УДК 519.85

О.С. ПІЧУГІНА, В.Г.ДЯЧЕНКО

Полтавський національний технічний університет ім. Ю. Кондратюка, Украина

ЗАДАЧА РОЗТАШУВАННЯ ПРЯМОКУТНИХ МОДУЛІВ НА ЧІПІ ТА ПОЛІЕДРАЛЬНИЙ ПІДХІД ДО ЇЇ РОЗВ'ЯЗАННЯ

Розглянуто задачу оптимального розміщення модулів на чіпі. Представлено її математичні моделі як частково бульової, неперервної та комбінаторної задач із кількома критеріями оптимізації. Дано огляд методів розв'язання задачі. Представлено програмну реалізацію методу комбінаторних відсікань розв'язання задачі розміщення модулів на чіпі як умовної лінійної комбінаторної задачі на поліророзміщеннях спеціального вигляду, який ґрунтується на досліджених поліедральних властивостях. Ефективність застосування лінійного критерію оптимізації продемонстровано на прикладах.

Ключові слова: *Модуль, чіп, розміщення, логічний ланцюг, опукла оптимізація, частково-бульова оптимізація, комбінаторна оптимізація, евклідова комбінаторна множина, полікомбінаторна множина, многогранник, поліедр, аналітичний опис многогранника.*

Вступ

Сьогодення, як ніколи раніше, вимагає оптимізації різноманітної техніки, як по потужності, і надійності, так і за розмірами і вагою. В основу абсолютної більшості технічних пристроїв закладено мікросхеми, які стають усе потужнішими і, в той же час, менші за розмірами. Тому доцільно розглянути питання побудови надійних чипів при мінімізації їх розмірів.

В останні роки було запропоновано ряд підходів для розв'язання задачі розміщення прямокутних модулів на чіпі: на основі пошукової адаптації [1, 2], лінійне і квадратичне програмування, імітація відпалу [3, 4], на основі методів еволюційного моделювання [5].

Мета роботи – побудова надійних чіпів із прямокутними модулями й мінімізації їх загальної площі чи оптимізації інших критеріїв.

Основна частина

У даній роботі розглядаються питання оптимізації мікросхем, особливу увагу приділено задачі розташування прямокутних модулів на чіпі, що формулюється як лінійна задача евклідової частково комбінаторної оптимізації [6]. Підхід, що при цьому використано, - математичне моделювання її як задачі евклідової комбінаторної оптимізації з подальшим використанням при розв'язанні комбінаторних та геометричних властивостей множин і многогранників.

<u>Постановка задачі.</u> На прямокутному чіпі довжини L і висоти H треба розташувати n модулів M_i з довжиною $l_i > 0$ і висотою $h_i > 0$ відповідно з метою оптимізації певного критерію, якщо відомо, що є можливість повертати модулі на 90^0 [7] з можливістю зберігання всіх параметрів, необхідних для виконання технічних функцій.

<u>Зауваження 1</u>. Нижче буде розглянуто 3 критерії оптимізації, що задаються лінійними і нелінійними функціями.

Розташуємо наш чіп у даній системі координат O_{xy} так, щоб лівий нижній кут був у точці (0,0), а правий верхній – у точці $A(L,H)$.

Уведемо змінні: (x_i, y_i) - координати лівого нижнього кута модуля M_i ($i \in J_n$, $J_n = \{1,\ldots,n\}$).

Для врахування можливості переорієнтації модулів уведемо величини l'_i, h'_i - реальні довжина і висота M_i відповідно ($i \in J_n$).

Очевидно, що l'_i, h'_i задовольняють умови:

$$l'_i \le \max(l_i, h_i),\ h'_i \le \max(l_i, h_i)\ \ (i \in J_n);$$

$$l'_i + h'_i \le l_i + h_i\ \ (i \in J_n). \qquad (1)$$

Уведемо в розгляд величини: (x'_i, y'_i) - координати правого верхнього кута модуля M_i, тоді: маємо $x'_i = x_i + l'_i$, $y'_i = y_i + h'_i$ ($i \in J_n$). (2)

Побудуємо математичну модель задачі.

Сформуємо обмеження:

1. на розташування модулів на чіпі:

$$x_i \ge 0, x'_i \le L,\ y_i \ge 0, y'_i \le H,\ i \in J_n; \qquad (3)$$

2. на неперетин модулів: перерахуємо 4 можливі варіанти розташування модулів M_i, M_j

а) зліва від M_j - $x'_i \le x_j$; (4.1)

б) справа від M_j - $x'_j \le x_i$; (4.2)

в) нижче за M_j - $y'_i \le y_j$; (4.3)

г) вище за M_j - $y'_j \le y_i$; ($i, j \in J_n$, $i < j$): (4.4)

Зауваження 2. Відзначимо, що щоб модулі не перетиналися, достатньо виконання хоч одного з обмежень (4.1)-(4.4) (далі (4)). Також максимальна кількість умов (4), що виконуються разом дві, адже (4.1) і (4.2) не можуть виконуватися одночасно, так само як (4.3), (4.4). Також зі змісту зрозуміло, з (4.1), (4.2) може одночасно виконуватися щонайбільше одна умова, так само і для (4.3), (4.4).

Для представлення умови неперетину введемо в розгляд 4 допоміжні бульові змінні z_{ij}^k ($k \in J_4$):

$$x'_i \le x_j + L\cdot(1 - z_{ij}^1)\ ;\ (5.1)\quad x'_j \le x_i + L\cdot(1 - z_{ij}^2)\ ; \quad (5.2)$$

$$y'_i \le y_j + H\cdot(1 - z_{ij}^3)\ ;\ (5.3)\quad y'_j \le y_i + H\cdot(1 - z_{ij}^4)\ ; \quad (5.4)$$

$$z_{ij}^k = \begin{cases} 1, \text{якщо (4.k) виконано} \\ 0, \text{якщо (4.k) не виконано} \end{cases},\ \underset{k \in J_4}{i, j \in J_n, i < j}. \quad (5.5)$$

Неважко побачити, що обмеження (4.k) і (5.k) еквівалентні $\forall k \in J_4$, але на відміну від (4), що можуть виконуватися в різних комбінаціях, (5.1)-(5.4) (далі система (5)) виконуються одночасно. Для відображення зауваження 2 введемо умову:

$$\sum_{k=1}^{4} z_{ij}^k \ge 1, \sum_{k=1}^{2} z_{ij}^k \le 1, \sum_{k=3}^{4} z_{ij}^k \le 1\ ,\ i, j \in J_n, i < j. \quad (6)$$

Встановимо зв'язок між початковими та остаточними розмірами модулів, що отримуються в результаті переорієнтації. Для цього введемо в розгляд допоміжні бульові змінні t_i:

$$t_i = \begin{cases} 1, \text{якщо } M_i \text{ не повертається} \\ 0, \text{якщо } M_i \text{ повертається на } 90^0 \end{cases},\ i \in J_n. \quad (7)$$

Тоді уточнені розміри прямокутників:

$$l'_i = l_i + h_i\cdot(1 - t_i)\ ;\ h'_i = h_i + l_i\cdot(1 - t_i)\ ,\ i \in J_n. \quad (8)$$

Із урахуванням (8) умова (2) набуває вигляду:

$$x'_i = x_i + l_i + h_i\cdot(1 - t_i)\ ,\ y'_i = y_i + h_i + l_i\cdot(1 - t_i)$$

або $x'_i = x_i + p_i - h_i\cdot t_i$, $y'_i = y_i + p_i - l_i\cdot t_i$, (9)

де $p_i = h_i + l_i$ - на півпериметр M_i ($i \in J_n$). (10)

Запишемо модель у початкових позначеннях та змінних x_i, y_i, t_i, z_{ij}^k ($i, j \in J_n, i < j$, $k \in J_4$):

А) обмеження (3) набувають вигляду:

$$\begin{aligned} & x_i \ge 0, y_i \ge 0, i \in J_n; \\ & x_i - h_i\cdot t_i \le L - p_i,\ y_i - l_i\cdot t_i \le H - p_i, i \in J_n. \end{aligned} \quad (11)$$

Б) обмеження (5) перетворюються на:

$$x_i - x_j - h_i\cdot t_i + L\cdot z_{ij}^1 \le L - p_i\ ; \quad (12.1)$$

$$x_j - x_i - h_j\cdot t_j + L\cdot z_{ij}^2 \le L - p_j\ ; \quad (12.2)$$

$$y_i - y_j - l_i\cdot t_i + H\cdot z_{ij}^3 \le H - p_i\ ; \quad (12.3)$$

$$y_j - y_i - l_j\cdot t_j + H\cdot z_{ij}^4 \le H - p_j\ ; i, j \in J_n, i < j \quad (12.4)$$

((12.1)-(12.4) далі іменуватимемо (12));

В) умови бульовості змінних (5.5),(7):

$$t_i, z_{ij}^k \in \{0,1\},\ i, j \in J_n, i \le j,\ k \in J_4. \quad (13)$$

Якщо ввести позначення для напівпериметрів:

$$L_i^{'} = L - p_i,\ H_i^{'} = H - p_i, i \in J_n\ , \quad (14)$$

увести в розгляд вектори параметрів

$$\overline{L}' = \left(L_i^{'}\right)_{i \in J_n}, \overline{H}' = \left(H_i^{'}\right)_{i \in J_n} \quad (15)$$

та вектори змінних $x = (x_i)_{i \in J_n}, y = (y_i)_{i \in J_n}$, (16)

модель (6),(11-13) перепишеться наступним чином: знайти $x, y \ge 0$, $t_i, z_{ij}^k, i, j \in J_n, i < j,\ k \in J_4$:

$$x_i - h_i\cdot t_i \le \overline{L}_i^{'}, y_i - l_i\cdot t_i \le \overline{H}_i^{'}, i \in J_n; \quad (17)$$

$$x_i - x_j - h_i\cdot t_i + L\cdot z_{ij}^1 \le L_i^{'},\ x_j - x_i - h_j\cdot t_j + L\cdot z_{ij}^2 \le L_j^{'};$$

$$y_i - y_j - l_i\cdot t_i + H\cdot z_{ij}^3 \le H_i^{'},\ y_j - y_i - l_j\cdot t_j + H\cdot z_{ij}^4 \le H_j^{'},$$

$$i, j \in J_n, i < j; \quad (18)$$

$$t_i, z_{ij}^k \in \{0,1\}\ ; \quad (19)$$

$$\sum_{k=1}^{4} z_{ij}^k \ge 1\ ; \quad (20)$$

$$\sum_{k=1}^{2} z_{ij}^k \le 1, \sum_{k=3}^{4} z_{ij}^k \le 1, i, j \in J_n, i < j. \quad (21)$$

Представимо три критерії оптимізації:

А. **Критерій 1.** Мінімізувати вартість з'єднань модулів (логічних елементів) на чіпі, якщо деякі чіпи з'єднуються доріжками (сигнальними ланцюгами, СЛ), що можуть прокладатися вздовж чи поперек чіпа, і відома вартість прокладання одиниці СЛ між парами модулів.

Б. **Критерій 2.** Мінімізувати напівпериметр прямокутників, що обмежують СЛ [7].

В. **Критерій 3.** Розташувати модулі якнайсистематизованіше, інакше кажучи, мінімізувати міру хаотичності розміщення модулів.

Сформуємо цільові функції для цих критеріїв:

1. Нехай c_{ij} - вартість прокладання 1-ці СЛ між M_i та M_j ($i,j \in J_n$), тоді $C=(c_{ij})_{i,j\in J_n}$ - верхньотрикутна матриця вартостей з'єднань ($c_{ij}=0,\ i \geq j,\ i,j \in J_n$).

Нехай місця з'єднань знаходяться у лівому нижньому куті модуля, тобто для пари M_i, M_j r_{ij} - довжина СЛ між (x_i, y_i) та (x_j, y_j) з горизонтальних та вертикальних ланок.

$$r_{ij} = |x_i, x_j| + |y_i, y_j| = |x_i - x_j| + |y_i - y_j| \ (i<j,\ i,j \in J_n). \quad (22)$$

Тоді $R=(r_{ij})_{i,j\in J_n}$ - симетрична матриця довжин СЛ.

Цільова функція для критерію 1, матиме вигляд:

$$z^1 = \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} r_{ij} = \sum_{i,j=1;i<j}^{n} c_{ij} r_{ij} \to \min \quad (23)$$

або, із врахуванням (22),

$$z^1 = \sum_{i,j=1;i<j}^{n} c_{ij}\left(|x_i - x_j| + |y_i - y_j|\right) \to \min \quad (24)$$

<u>Зауваження 3.</u> Якщо місця з'єднань знаходяться в іншому місці модуля, маємо:

$$z'^1 = \sum_{i,j=1,i<j}^{n} c_{ij}\left(\left|x_i - x_j + \Delta_{ij}^x\right| + \left|y_i - y_j + \Delta_{ij}^x\right|\right) \to \min \quad (25)$$

$$\Delta_{ij}^x = \delta_i^x - \delta_j^x, \qquad \Delta_{ij}^y = \delta_i^y - \delta_j^y \qquad (i,j \in J_n),$$

$\delta_i^x \in [0, l_i']$, $\delta_i^y \in [0, h_i']$ - здвиги місця з'єднання від (x_i, y_i) по горизонталі і вертикалі відповідно ($i \in J_n$).

2. Нехай усю множину модулів розбито на $L \geq 1$ груп ($\Gamma_l, l \in J_L$), які бажано розташовувати максимально концентровано по кожній групі.

Отже, множину J_n розбито на підгрупи: $J_n = \bigcup_{l=1}^{L} I_L$. За міру концентрації: а) модулів групи Γ_l можна взяти напівпериметр P_l мінімального прямокутника, що містить їх всі ($l \in J_L$); б) усіх модулів – напівпериметр усіх таких прямокутників.

$$P_l = \left(\max_{i\in I_l} x_i' - \min_{i\in I_l} x_i\right) + \left(\max_{i\in I_l} y_i' - \min_{i\in I_l} y_i\right), l \in J_L; \quad (26)$$

У цих позначеннях і із урахуванням (9),(26) критерій 2 мінімізації напівпериметра обмежуючих усі СЛ прямокутників виражається так:

$$z^2 = \sum_{l=1}^{L} P_l = \sum_{l=1}^{L} (\max_{i\in I_l}(x_i + p_i - h_i \cdot t_i) - \min_{i\in I_l} x_i +$$

$$+ \max_{i\in I_l}(y_i + p_i - l_i \cdot t_i) - \min_{i\in I_l} y_i) \to \min. \quad (27)$$

<u>Зауваження 4.</u> Як видно, перші 2 цільові функції нелінійні опуклі, система обмежень задач оптимізації (17-21), (24) (далі задача 1) та (17-21), (27) (далі задача 2) лінійна, отже, задачі 1 і 2 відносяться до умовних частково бульових задач опуклої оптимізації, які є достатньо складними в реалізації [7, 12].

3. Слід відзначити, що критерії 1, 2 виражають певну мету максимізації систематизації розташування модулів на чіпі, інакше кажучи, зменшення міри їх хаотичності.

Спробуємо обрати міру хаотичності, що виражається лінійною функцією, і, ймовірно, дозволить спростити програму реалізацію. Будемо вважати, що модулі на чіпі розташовані систематизовано, якщо для кожного з них якнайменше модулів знаходиться по діагоналі, наприклад, лівіше і вище. Цієї мети ми досягнемо, якщо модулі розташовуватимемо в умовних горизонтальних (ГС) і вертикальних смугах (ВС). ГС містить лише модулі, що лежать лівіше або правіше один від одного, так само ВС містить лише ті, що лежать вище або нижче один від одного. Таким чином, критерій 3 виражається функцією:

$$z^3 = \sum_{i,j=1,i<j}^{n} u_{ij} \to \min, \quad (28)$$

де $u_{ij} = \begin{cases} 1, \text{якщо } M_i \text{ по діагоналі від } M_j; \\ 0, \text{ інакше} \quad (i<j,\ i,j \in J_n). \end{cases}$

Ураховуючи, що взаєморозташування пари модулів M_i, M_j задається змінними z_{ij}^k ($k \in J_4$) (див. (5.5)), що задовольняють (6), маємо:

$$u_{ij} = \sum_{k=1}^{4} z_{ij}^k - 1, u_{ij} \in \{0,1\},$$

а функція (20) набуває вигляду:

$$z^3 = \sum_{\substack{i,j=1\\i<j}}^{n}\left(\sum_{k=1}^{4} z_{ij}^k - 1\right) = \sum_{\substack{i,j=1\\i<j}}^{n}\sum_{k=1}^{4} z_{ij}^k - C_n^2 \to \min. \quad (29)$$

Отже, замість (29) в якості цільової функції можна обрати $\quad z'^3 = \sum_{i,j=1,i<j}^{n}\sum_{k=1}^{4} z_{ij}^k \to \min, \quad (30)$

Задача (17-21),(30) (далі задача 3) є лінійною умовною частково бульовою задачею опуклої оптимізації, до розв'язання якої можна застосувати, наприклад, методи відсікань або гілок та меж [7, 8].

Слід відзначити, що задачі 1-3 можуть бути переформульовані в неперервні задачі опуклого програмування з квадратичними обмеженнями, для чого умову, (19) представляють у вигляді [7, 9]:

$$t_i = t_i^2, z_{ij}^k = \left(z_{ij}^k\right)^2,\ t_i, z_{ij}^k \in R, i,j \in J_n,\ i < j,\ k \in J_4 \quad (31)$$

з подальшим застосуванням опуклого аналізу [9].

Також дана задача може бути сформульована в термінах евклідової комбінаторної оптимізації як умовна лінійна задача на полірозміщеннях та розміщеннях із повтореннями з 0 і 1. Така постановка дозволяє розв'язувати задачу методом комбінаторних відсікань [10], що враховує геометричну структуру множини та відповідного многогранника [6].

Отже, введемо в розгляд вектори

$$\begin{gathered} T = (t_i)_{i \in J_n},\ Z_{ij} = \left(z_{ij}^k\right)_{k \in J_4} = (Z'_{ij}, Z''_{ij}), \\ Z'_{ij} = \left(z_{ij}^1, z_{ij}^2\right), Z''_{ij} = \left(z_{ij}^3, z_{ij}^4\right), i < j,\ i,j \in J_n. \end{gathered} \quad (32)$$

У цих позначеннях вектор T буде n-розміщенням з повтореннями з 0,1, тобто елементом множини B_n [11,13], вектори Z_{ij} - розміщеннями з повтореннями з 0,1 ($Z_{ij} \in B_4$, $i < j$, $i,j \in J_n$), але, з врахуванням (6), проведемо уточнення:

$$\begin{gathered} T \in B_n; Z_{ij} \in A_{ms}^4(G), G = \{0,0,0,1,1\} = \{0^3, 1^2\}, \\ m = |G| = 5, s = |S(G)| = 2; Z'_{ij}, Z''_{ij} \in A_{m's'}^2(G'), \\ G' = \{0,0,1\} = \{0^2, 1^1\}, m' = |G'| = 3, s' = |S(G')| = 2. \end{gathered} \quad (33)$$

Отже, Z_{ij} - елемент загальної множини розміщень [6], $Z = \left(Z_{ij}\right)_{i,j \in J_n, i<j}$ можна розглядати як полірозміщення, в якому виділено:

а) або $N = C_n^2$ підгруп змінних, в кожній з яких $K = 4$ елементи, що задовольняють (20)

б) або $2N$ підгруп змінних, в кожній з яких $K/2 = 2$ елементи, що задовольняють (21).

Уведемо в розгляд підмножину загальної множини розміщень $A_{52}^4(G)$, сума двох перших та сума останніх двох координат елементів якої не перевищує 1. Уведемо позначення для неї та відповідного многогранника $A'^4_{52}(G)$, $\Pi'^4_{52}(G)$.

$$\begin{gathered} A'^4_{52}(G) = \{e_i\}_{i \in J_8} = \{(0,0,0,1), (0,0,1,0), (0,1,0,0), \\ (1,0,0,0), (0,1,0,1), (1,0,1,0), (1,0,0,1), (0,1,1,0)\}. \end{gathered} \quad (34)$$

Дослідимо основні геометричні властивості даної множини та її опуклої оболонки.

1) $\Pi'^4_{52}(G)$ задається не надлишковою системою обмежень наступного вигляду:

$$x_i \ge 0, i \in J_4; x_1 + x_2 \le 1, x_3 + x_4 \le 1; \sum_{i=1}^{4} x_i \ge 1 \quad (35)$$

2) $A'^4_{52}(G)$ є вершинно розташованою $A'^4_{52}(G) = \mathrm{vert}(\Pi'^4_{52}(G))$ як підмножина вершинно розташованої множини B_4;

3) $A'^4_{52}(G)$, як і B_4, лежить на гіперсфері $S_r(a) \subset R^4$ радіуса $r = 1$ із центром в точці $a = (a_i)_{i \in J_4}$; $a_i = 0,5$; $i \in J_4$.

4) $A'^4_{52}(G)$ утворюється в перетині гіперсфери і многогранника (це випливає з 2):

$$A'^4_{52}(G) = \Pi'^4_{52}(G) \cap S_r(a). \quad (36)$$

5) $\dim(\Pi'^4_{52}(G)) = 4$, адже елементи $\{e_i\}_{i \in J_4}$ утворюють одиничний базис в R^4.

6) Множина $A'^4_{52}(G)$ лежить на двох паралельних гіперплощинах Π', Π'':

$$\Pi' = \left\{x \in R^4 : \sum_{i=1}^{4} x_i = 1\right\}, \Pi'' = \left\{x \in R^4 : \sum_{i=1}^{4} x_i = 2\right\}. \quad (37)$$

7) Розглянемо питання суміжності вершин $A'^4_{52}(G)$, у якій виділимо дві підмножини:

$$A'^4_{52}(G)_{\Pi'} = \{e_i\}_{i \in J_4}, A'^4_{52}(G)_{\Pi''} = \{e_i\}_{i \in J_8 \setminus J_4}. \quad (38)$$

Так $\forall e \in A'^4_{52}(G)_{\Pi'}$ суміжними будуть:

А) усі інші елементи $A'^4_{52}(G)_{\Pi'}$;

Б) елементи $A'^4_{52}(G)_{\Pi''}$, що отримуються з e заміною одного 0 на 1.

$\forall e \in A'^4_{52}(G)_{\Pi'}$ суміжними будуть:

А) елементи $A'^4_{52}(G)_{\Pi'}$, що отримуються з e заміною однієї 1 на 0.

Б) два елементи $A'^4_{52}(G)_{\Pi''}$.

Уведемо в розгляд полімножину, що являє собою декартовий добуток K множин $A'^4_{52}(G)$:

$$\begin{gathered} A'^{\overline{K}}_{\overline{ms}}(\overline{G}), \overline{G} = \{G^k\}, \overline{K} = (K^k) = (4^k), \\ \overline{m} = (m^k) = (5^k), \overline{s} = (s^k) = (2^k) \end{gathered} \quad (39)$$

Тепер масиви змінних T, Z є елементами евклідових комбінаторних множин:

$$T \in B_n;\ Z \in A'^{\overline{K}}_{\overline{ms}}(\overline{G}) = A'^4_{52}(G) \times \ldots \times A'^4_{52}(G), \quad (40)$$

а задачу (17-21), (31) можна переформулювати наступним чином: знайти $x, y \ge 0$, T, Z вигляду (40), що задовольняють (17, 18) і мінімізують (31).

Перейдемо до релаксованої задачі і замість комбінаторних множин B_4, $A'^{4}_{52}(G)$, $A'^{\overline{K}}_{\overline{ms}}(\overline{G})$ розглядатимемо відповідні комбінаторні многогранники: $\Pi'^{4}_{52}(G), \Pi_n, \Pi'^{\overline{K}}_{\overline{ms}}(\overline{G})$.

Усі розглянуті комбінаторні множини вершинно розташовані, що дозволяє при розробці алгоритмів розв'язання суттєво використовувати відсутність точок комбінаторних множин усередині многогранника та його граней.

Відомий підхід до розв'язання лінійних комбінаторних задач на таких множинах – це метод комбінаторних відсікань (МКВ) [10], основна ідея якого полягає в переході від дискретної задачі до розгляду релаксованої задачі на відповідному многограннику. Якщо розв'язок x^0 є елементом E, задачу розвязано. Інакше по останній симплекс-таблиці визначаються суміжні вершини до x^0, по r з яких ($\dim \Pi \le r \le n$) будують комбінаторне відсікання і розв'язують одержану задачу. Процес продовжують до одержання точки $x^i \in E$.

Недоліком МКВ є те, що зазвичай система комбінаторного многогранника містить надто багато обмежень, тому при розв'язанні лінійних задач виникають труднощі. Задача 3, запропонована нами для реалізації, не містить цієї диспропорції, адже має вимірність $3n + 4C_n^2$ при $3n + 7C_n^2$ обмежень, серед яких n обмежень зверху на змінні. Комбінаторні відсікання побудовано на базі властивостей $A'^{4}_{52}(G)$ та $\Pi'^{\overline{K}}_{\overline{ms}}(\overline{G})$.

Запропонований підхід було закладено в основу програмної реалізації (інтерфейс головного вікна програми показано на рис. 1).

Основні структурні блоки:

Блок 1 – введення даних і формування початкового наближення

$$point0 = (x^0(n), y^0(n), t^0(n), z^{10}(N), z^{20}(N), z^{30}(N), z^{40}(N)),$$

де n – кількість модулів, $N = C_n^2$ (далі великими літерами A,..,D позначатимемо матриці, малими літерами a,..,d – вектори, $A(m,n) = (a_{ij})_{i\in J_m; j\in J_n}$, $A(n) = (a_{ij})_{i,j\in J_n}$, $a(n) = (a_i)_{i\in J_n}$, E, e - одиничні матрицю і вектор).

Блок 2 – генерація системи обмежень (табл. 1).

Генерація відбувається за допомогою реалізованого класу Matrix, його методів, властивостей, операторів, що здійснює як стандартні матричні дії такі як:

– конкатенація матриць
$(A(m,n_1+n_2) = concat1(A_1(m,n_1), A_2(m,n_2)), B(m_1+m_2,n) = concat1(B_1(m_1,n), B_2(m_2,n)))$,
– множення матриць,
– множення матриці на скаляр,
– генерацію одиничних матриць та векторів
$(E(n) = unimatrix(n), e(n) = univector(n))$,

так і специфічні функції як:

– множення стовпців матриці на елементи заданого вектора $(B(m,n) = A(m,n)\^{}a(n))$;
– генерація:

- матриці A (обм. (18) $A(N,n) = gener A(n,IJ)$, де $IJ = (I, J) = (i, j)_{i,j\in J_n, i<j}$)
- матриць D_1-D_2 (обм. (17) $D_1(n)=-E(n)\^{}h(n)$, $D_2(n)=-E(n)\^{}l(n)$),
- матриць B_1-B_4 (обм.(18) ($B_1(N,n) = = generB(n,I,h)$, $B_2(N,n) = generB(n,J,h)$, $B_3(N,n) = = generB(n,I,l)$, $B_4(N,n) = generB(n,J,l)$);

– формування правої частини системи – генерація векторів

- c_1-c_4 (обм.(18) $c_1(N)= = generc(N,I,\overline{L}')$,
- $c_2(N) = generc(N,J,\overline{L}')$,
- $c_3(N)= generc(N,I,\overline{H}')$,

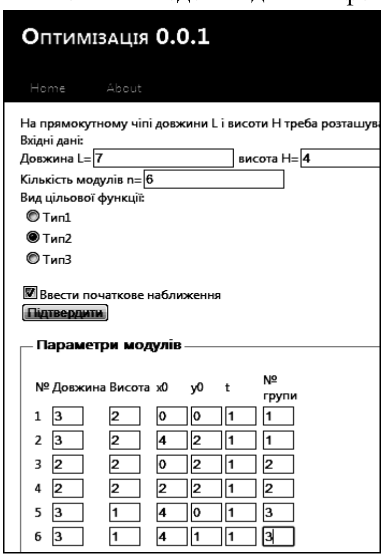

Рис. 1. Головне вікно програми

Таблиця 1

Структура системи обмежень

	вимірність	n	n	n	N	N	N	N		
вимірність	обмеження/змінна	X	Y	T	Z^1	Z^2	Z^3	Z^4	знак	права частина
n	17.2	E'=E(n)		D_1					<=	l
n	17.3		E'	D_2					<=	h
N	18.1	A		B_1	L*E				<=	c_1
N	18.2	-A		B_2		L*E			<=	c_2
N	18.3		A	B_3			H*E		<=	c_3
N	18.4		-A	B_4				H*E	<=	c_4
N	20.1				-E	-E	-E	-E	<=	-e
N	21.1				E=E(N)	E			<=	e=e(N)
N	21.2						E	E	<=	e

$c_4(N) = = \text{generc}(N, J, \overline{H}')$.

Блок 3 – оптимізаційний, в якому реалізовано комбінаторні відсікання і викликається зовнішня функція лінійної неперервної оптимізації;

Блок 4 – вивід даних та результатів роботи програми в Excel для подальшого аналізу.

Розглянемо приклад розміщення 6-ти модулів, розміри та параметри початкового розташування яких наведено в табл. 2 і зображено на рис. 2. Розглянуто критерії (24), (27), (30), параметри яких наведені. у табл. 3.

Результатом роботи програми є оптимальне розміщення point*, зображене на рис. 3, в табл. 3 проведено порівняння цільових функцій, з якого видно, що хоча оптимізація проводилася лише по 3-му, лінійному, критерію, одержане розміщення point* є суттєво кращим за усіма 3-ма критеріями.

Таблиця 2

Вхідні дані

L=7 H=4 n=6

i	l_i	h_i	x_i	y_i	t_i	p_i	L_i'	H_i'
1	3	2	0	0	1	5	-5	-5
2	3	2	4	2	1	5	-5	-5
3	2	2	0	2	1	4	-4	-4
4	2	2	2	2	1	4	-4	-4
5	3	1	4	0	1	4	-4	-4
6	3	1	4	1	1	4	-4	-4

Таблиця 3

Параметри цільових функцій і порівняння їх значень

ц.ф. 1 -c_{ij}						ц.ф. 2 - l
	6	1	1			1
		1	1			1
			4	1	1	2
				1	1	2
					3	3
						3

k	z^{k0}	z^{k*}
1	77	53
2	22	18
3	20	17

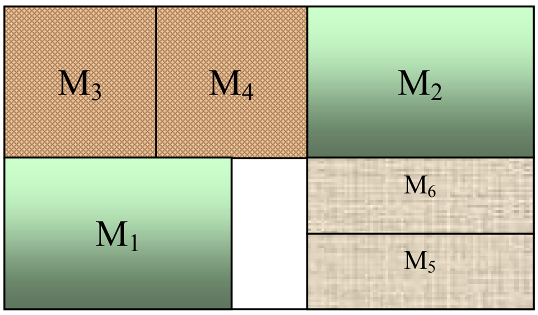

Рис. 2. Початкове розміщення $\left(x^0, y^0, T^0, Z^0\right)$

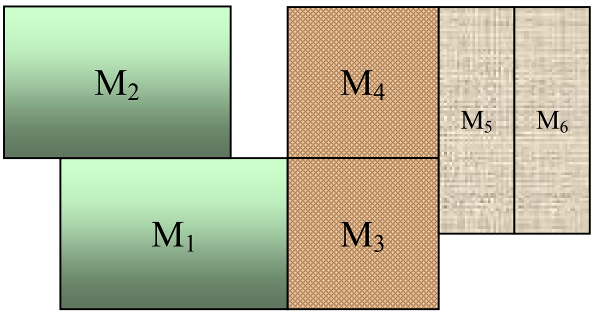

Рис. 3. Оптимальне розміщення $\left(x^*, y^*, T^*, Z^*\right)$

Висновки

У роботі наведено постановки задачі розташування прямокутних модулів на чіпі у вигляді неперервної задачі з квадратичними обмеженнями, частково бульової задачі, а також комбінаторної задачі на полімножинах із лінійними обмеженнями. Запропоновано три критерії оптимізації - лінійний і два нелінійних. Дано огляд методів розв'язання таких задач та представлено власний підхід, що ґрунтується на досліджених поліедральних властивостях множини, і програмний комплекс розв'язання задач розміщення модулів, у якому реалізовано цей алгоритм комбінаторного відсікання. Наведено приклад, що демонструє ефективність застосування запропонованого лінійного критерію, що розширює перспективи розв'язання подібних задач, які традиційно вважаються складними для реалізації [7, 12, 13].

Література

1. Sherwani, N. Algorithms for VLSI Physical Design Automation [Text] / N. Sherwani // Kluwer aca-

demic publishers. – Boston /Dordrecht/ London. – 1995. – 224 p.

2. Sarrafzadeh, M. An Introduction to VLSI Physical Design [Text] / M. Sarrafzadeh, C.K. Wong. – New York: McGraw Hill, 1996. – 468 p.

3. Лебедев, В.Б. Планирование СБИС методом адаптивного поиска. [Текст] / И.Б. Лебедев // Известия ТРТУ. – Таганрог: ТРТУ, 2000. – № 2. – С. 168 – 177.

4. Лебедев, Б.К. Адаптация в САПР [Текст] / Б.К. Лебедев. – Таганрог: ТРТУ, 1999. – 382 с.

5. Practical Handbook of Genetic Algorithms [Text] / editor I. Chambers. – Washington, USA, CRC Press. – 1999. – V. 3. – 422 p.

6. Стоян, Ю.Г. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. [Текст] / Ю.Г. Стоян, О.О. Ємець. – К.: ІСДО, 1993. – 188 с.

7. Писарук, Н.Н. Модели и методы смешанно–целочисленного программирования [Текст] / Н.Н. Писарук. – Минск: БГУ, 2008. – 250 с.

8. Таха, А. Хемди. Введение в исследование операций [Текст] / А. Хемди Таха. – М.: Вильямс, 2001. – 912 с.

9. Dahl, J. Convex Problems in Signal Processing and Communications [Text] / J. Dahl. – Department of Communication Technology, 2003. – 90 p.

10. Емец, О.А. Модификация метода комбинаторного отсечения в задачах оптимизации на вершинно расположенных множествах [Текст] / О.А. Емец, Е.М. Емец // Кибернетика и системный анализ. – 2009. – № 5. – С. 129 – 136.

11. Яковлев, С.В. Теория выпуклых продолжений функций на вершинах выпуклых многогранников [Текст] / С.В. Яковлев // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1994. – Т. 34, № 7. – С. 1112 – 1119.

12. Nocedal, J. Numerical Optimization [Text] / J. Nocedal, S.J. Wright. – Springer, 2000. – 664 p.

13. Демиденко, В.М. Эффективно разрешимые случаи и полиэдральные аспекты оптимизационных задач на подстановках [Текст]: дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 01.01.09; утв. 09.11.11 / Демиденко Виталий Михайлович. – Минск, Ин–т математики НАН Белоруссии, 2011. – 315 с.

Поступила в редакцию 2.02.2012

Рецензент: д-р техн. наук, проф., проф. О.Л. Ляхов, Полтавський національний технічний університет, Полтава.

ЗАДАЧА РАЗМЕЩЕНИЯ МОДУЛЕЙ НА ЧИПЕ И ПОЛИЭДРАЛЬНЫЙ ПОДХОД К ЕЕ РЕШЕНИЮ

О.С. Пичугина, В.Г. Дяченко

Рассмотрена задача оптимального размещения модулей на чипе. Представлены ее математические модели как частично булевой, непрерывной и комбинаторной задач с несколькими критериями оптимизации. Дан обзор методов решения задачи. Представлена программная реализация метода комбинаторных отсечений решения задачи размещения модулей на чипе как условной линейной евклидовой комбинаторной задачи на полиразмещениях специального вида, основанного на исследованных их полиэдральных свойствах. Эффективность применения линейного критерия оптимизации продемонстрировано на примерах.

Ключевые слова: модуль, чип, размещение, логическая цепь, выпуклая оптимизация, частично-булевая оптимизация, комбинаторная оптимизация, евклидово комбинаторное множество, поликомбинаторное множество, многогранник, полиэдр, аналитическое описание многогранника.

ACCOMODATION PROBLEM FOR MODULES ON A CHIP AND POLYHEDRAL APPROACH FOR THE SOLVING

O.S. Pichugina, V.G. Dyachenko

The problem of optimum accommodation of modules on a chip is being considered. Its mathematical models, as partially boolean, continuous and combinatorial optimization problems with several target functions, are presented. The review of solving techniques for the problem is given. A special cutting technique is being developed, based on investigated polyhedral and extreme properties of polyac commodation Euclidean combinatorial set for solving constrained liner combinatorial problems. The software for the combinatorial cutting approach for solving such accommodating problem is presented. Efficiency of using linear target function is demonstrated with an example.

Keywords: module, chip, accommodations, convex optimization, partially Boolean optimization, combinatorial optimization, Euclidean combinatorial set, polycom binatorial set, polyhedral, the system of polyhedron restrictions.

Пічугіна Оксана Сергіївна – канд. фіз.-мат. наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики, інформатики та математичного моделювання Полтавського національного технічного університету ім. Ю. Кондратюка, Полтава, Україна, e-mail: pichugina_os@mail.ru.

Дяченко Віталій Григорович – асистент кафедри прикладної математики, інформатики та математичного моделювання Полтавського національного технічного університету ім. Ю. Кондратюка, Полтава, Україна, e-mail: pntu-edu@ro.ru.