

УДК 004.272

В.М. ГРИГА

Національний університет "Львівська політехніка", Україна

ПРОСТОРОВО-ЧАСОВЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ АЛГОРИТМУ СОРТУВАННЯ ЧИСЕЛ МЕТОДОМ БЕТЧЕРА

Розглянуто варіанти синтезу паралельного алгоритму сортування чисел методом Бетчера. Розроблено базові структури одноктактових та багатотактових алгоритмічних операційних пристроїв для досліджуваного алгоритму та подано їхні технічні характеристики. Оптиміальне співвідношення між затратами обладнання та швидкодією знайдено в комбінованого алгоритмічного операційного пристрою, який серед багатотактових алгоритмічних операційних пристроїв має найкращу пропускну здатність та порівняно не великі апаратні затрати.

Ключові слова: потоковий граф, просторово-часовий граф, алгоритм, алгоритмічний операційний пристрій, сортування.

Вступ

Для проектування універсальних обчислювальних машин математичною основою є теорія абстрактних автоматів (Мілі та Мура), фундаментальним поняттям яких є поняття стану [1]. Дане поняття відповідає унікальним діям машини протягом визначеного проміжку часу (синхро-такту роботи), а сам абстрактний автомат покликаний забезпечити послідовність у часі переходів з одного стану до іншого для реалізації заданого алгоритму. Фундаментальним механізмом для реалізації часової послідовності є використання комірок пам'яті, які дозволяють фіксувати біжучий стан і на основі функцій переходів визначати до якого наступного стану необхідно перейти. Також, окрім попереднього стану на визначення наступного стану впливають вхідні дані.

Під спеціалізованим підходом довгий час розуміли проектування універсальної машини зі скороченим набором спеціалізованих інструкцій. Проте під цим поняттям необхідно розуміти безпосереднє відображення послідовностей операцій з врахуванням їх залежностей по даних у структуру обчислюючого пристрою. Математичною основою для проектування спеціалізованих обчислювальних пристроїв стала теорія поточкових графів (або графів потоків сигналів), у якій вершинам графів відповідають обчислювальні операції, а дугам – лінії передачі даних для обробки [2,3,4]. Необхідно відмітити, що поточкові графи дозволяють проектувати спеціалізовані пристрої для класу алгоритмів, структура яких не залежить від вхідних даних (або слабо залежить, тобто немає нескінченних послідовностей). До недоліку поточкових графів необхідно

віднести бінарність усіх операцій, а також відсутність розрізнення номерів входів до вершин, що не дозволяє створювати ієрархічні вершини з багатьма входами та виходами. Хоча поточкові графи майже тотожно відповідають структурі обчислювального пристрою, проте у багатьох випадках з точки зору апаратних ресурсів (розміру кристалу інтегральної схеми) або некритичних часових параметрів доцільно реалізувати обчислення декількох операцій (вершин) за допомогою одного обчислювального елемента. Такий процес оптимізації апаратних затрат може відповідати зменшенню ступіня паралелізму або виконанню послідовних у часі операцій за допомогою одного елемента. У цьому випадку процес проектування стає неоднозначним, оскільки зникає відповідність між структурою графа алгоритму та структурою обчислювального пристрою. Саме для формалізації такого процесу проектування оптимізованих за апаратними затратами спеціалізованих пристроїв було запропоновано новий клас просторово-часових графів [5].

1. Огляд літератури

Сортування є одною з типових проблем обробки даних і зазвичай розуміється, як задача розміщення елементів неупорядкованого набору значень, в порядку зростання або спадання. Відомо багато методів послідовного та паралельного сортування даних. Обчислювальна трудомісткість процедури впорядкування є доволі високою. Так, для деяких відомих простих методів (бульбашкове сортування, сортування включенням та ін.) кількість необхідних операцій визначається квадратичною залежністю від числа даних, що впорядковуються

$t_s \approx N^2$ [6]. Для ефективніших алгоритмів (сортування злиттям, сортування Шелла та ін.) трудомісткість визначається величиною $t_s \approx N \log_2 N$ [6]. Паралельне виконання операцій алгоритму сортування декількома операційними пристроями одночасно значно прискорює час виконання алгоритму. Серед алгоритмів сортування паралельне виконання операцій можна виконувати для алгоритмів, в яких послідовність виконуваних операцій залежить тільки від числа вхідних даних і не залежить від значень їхніх ключів (неадаптивні алгоритми). До неадаптивних алгоритмів належить алгоритм сортування за методом Бетчера.

2. Постановка задачі

Оскільки, задача сортування чисел є однією з типових проблем обробки даних, то важливим є пошук шляхів розробки ефективних пристроїв сортування чисел методом Бетчера на основі просторово-часових графів та знаходження оптимального співвідношення між затратами обладнання та швидкодією.

3. Вибір алгоритму

На рис. 1 зображено потоковий граф алгоритму сортування чисел методом Бетчера для 8-ми вхідних значень.

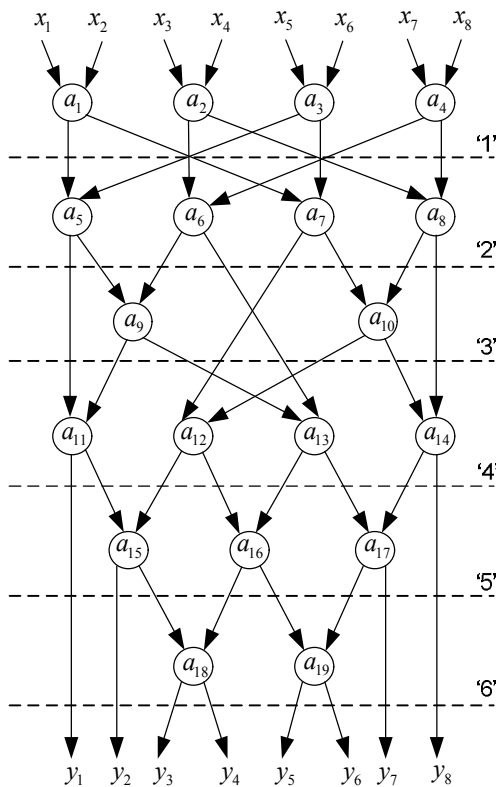


Рис. 1. Потоковий граф алгоритму сортування чисел методом Бетчера

Потоковий граф алгоритму представлений на рис. 1 розділений на 6 паралельних ярусів. Слід зазначити, що ярусно-паралельна форма потокового графу алгоритму – це таке представлення обчислювального графу у якому усі вершини одного ярусу залежать від результатів вершин попереднього ярусу, і не залежать від вершин наступних ярусів. Ярусно-паралельна форма визначає ступінь паралелізму графу (максимальна кількість вершин на одному ярусі), а також мінімально можливий час обчислення даного алгоритму (кількість ярусів). Ступінь паралелізму або ширина нашого ПГА складає – $N/2$, а час обчислення (часова складність) дорівнює

$$\frac{1}{2} [\log_2 N] ([\log_2 N] + 1).$$

Обчислювальні затрати на реалізацію даного алгоритму для N вхідних значень складають – $0,48N \ln^2 N$ операцій “порівняти і переставити”. Апаратна реалізація ПГА сортування чисел методом Бетчера направлена на отримання алгоритмічних операційних пристроїв (АОП), які можуть бути одноктактовими та багатотактовими.

4. Апаратні варіанти синтезу вибраного алгоритму

Розглянемо апаратні варіанти синтезу паралельного алгоритму сортування чисел методом Бетчера для 16 вхідних значень.

Одноктактовий АОП. Апаратне відображення ПГА сортування чисел в одноктактовий АОП означає послідовне з'єднання блоків, що виконують операцію “порівняти і переставити” відповідно до ПГА сортування чисел. При такому відображенні заданий алгоритм виконується над вхідними даними при їх одноразовому проходженні через одноктактовий АОП.

Затрати обладнання ($W_{ОП}$) на реалізацію такого АОП включають кількість вхідних регістрів ($W_{R_{вх.}} = 16 \times n$ -розрядних), кількість вихідних регістрів ($W_{R_{вих.}} = 16 \times n$ -розрядних) і є найбільшими по кількості блоків сортування ($W_{сорт.} = 0,48N \ln^2 N$) при мінімальній часовій затримці $T_{ОП} = k \times t_{сорт.}$, де k - кількість ярусів ПГА, а $t_{сорт.}$ - час виконання однієї операції порівняння і переставлення двох чисел.

Час, через який на вхід пристрою може бути поданий черговий пакет даних, є пропускну здатністю ($T_{П}$) пристрою і для одноктактового АОП дорівнює часовій затримці ($T_{ОП}$). Продуктивністю

(P) одноктакового АОП є кількість реально виконаних операцій за одиницю часу і дорівнює

$$P = \frac{0,48N \ln^2 N}{k \times t_{\text{сорт.}}}$$

Конвеєрний АОП. Для досягнення більшої продуктивності та пропускної здатності АОП потрібно забезпечити більшу завантаженість блоків АОП. Це досягається суміщенням в часі виконання операторів алгоритму над різними даними, розділивши яруси регістрами ми отримаємо конвеєрний пристрій сортування. Черговий вхідний пакет даних може бути направлений на вхід АОП сортування чисел через час $T_{\Pi} = t_{\text{сорт.}}$, після виконання операцій сортування першого ярусу і подання результату в проміжні регістри.

Затрати обладнання на реалізацію конвеєрного АОП включають ($W_{\text{сорт.}} = 0,48N \ln^2 N$) блоків сортування, кількість вхідних регістрів ($W_{R_{\text{вх.}}} = 16 \times n$ -розрядних), кількість проміжних регістрів ($W_{R_{\text{пр.}}} = 16 \times (k-1) \times n$ -розрядних) та кількість вихідних регістрів ($W_{R_{\text{вих.}}} = 16 \times n$ -розрядних). Наявність проміжних регістрів збільшує продуктивність конвеєрного АОП в порівнянні з одноктаковим в k раз.

Оскільки на кожний блок сортування надходять дані кожного такту і відбувається повне завантаження всіх пристроїв кожного ярусу, то кількість реально виконаних за час $T_{\text{ОП}}$ операцій збільшується в k раз і продуктивність конвеєрного АОП

$$\text{дорівнює } P = \frac{0,48N \ln^2 N}{t_{\text{сорт.}}}$$

Багатотактові АОП. При побудові багатотактових АОП застосовують просторово-часові графи [7]. Основне призначення ПЧГ – знаходження оптимального співвідношення між затратами обладнання та швидкодією багатотактових АОП. Існує багато варіантів побудови багатотактових АОП на основі просторово-часових графів. Вихідною точкою в даному випадку є ПГА сортування чисел методом Бетчера. Вершини даного ПГА можна стискати по висоті, ширині а також і по висоті та ширині до однієї вершини, яка послідовно в часі буде виконувати всі операції алгоритму. Важливою в даному випадку є задача пошуку оптимальної структури графу, яка б покращувала технічні характеристики перерахованих вище основних варіантів стиску вершин.

Ітераційний багатотактовий АОП. Структура ітераційного БАОП, побудованого на основі ПЧГ алгоритму сортування чисел методом Бетчера зображена на рис. 2.

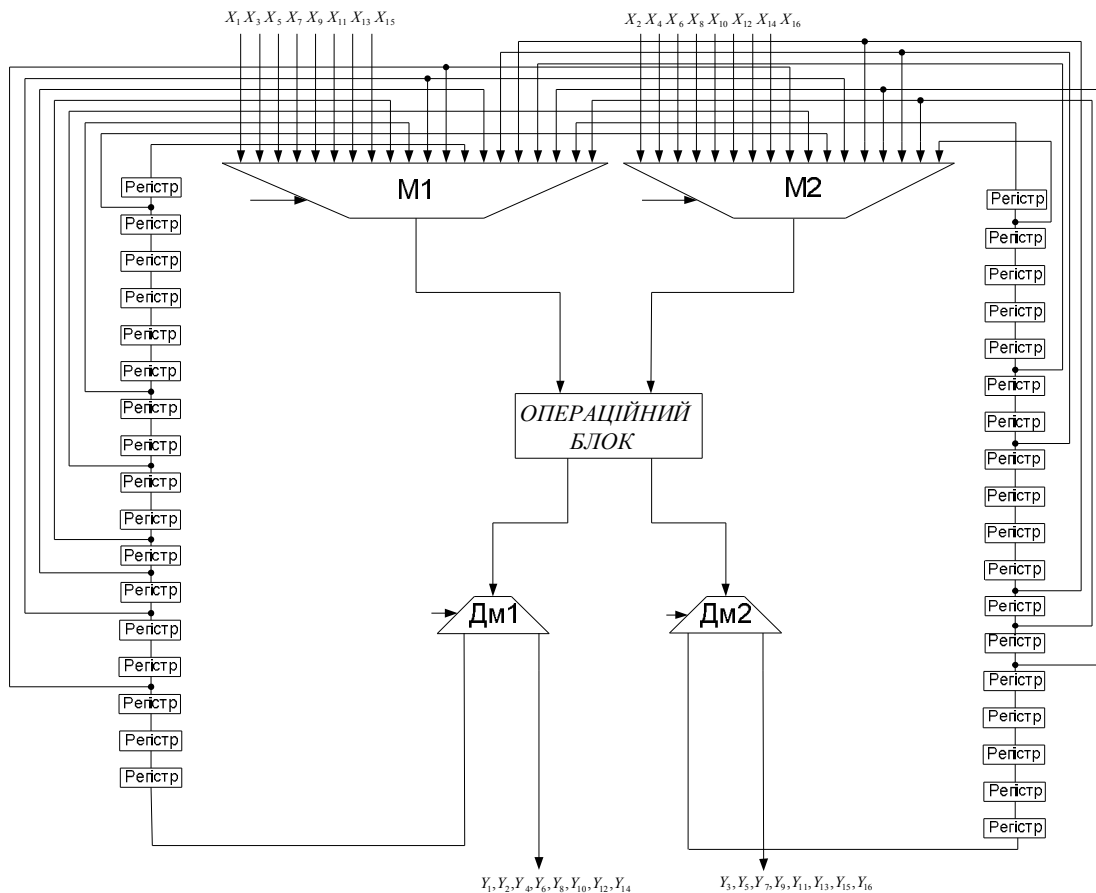


Рис. 2. Структура ітераційного БАОП сортування чисел методом Бетчера для 16 вхідних значень

Затрати обладнання ($W_{\text{ОП}}$) на реалізацію такого багатотактового АОП складають ($W_{\text{сорт.}} = 1$) блок сортування, кількість вхідних регістрів ($W_{R_{\text{вх.}}} = 16 \times n$ -розрядних), кількість проміжних регістрів ($W_{R_{\text{пр.}}} = 76 \times n$ -розрядних), кількість вихідних регістрів ($W_{R_{\text{вих.}}} = 16 \times n$ -розрядних), два мультиплексори (M1, M2), два демультимплексори (Дм1, Дм2) та затрати на реалізацію пристрою керування мультиплексорами та демультимплексорами.

Часова затримка та пропускна здатність для даного пристрою є максимальними і дорівнюють $T_{\text{П}} = T_{\text{ОП}} = 0,48N \ln^2 N \times t_{\text{сорт.}}$, оскільки один блок порівняння і переставлення двох чисел послідовно в часі виконує всі операції алгоритму.

Продуктивність для даного багатотактового АОП сортування чисел є обернено пропорційною до часової затримки пристрою та дорівнює

$$P = \frac{1}{0,48N \ln^2 N \times t_{\text{сорт.}}}.$$

5. Результати досліджень

В табл. 1. подано технічні характеристики для синтезованих АОП алгоритму сортування 16 чисел методом Бетчера.

В даній таблиці подані апаратні затрати на реалізацію різних варіантів АОП алгоритму сортування чисел методом Бетчера, а також наведено їхні часові характеристики.

Таблиця 1

Технічні характеристики для різних варіантів синтезу АОП алгоритму сортування 16 чисел методом Бетчера

№	Тип пристрою	Затрати обладнання, $W_{\text{ОП}} = W_{\text{сорт.}} + W_{R_{\text{вх.}}} + W_{R_{\text{пр.}}} + W_{R_{\text{вих.}}}$				Часова затримка, $T_{\text{ОП}}$	Пропускна здатність, $T_{\text{П}}$	Продуктивність, P
		операційс ортуван- ня, $W_{\text{сорт.}}$	кількість регістрів					
			вхідних, $W_{R_{\text{вх.}}}$	проміжних, $W_{R_{\text{пр.}}}$	вихідних, $W_{R_{\text{вих.}}}$			
1.	Однотактовий АОП	63	$16 \times n$	-	$16 \times n$	$10 \times t_{\text{сорт.}}$	$10 \times t_{\text{сорт.}}$	$63/10 \times t_{\text{сорт.}}$
2.	Конвеєрний АОП	63	$16 \times n$	$144 \times n$	$16 \times n$	$10 \times t_{\text{сорт.}}$	$t_{\text{сорт.}}$	$63/t_{\text{сорт.}}$
3.	Ітераційний БАОП	1	$16 \times n$	$76 \times n$	$16 \times n$	$63 \times t_{\text{сорт.}}$	$63 \times t_{\text{сорт.}}$	$1/63 \times t_{\text{сорт.}}$
4.	Послідовно- ітераційний БАОП	8	$16 \times n$	$35 \times n$	$16 \times n$	$11 \times t_{\text{сорт.}}$	$11 \times t_{\text{сорт.}}$	$63/11 \times t_{\text{сорт.}}$
5.	Послідовний БАОП	10	$16 \times n$	$91 \times n$	$16 \times n$	$33 \times t_{\text{сорт.}}$	$8 \times t_{\text{сорт.}}$	$63/33 \times t_{\text{сорт.}}$
6.	Комбінований БАОП	20	$16 \times n$	$35 \times n$	$16 \times n$	$19 \times t_{\text{сорт.}}$	$4 \times t_{\text{сорт.}}$	$63/19 \times t_{\text{сорт.}}$

Висновки

Отже, по технічним характеристикам поданих в табл. 1. можна зробити висновок, що найкращі часові параметри мають однотактовий та конвеєрний АОП, при найбільших затратах обладнання на їхню реалізацію. З багатотактових АОП найменші затрати обладнання має ітераційний багатотактовий АОП, проте часові характеристики у нього найбільші.

Оптимальне співвідношення між затратами обладнання та швидкодією знайдено в комбінованого АОП, який серед багатотактових АОП має найкращу пропускну здатність та порівняно не великі апаратні затрати.

Література

1. Глушков, В.М. Синтез цифровых автоматов [Текст] / В.М. Глушков. - М., Физматгиз, 1962. - 234 с.
2. Кун, С. Матричные процессоры на СБИС [Текст] / С. Кун. - М.: Мир, 1991. - 672 с.
3. Мельник, А.О. Архитектура комп'ютера [Текст] / А.О. Мельник. Наукове видання. - Луцьк: Волинська обласна друкарня, 2008. - 470 с.
4. Мельник, А.О. Спеціалізовані комп'ютерні системи реального часу [Текст] / А.О. Мельник. - Львів: Національний університет "Львівська політехніка", 2002. - 60 с.
5. Ерметов, Ю.О. Проектування обчислювальних структур на основі просторово-часових графів

[Текст] / Ю.О. Ерметов // Вісн. Хмельницького національного університету. – 2006. – №4. – С. 172 – 177.

6. Кнут, Д. Искусство программирования для ЭВМ [Текст]: пер. с англ. / Д. Кнут. – М.: Мир, 1978. – 841 с.

7. Грига, В. Особливості побудови багатотактових операційних пристроїв [Текст] / В. Грига // Сучасні комп'ютерні системи та мережі розробка та використання: Мат. 5-ої Міжн. НТК ACSN-2011, Львів. – 2011. – С. 243 - 244.

Надійшла до редакції 17.02.2012

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Ю.П. Кондратенко, Черноморский государственный им. Петра Могилы, Николаев, Украина.

ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОЕ ПРЕВРАЩЕНИЕ АЛГОРИТМА СОРТИРОВКИ ЧИСЕЛ МЕТОДОМ БЕТЧЕРА

В.М. Грига

Рассмотрены варианты синтеза параллельного алгоритма сортировки чисел методом Бетчера. Разработаны базовые структуры одноктактных и многотактных операционных устройств для исследуемого алгоритма и представлены их технические характеристики. Оптимальное соотношение между затратами оборудования и быстродействием найдено в комбинированном алгоритмическом операционном устройстве, которое среди многотактных алгоритмических операционных устройств имеет лучшую пропускную способность и сравнительно небольшие аппаратные затраты.

Ключевые слова: поточный граф, пространственно-временной граф, алгоритм, алгоритмическое операционное устройство, сортировка.

SPACE-TIME TRANSFORMATION ALGORITHM FOR SORTING NUMBERS BY BATCHER

V.M. Gryga

The considered variants of the synthesis a parallel algorithm for sorting numbers by Batcher. Developed the basic structure of the singlecycle and multicycle algorithm is investigated and presented to their specifications. The optimum ratio between the cost of equipment and performance is found in the combined algorithmic operating device, which among multicycle algorithmic operating devices has better throughput and a relatively small hardware cost.

Key words: flow graph, time-space graph, algorithmic device operating, algorithm, sorting.

Грига Володимир Михайлович – асистент кафедри спеціалізованих комп'ютерних систем Національного університету «Львівська політехніка», Львів, Україна, e-mail: vol_gr@mail.ru.