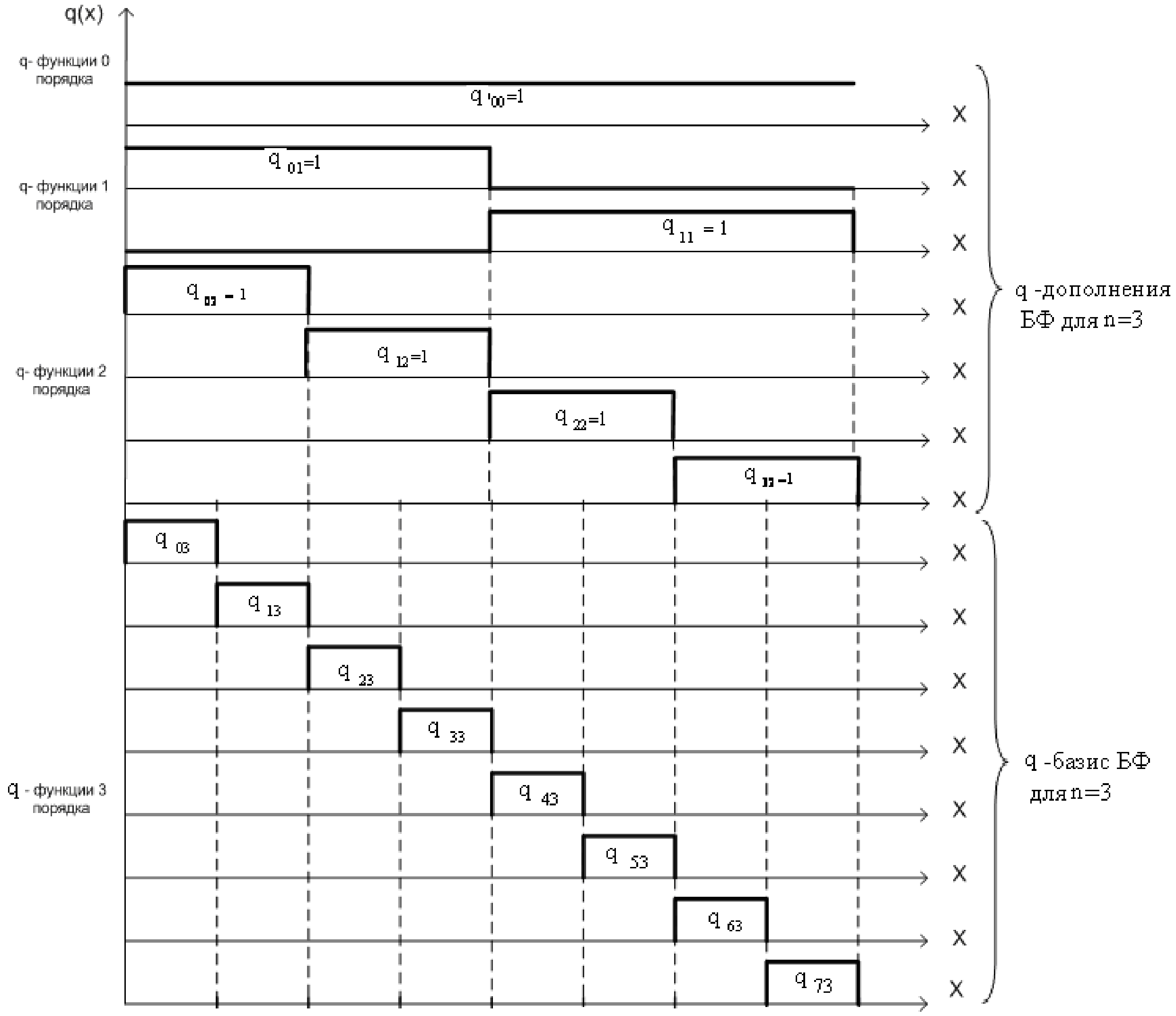

Рис. 2. Расширенная система q-функций n=3

БФ для n=3). Для достижения большего уровня минимизации целесообразно расширить указанный базис, состоящей из 2^n q-функций n-го порядка, другими q-функциями, в частности, 2^{n-1} q-функций n-1-го порядка, 2^{n-2} q-функций n-2-го порядка, и т.д. (q-дополнение БФ для n=3)

Минимизация БФ на основе канонического Ф-преобразования в [4] основана на возможности замены системы q-функций n-ого порядка {q(i,n)} q-функциями меньшего порядка в случае, если на графике на указанном интервале булева функция является монотонной функцией подряд на нескольких отдельных указанных участках.

В результате возникает возможность объединения нескольких подинтервалов из числа q-функций n-ого порядка {q(i,n)} в один с меньшим порядком, что, в свою очередь, улучшает показатели сложности реализации цифровых блоков, построенных на ее основе. В этом случае при представлении системы q-функций для БФ от n аргументов (см. рис.2) q-базис БФ был дополнен дополнительными множествами, которые являются объединением подинтервалов n-ого порядка, множествами n-1-ого, n-2-ого, n-3-ого, …, 0-ого порядков.

В основе минимизации БФ лежит метод, основанный на поиске на графике одинаковых монотонных участков КПФ.

Метод минимизации БФ на основе канонического Ф-преобразования

Минимизация БФ на основе канонического Ф-преобразования [4] состоит из следующих этапов:

1. Задать БФ в виде кусочно-постоянной функции Ф(X) от n аргументов.

2. Проверить, являются ли q-дополнение 0-вого порядка частью решения БФ (q-функция 0-вого порядка равна единице).

3. Если условие 2 не выполнено, проверить, являются ли q-дополнения 0-вого порядка в сово-

купности с частью q-дополнений меньшего порядка частью решения БФ (q-функция 0-вого порядка в бинарном векторе имеет больше половины единиц)

4. В случае выполнения условия 2 или 3 записать часть результата в ответ.

5. Для оставшейся части кусочно-постоянной функции Ф(X) выполнить действия, аналогичные пунктам 2, 3,4 по поиску q-дополнений 1-вого, 2-го, …, n-го порядка,

6. Процесс формирования решения БФ на основе расширенных функций продолжать до тех пор, пока существуют подинтервалы, для которых не найдены q-дополнения КПФ.

Суть метода и алгоритм минимизации целесообразно объяснить на примере БФ, заданной ТИ (смотри табл. 1):

1. Процесс поиска решений нужно начинать с q-дополнений высших порядков. q-дополнение 0-вого порядка q_{00} не является частью решения БФ, так как на его промежутке q-базисы q_{i3} (i=0..7) не все равны единице. Также q_{00} в совокупности с частью q-дополнений меньшего порядка не являются частью решения БФ, так как на его промежутке количество q-базисов q_{i3} (i=0..7), которые не равны единице, не меньше, чем половина.

2. На следующем этапе минимизации нужно рассмотреть q-дополнения 1-го порядка. q-дополнение q_{01} не является частью решения БФ, так как на его промежутке q-базисы q_{i3} (i=0..7) не все равны единице. Но q_{01} в совокупности с q_{03} – q-дополнением 3 порядка является частью решения БФ, так как на промежутке q_{01} из четырех q-базисов только один q-базис не равен единице. В результате получена часть решения:

$$f(x_1,x_2,x_3) \approx q_{00} - q_{03} + \dots ,$$

$$f(x_1,x_2,x_3) \approx x_3 - \bar{x}_3 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_1 + \dots .$$

3. q-дополнение q_{11} само не является частью решения БФ, а также в совокупности с q-дополнениями меньших порядков, так как на его промежутке только один q-базис из четырех равен единице.

4. На следующем этапе минимизации на оставшемся промежутке КПФ нужно рассмотреть q-дополнения 2-го порядка. q_{22} и q_{32} не являются частью решения БФ.

5. На конечном этапе минимизации на оставшемся промежутке КПФ нужно рассмотреть q-дополнения 3-го порядка. Из всех дополнений только q_{73} равно единице и является частью решения БФ. Поэтому конечный результат имеет форму:

$$f(x_1,x_2,x_3) \approx q_{00} - q_{03} + q_{73},$$

$$f(x_1,x_2,x_3) \approx x_3 - \bar{x}_3 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_1 + x_3 \wedge x_2 \wedge x_1.$$

В результате минимизации КПФ на основе канонического Ф-преобразования получена арифметическая форма представления БФ в виде знакопеременного ряда, что существенно, все коэффициенты возле конъюнктивных наборов аргументов равны или нулю или единице.

Количественные показатели перспективности представления БФ в виде канонического и расширенного Ф-преобразования на основании результатов, полученных с помощью технологии EDM (Extended Data Mining) [2], иными словами, с помощью вычислительных экспериментов по определению суммарных показателей сложности реализации S_l и S_{ad} для полных множеств L(3) и L(4) представлены в табл. 2.

Модифицированный метод минимизации БФ на основе канонического Ф-преобразования

Исследования минимизации КПФ на основе канонического Ф-преобразования показали один существенный недостаток данного метода минимизации и необходимость его оптимизации.

Проблема минимизация КПФ связана с тем, что при создании q-дополнений важную роль играет последовательность записи аргументов в БФ, хотя, с другой стороны, все аргументы БФ являются абсолютно равноправными.

Таблица 2

Сравнения суммарных показателей S_l и S_{ad} для полных множеств L(3) и L(4) в виде канонического расширенного Ф-преобразования

Множества	Количество БФ	Суммарные показатели S_l		Суммарные показатели S_{ad}		Уплотнение S_l ряда 5 в %	Уплотнение S_{ad} ряда 5 в %
		в виде обычного ряда	в виде ряда (5)	в виде обычного ряда	в виде ряда (5)		
L(3)	256	2430	1566	1016	734	64,44	72,24
L(4)	65 536	2097088	1221118	524272	351742	58,23	67,09

Фактически q-дополнениями 0-го порядка являются аргументы БФ или их инверсии, q-дополнениями 1-го порядка – сдвоенные конъюнкции аргументов или их инверсий, 2-го порядка – строенные конъюнкции и т.д. Если использовать модель КПФ, предложенную на рис. 1, то видна количественная разница между числом q-дополнений, используемым КПФ и количеством конъюнктивных наборов, которые им могут соответствовать (смотри табл. 3)

Таблица 3

Соотношение количества q-дополнений БФ от 3 аргументов i-го порядка к их максимально возможному количеству

№ пп	Вид q-дополнения	Количество конъюнкций в КПФ	Максимально возможное количество конъюнкций
1	q-функция 1-го порядка	2	6
2	q- функция 2-го порядка	4	12
3	q- функция 3-го порядка	8	8

Данное соотношение показывает, что представление БФ в КПФ на основе канонического Ф-преобразования, предложенного в [4], является неполным, а само каноническое Ф-преобразование нуждается в формальной модификации.

Суть модификации состоит в учете равноправности аргументов, из которых состоит БФ, при построении КПФ. А в процессе минимизации БФ модификация метода состоит в априорном выборе из всех возможных вариантов q-дополнений варианта, при котором суммарные показатели сложности реализации цифровых блоков будут минимальными.

Для примера можно привести БФ, заданную таблицей истинности (смотри табл. 4), которая не подлежит минимизации в КПФ на основе канонического Ф-преобразования, предложенного в [4]:

Таблица 4

Таблица истинности БФ-оригинала

№ строки	Аргумент x_3	Аргумент x_2	Аргумент x_1	Функция y
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

Указанная БФ (рис. 3) не имеет двух соседних монотонных участков

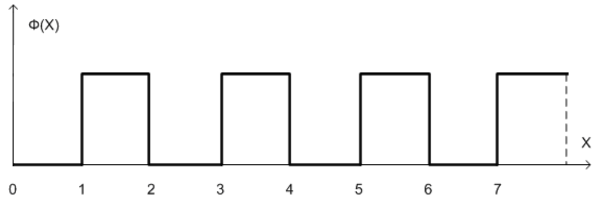

Рис. 3. Пример БФ с n=3 и соответствующая ей кусочно-постоянная функция Ф(X)

В случае введения понятия формальной КПФ – такой функции, в которой не учитывается последовательность аргументов при построении функции, другими словами, все аргументы являются равноправными, указанная функция имеет участок – q-функция 1-го порядка x_1, на котором 4 q-функции 3-го порядка находятся рядом. Нужно уточнить, что в этом случае график формальной КПФ является не линией, а некоторой поверхностью, где 4 q-функции 3-го порядка, значения которых равны единице, стоят рядом (рис. 4).

Значение каждой q-функции 3-го порядка зависит одновременно от трьох аргументов БФ и может быть равно или нулю или единице. Поэтому каждая q-функция расположена на указанном графике так, что она имеет одновременно 3 соседних q-функции со схожими характеристиками.

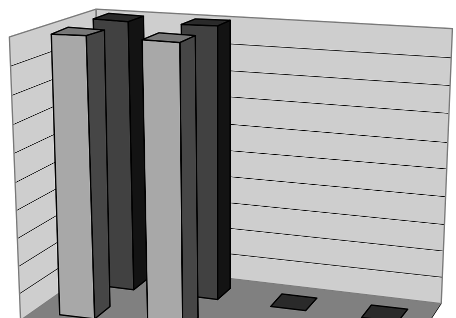

Рис. 4. Ориентировочное изображение графика формальной КПФ для БФ с n=3 в случае равноправности аргументов БФ

Формальное построение КПФ в случае равноправности аргументов дает возможность использовать алгоритм, предложенный в [4]. Но, в отличие от классической КПФ, модифицированная формальная КПФ имеет большее число q-дополнений высших порядков, и, как следствие, лучшие показатели сложности реализации цифровых блоков, построенных на ее основе.

Количественные показатели перспективности представления БФ в модифицированном виде канонического и расширенного Ф-преобразования на основании результатов, полученных с помощью вычислительных экспериментов по определению суммарных показателей сложности реализации S_l и S_{ad} для полных множеств L(3) и L(4) представлены в табл. 5.

Количественное сравнение результатов табл. 2 (канонического расширенного Ф-преобразования) и табл. 5 (модифицированного канонического расширенного Ф-преобразования) указывает на то, что каноническое расширенное Ф-преобразование являлось существенным промежуточным этапом в создании формальных кусочно-постоянных функций.

Заключение

В данной статье предложен модифицированный метод реализации булевых функций на этапе логического проектирования с помощью ортогональных подинтервалов – один из вариантов алгебраической формы представления булевых функций. Существенно заметить, что коэффициентами ряда являются только цифры «0» и «1», что важно с точки зрения бинарной логики.

Для представления БФ в работе введена расширенная система q-функций, которая соответствует полному множеству конъюнктивных наборов аргументов булевых функций, что позволяет представлять заданную БФ в виде расширенного знакопеременного ряда с меньшими показателями структурной сложности реализации БФ

Результаты исследования, полученные с помощью технологии EDM, демонстрируют существенную экономию наиболее значимых для разработчиков интегральных микросхем параметров булевых функций. Так, для полных множеств L(3) и L(4) БФ уплотнение по коэффициентам сложности реализации по количеству слагаемых S_{ad} и по количеству литерал в записи булевых функций S_l составляет в среднем 1,7-1,8 раза по сравнению с классическим методом.

С увеличением в БФ числа аргументов показатели сложности реализации в данной форме представления оптимизируются, что в свою очередь делает перспективным их дальнейшее исследование.

Литература

1. *Эдвардс, Р. Э. Ряды Фурье в современном изложении [Текст]: перевод с англ. / Р. Э. Эдвардс. – М.: «Мир», 1985. – 260 с.*
2. *Кочкарев, Ю. А. Ортогональные сигналы в вычислительной технике [Текст] / Ю. А. Кочкарев; Таганрог. радиотехн. ин-т. - Ростов н/Д : Изд-во Рост. ун-та, 1980. - 191 с.*
3. *Кочкарев, Ю. А. Исследование структуры полного множества логических функций на основе технологии EDM [Текст] / Ю. А. Кочкарев, В. В. Бузько, Н. С. Кучерова // Вісник Черкаського державного технологічного університету. – 2007. – № 1 – 2. – С. 60 – 65.*
4. *Кочкарев, Ю. А. Метод реализации булевых функций с помощью ортогональных подинтервалов [Текст] / Ю. А. Кочкарев, С. В. Бурмистров, Е. Н. Панаско // Вісник Черкаського державного технологічного університету. – 2013. – № 2. – С. 33-39.*

Таблица 5

Сравнения суммарных показателей S_l и S_{ad} для полных множеств L(3) и L(4) в модифицированном виде канонического расширенного Ф-преобразования

Множества	Количество БФ	Суммарные показатели S_l		Суммарные показатели S_{ad}		Уплотнение S_l ряда 5 в %	Уплотнение S_{ad} ряда 5 в %
		в виде обычного ряда	в виде модифицированного ряда	в виде обычного ряда	в виде модифицированного ряда		
L(3)	256	2430	934	1016	422	38	42
L(4)	65 536	2097088	658128	524272	187824	31	36

Поступила в редакцию 6.12.2013, рассмотрена на редколлегии 11.12.2013

Рецензент: д-р техн. наук, проф., проф. каф. системного программирования М. В. Рудницкий, Черкасский государственный технологический университет, Черкассы, Украина.

РЕАЛІЗАЦІЯ БУЛЕВИХ ФУНКЦІЙ ЗА ДОПОМОГОЮ АПРІОРНОГО ВИБОРУ ЇХ АРГУМЕНТІВ ПРИ СТВОРЕННІ ОРТОГОНАЛЬНИХ ПІДІНТЕРВАЛІВ

С. В. Бурмістров

Проведено аналіз особливостей методу реалізації булевих функцій за допомогою ортогональних підінтервалів (q-функцій) і запропоновано його модифікований варіант для мінімізації булевих функцій за допомогою апріорного вибору аргументів в Ф-перетвореннях. В його основі лежить попередній апріорний вибір послідовності аргументів булевих функцій в Ф-перетвореннях універсального базису, за допомогою якого виражають булеву функцію у вигляді знакозмінного числового ряду з розширеним базисом. Застосування даного методу дозволяє ще більш оптимізувати сумарні показники складності реалізації комбінаційних схем цифрових блоків, в основі яких лежать булеві функції. Використання методу доцільно на етапі логічного проектування булевих функцій.

Ключові слова: булеві функції, метод ортогональних підінтервалів, розширена система q - функцій, апріорний вибір аргументів при створенні ортогональних підінтервалів.

REALIZATION OF BOOLEAN FUNCTIONS USING A PRIORI CHOICE ARGUMENT TO CREATE THEIR ORTHOGONAL SUBINTERVALS

S. V. Burmistrov

The analysis of the features of the method of realization of boolean functions using q-functions, and proposed a modified version for the minimization of boolean functions using a priori choice arguments in F-transformations. It is based on a preliminary selection of a priori arguments sequence of boolean functions in the F-transformation universal basis by which express the boolean function as a second alternating numerical series with extended basis. Application of this method allows to further optimize the overall performance of combinational circuits the complexity of digital blocks, the basis of which are boolean functions. Using expedient method for the logical design phase of boolean functions.

Key words: boolean functions, the method of orthogonal sub-intervals, extended system q-functions, a priori choice arguments when creating orthogonal q-functions.

Бурмістров Сергій Владиславович – аспірант кафедри інформатики та інформаційної безпеки Черкаського державного технологічного університету, викладач Черкаського державного бізнес-коледжу. м. Черкаси, e-mail: sergijburmistrov@yandex.ua.