УДК 621.391.1

А.Н. ДЕГТЯРЁВ

Севастопольский национальный технический университет, Украина

МИНИМИЗАЦИЯ ОШИБКИ РАЗЛОЖЕНИЯ СИГНАЛОВ В РЯД ПО ЭКВИДИСТАНТНЫМ ФИЗИЧЕСКИ РЕАЛИЗУЕМЫМ ФУНКЦИЯМ

В статье показано, что из импульсных характеристик физически реализуемых линейных фильтров второго и выше порядков можно составить ортогональные базисы. Также показано, что существует интервал смещения базисных функций, который минимизирует среднюю квадратичную ошибку аппроксимации сигнала рядом. Рассматриваются условия существования ортогональных базисов, составленных из физически реализуемых эквидистантных функций. Также в данной статье показано, что существует интервал смещения базисных функций, при котором ошибка аппроксимации сигнала рядом минимальна.

Ключевые слова: *физически реализуемые функции, эквидистантные функции, ортогональность, функционал ошибки, ряд.*

Введение

Ошибка аппроксимации физических сигналов ортогональными рядами и скорость сходимости рядов зависят от выбора базисных функций. В работе [1] показано, что высокую скорость сходимости имеют ряды, составленные из базисов, полученных смещением импульсных характеристик физически реализуемых линейных фильтров. Там же предложен метод ортогонализации, позволяющий определить вес ортогональности для системы линейно независимых функций, однако условия существования такой системы не рассматривались. Также не рассматривалась методика получения интервала смещения эквидистантных функций, минимизирующего функционал ошибки аппроксимации сигнала эквидистантным рядом. Целью настоящей работы является устранение указанных «пробелов».

1. Условие существования физически реализуемых ортогональных базисов

Условие существования ортогонального базиса вытекает непосредственно из условия ортогональности функций $\phi_n(t)$ с весом $h(t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_n(t)\phi_m(t)h(t)dt = \begin{cases} 1, & n = m, \\ 0, & n \neq m, \end{cases} \tag{1}$$

где n=0, 1, 2, ….

В работе [1] показано, что вес ортогональности имеет вид

$$h(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_{mn}\phi_n(t)\phi_m(t), \tag{2}$$

и для эквидистантных функций ($\phi_n(t) = \phi(t - n\alpha)$, α — интервал смещения) является периодической функцией. Подстановка (2) в (1) позволяет определить неизвестные постоянные λ_{mn}.

Система (1) будет иметь решение (будет непротиворечивой), если выполняется условие

$$\phi_n(t)\phi_m(t) \neq A \cdot \phi_k^2(t), \tag{3}$$

где A — постоянное число.

Будем считать, что $\phi_0(t)$ — импульсная характеристика физически реализуемого фильтра, а остальные $\phi_n(t)$ получены смещением $\phi_0(t)$ на интервал времени α.

Определим, для каких $\phi_n(t)$ выполняется неравенство (3). В простейшем случае импульсная характеристика линейного фильтра является общим решением линейного однородного дифференциального уравнения

$$a_0\phi_0^{(n)}(t) + a_1\phi_0^{(n-1)}(t) + ... + a_{n-1}\phi_0'(t) + a_n\phi_0(t) = 0. \tag{4}$$

Решение уравнения (4) имеет вид выражения

$$\phi_0(t) == \sum_{k=1}^{N} c_k e^{p_k t} + e^{pt} \cdot \sum_{m=1}^{M} b_m t^{m-1} + $$
$$+ \sum_{n=1}^{L} d_n e^{\sigma_n t} \sin\omega_n t + e^{\sigma t} \sin\omega t \cdot \sum_{l=1}^{Q} q_l t^{l-1}. \tag{5}$$

Очевидно, что система функций, полученных смещением функции (5), будет удовлетворять неравенству (3), если это неравенство будет выполняться для системы функций, полученных смещением одного из слагаемых, входящих в выражение (5).

Рассмотрим, будет ли выполняться условие (3) для импульсной характеристики вида

$$\phi_0(t) = 1(t)\cdot c\cdot e^{pt}, \qquad (6)$$

где 1(t) — функция Хевисайда. С учетом (6) запишем левую часть неравенства (3)

$$\phi_0(t-n\alpha)\phi_0(t-m\alpha) =$$
$$= 1(t-n\alpha)\cdot c\cdot e^{p(t-n\alpha)}\cdot 1(t-m\alpha)\cdot c\cdot e^{p(t-m\alpha)}. \qquad (7)$$

Для определенности примем $m > n$, тогда

$$\phi_0(t-n\alpha)\phi_0(t-m\alpha) =$$
$$= 1(t-m\alpha)\cdot c^2\cdot e^{2pt}\cdot e^{-p\alpha(n+m)}. \qquad (8)$$

Правая часть неравенства (3) имеет вид

$$\phi_0^2(t-k\alpha) = 1(t-k\alpha)\cdot c^2\cdot e^{2pt}\cdot e^{-2p\alpha k}. \qquad (9)$$

Подставим (8) и (9) в (3) и получим

$$1(t-m\alpha)\cdot c^2\cdot e^{2pt}\cdot e^{-p\alpha(n+m)} \neq$$
$$\neq A\cdot 1(t-k\alpha)\cdot c^2\cdot e^{2pt}\cdot e^{-2p\alpha k}. \qquad (10)$$

При $k = m$, неравенство (10) не выполняется.

Таким образом, из функций вида $\phi_n(t) = 1(t-n\alpha)\cdot c\cdot e^{p(t-n\alpha)}$ составить ортогональный с весом базис нельзя.

Рассмотрим, можно ли составить ортогональный базис из функций вида

$$\phi_0(t-n\alpha) = 1(t-n\alpha)\cdot\left(c_1\cdot e^{p_1(t-n\alpha)} + c_2\cdot e^{p_2(t-n\alpha)}\right). \qquad (11)$$

Запишем левую часть (3), приняв $m > n$,

$$\phi_n(t)\cdot\phi_m(t) = 1(t-n\alpha)\cdot\left(c_1\cdot e^{p_1(t-n\alpha)} + c_2\cdot e^{p_2(t-n\alpha)}\right)\times$$
$$\times 1(t-m\alpha)\cdot\left(c_1\cdot e^{p_1(t-m\alpha)} + c_2\cdot e^{p_2(t-m\alpha)}\right) =$$
$$= 1(t-m\alpha)\cdot\left(c_1^2\cdot e^{-2p_1\alpha(n+m)}\cdot e^{2p_1t} +\right.$$
$$+c_1c_2\cdot e^{(p_1+p_2)t}\cdot\left(e^{-\alpha(p_1n+p_2m)} + e^{-\alpha(p_1m+p_2n)}\right) +$$
$$\left. + c_2^2\cdot e^{-2\alpha p_2(n+m)}\cdot e^{2p_2t}\right). \qquad (12)$$

Правая часть неравенства (3) имеет вид

$$\phi_k^2(t) = \phi_0^2(t-k\alpha) = 1(t-k\alpha)\cdot\left(c_1^2\cdot e^{2p_1(t-k\alpha)} +\right.$$
$$\left. +2c_1c_2\cdot e^{p_1(t-k\alpha)+p_2(t-k\alpha)} + c_2^2\cdot e^{2p_2(t-k\alpha)}\right) =$$
$$= 1(t-k\alpha)\cdot\left(c_1^2\cdot e^{-2p_1k\alpha}\cdot e^{2p_1t} +\right.$$
$$+2c_1c_2\cdot e^{-k\alpha(p_1+p_2)}\cdot e^{t(p_1+p_2)} +$$
$$\left. +c_2^2\cdot e^{-2p_2k\alpha}\cdot e^{2p_2t}\right). \qquad (13)$$

Неравенство (3) не выполняется, если (12) и (13) пропорциональны, то есть

$$\begin{cases} e^{-2p_1\alpha(n+m)} = A\cdot e^{-2p_1k\alpha}, \\ e^{-2\alpha p_2(n+m)} = A\cdot e^{-2p_2k\alpha}, \\ e^{-\alpha(p_1n+p_2m)} + e^{-\alpha(p_1m+p_2n)} = 2\cdot A\cdot e^{-k\alpha(p_1+p_2)}. \end{cases}$$

Полученная система имеет решение, если $p_1 = p_2$ или, если $n = m$, что противоречит исходным условиям.

Таким образом, из функций вида (11) можно составить ортогональный базис.

Рассмотрим, можно ли составить ортогональный базис из функций вида

$$\phi_n(t) = \phi_0(t-n\alpha) =$$
$$= 1(t-n\alpha)\cdot\left(c_1\cdot e^{p(t-n\alpha)} + c_2\cdot(t-n\alpha)\cdot e^{p(t-n\alpha)}\right). \qquad (14)$$

Запишем левую часть неравенства (3), приняв для определенности $m > n$,

$$\phi_0(t-n\alpha)\cdot\phi_0(t-m\alpha) =$$
$$= 1(t-m\alpha)\cdot\left(c_1\cdot e^{p(t-n\alpha)} + c_2\cdot(t-n\alpha)\cdot e^{p(t-n\alpha)}\right)\times$$
$$\times\left(c_1\cdot e^{p(t-m\alpha)} + c_2\cdot(t-m\alpha)\cdot e^{p(t-m\alpha)}\right) =$$
$$= 1(t-m\alpha)\cdot e^{-p\alpha(n+m)}\cdot e^{2pt}\times$$
$$\times\left(c_1^2 + c_1c_2(2t-m\alpha-n\alpha) + c_2^2(t-n\alpha)(t-m\alpha)\right). \qquad (15)$$

Правая часть неравенства (3) примет вид

$$\phi_k^2(t) = 1(t-k\alpha)\times$$
$$\times\left(c_1\cdot e^{p(t-k\alpha)} + c_2\cdot(t-k\alpha)\cdot e^{p(t-k\alpha)}\right)^2 =$$
$$= 1(t-k\alpha)\cdot e^{-2p\alpha k}\cdot e^{2pt}\times$$
$$\times\left(c_1^2 + 2c_1c_2(t-k\alpha) + c_2^2(t-k\alpha)^2\right). \qquad (16)$$

Запишем условия, при которых выражения (15) и (16) равны (т.е. неравенство (3) не выполняется),

$$\begin{cases} 2k = m+n, \\ t^2 - 2\alpha tk + k^2\alpha^2 = t^2 - \alpha t(m+n) + nm\alpha^2. \end{cases} \qquad (17)$$

Система (17) имеет единственное решение

$$k = m = n.$$

Полученный результат противоречит исходным данным, поэтому из функций вида (14) можно составить ортогональный базис.

Рассмотрим, можно ли составить ортогональный базис из функций вида

$$\phi_n(t) = \phi_0(t-n\alpha) = 1(t-n\alpha)\times$$
$$\times\left(c_1\cdot e^{\sigma(t-n\alpha)}\cdot\cos\omega(t-n\alpha) +\right.$$
$$\left. +c_2\cdot e^{\sigma(t-n\alpha)}\cdot\sin\omega(t-n\alpha)\right). \qquad (18)$$

Запишем левую часть неравенства (3), приняв для определенности $m > n$,

$$\phi_n(t)\cdot\phi_m(t) = \phi_0(t-n\alpha)\cdot\phi_0(t-m\alpha) =$$
$$= 1(t-m\alpha)\cdot\left(c_1\cdot e^{\sigma(t-n\alpha)}\cdot\cos\omega(t-n\alpha) +\right.$$
$$\left. c_2\cdot e^{\sigma(t-n\alpha)}\cdot\sin\omega(t-n\alpha)\right)\times$$
$$\times\left(c_1\cdot e^{\sigma(t-m\alpha)}\cdot\cos\omega(t-m\alpha) +\right.$$

$$+c_2 \cdot e^{\sigma(t-m\alpha)} \cdot \sin\omega(t-m\alpha)\Big) =$$
$$= 1(t-m\alpha)\cdot e^{2\sigma t}\cdot e^{-\sigma\alpha(n+m)} \times$$
$$\times\left(\frac{c_1^2-c_2^2}{2}\cos\omega(2t-n\alpha-m\alpha)+\right.$$
$$\left.+\frac{c_1^2+c_2^2}{2}\cos\alpha\omega(m-n)+c_1c_2\sin\omega(2t-n\alpha-m\alpha)\right). \quad (19)$$

Правая часть неравенства (3) запишется как

$$\phi_k^2(t) = \phi^2(t-k\alpha) =$$
$$= 1(t-k\alpha)\cdot(c_1\cdot e^{\sigma(t-k\alpha)}\cdot\cos\omega(t-k\alpha)+$$
$$+c_2\cdot e^{\sigma(t-k\alpha)}\cdot\sin\omega(t-k\alpha))^2 =$$
$$= 1(t-k\alpha)\cdot e^{2\sigma t}\cdot e^{-2\sigma k\alpha}\times$$
$$\times\left(\frac{c_1^2+c_2^2}{2}+\frac{c_1^2-c_2^2}{2}\cos 2\omega(t-k\alpha)+\right.$$
$$\left.+c_1c_2\sin 2\omega(t-k\alpha)\right). \quad (20)$$

Неравенство (3) не является истинным, если выражения (19) и (20) равны, т.е.

$$\begin{cases}\cos\omega(2t-n\alpha-m\alpha)=\cos 2\omega(t-k\alpha),\\ \cos\alpha\omega(m-n)=1,\\ \sin\omega(2t-n\alpha-m\alpha)=\sin 2\omega(t-k\alpha).\end{cases}$$

Решение полученной системы имеет вид

$$\begin{cases}m = k+\dfrac{T}{2\alpha}\cdot l,\\ n = k-\dfrac{T}{2\alpha}\cdot l,\end{cases} \quad (21)$$

где l – целое число, $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, T – период функций (18).

Из (21) следует, что если $\dfrac{T}{2\alpha}$ является целым числом, то неравенство (3) не выполняться.

Таким образом, из функций (18) можно составить ортогональный базис, если период T базисных функций не кратен 2α.

2. Существование оптимального интервала смещения базисных функций

Пусть детерминированный сигнал $s(t)$ представляется рядом

$$s(t) \approx \sum_{n=0}^{N} a_n\phi_n(t),$$

где $a_n = \int_0^{T_н} s(t)\phi_n(t)h(t)dt$, $T_н$ — интервал наблюдения сигнала.

Функционал ошибки представления сигнала рядом записывается как

$$I = \int_0^{T_н}\left[\frac{s(t)}{\sqrt{E_s}} - \frac{\sum_{n=0}^{N} a_n\phi_n(t)}{\sqrt{E_\Sigma}}\right]^2 dt =$$
$$= 2-2\frac{\int_0^{T_н} s(t)\cdot\sum_{n=0}^{N} a_n\phi_0(t-n\alpha)dt}{\sqrt{E_s}\cdot\sqrt{E_\Sigma(\alpha)}}, \quad (22)$$

где $E_\Sigma = \int_0^T [\sum_{n=0}^{N} a_n\phi_0(t-n\alpha)]^2 dt$ — энергия ряда, аппроксимирующего сигнал, E_s — энергия сигнала.

Покажем, что существует α, при котором функционал (22) принимает минимальное значение.

Рассмотрим предельные значения функционала (22). При бесконечно малых значениях α имеем

$$\lim_{\alpha\to 0} I =$$
$$= 2-2\lim_{\alpha\to 0}\frac{\int_0^{T_н} s(t)\cdot\sum_{n=0}^{N} a_n\phi_0(t)dt}{\sqrt{E_s}\cdot\sqrt{\int_0^{T_н}\left(\sum_{n=0}^{N} a_n\phi_0(t)\right)^2 dt}} =$$
$$= 2-2\frac{\int_0^{T_н} s(t)\cdot\phi_0(t)dt}{\sqrt{E_s}\cdot\sqrt{E\phi}}, \quad (23)$$

где $E_\phi = \int_0^{T_н}\phi_0^2(t)dt$ — энергия функции $\phi_0(t)$.

Таким образом,

$$\lim_{\alpha\to 0} I = const$$

и является конечной величиной.

При бесконечно больших значениях α выражение (22) перепишется в виде

$$\lim_{\alpha\to\infty} I =$$
$$= 2-2\frac{\int_0^{T_н}\left(s(t)\cdot(a_0\phi_0(t)+\sum_{n=1}^{N} a_n\phi_0(t-n\cdot\infty))\right)dt}{\sqrt{E_s}\cdot\sqrt{\int_0^{T_н}\left(a_0\phi(t)+\sum_{n=1}^{N} a_n\phi_0(t-n\cdot\infty)\right)^2 dt}}.$$

Поскольку $\phi_0(t-n\cdot\alpha)=1(t-n\cdot\alpha)\cdot\phi_0(t-n\cdot\alpha)$, а $s(t)$ и $\phi_0(t-n\cdot\alpha)$ имеют конечную энергию, то

$$\lim_{\alpha\to\infty} I = 2-2\frac{\int\limits_0^{T_н} s(t)\phi(t)dt}{\sqrt{E_s}\cdot\sqrt{E_\phi}} = const .$$

Интеграл ошибки минимален и равен нулю, если выполняется равенство

$$s(t)=\sum_{n=0}^{N} a_n\phi(t-n\alpha) .$$

Таким образом, существует α, при котором функционал (22) принимает минимальное значение.

Пусть случайный сигнал $x(t)$ на интервале наблюдения $T_н$ аппроксимируется рядом

$$x(t)\approx\sum_{n=0}^{N} y_n\phi_n(t) ,$$

где

$$y_n=\int\limits_0^{T_н} x(t)\phi_n(t)h(t)dt$$

являются случайными коэффициентами.

Функционал ошибки представления случайного сигнала в виде ряда записывается как

$$I = M\left\{\int\limits_0^{T_н}\left[\frac{x(t)}{\sqrt{E_x}}-\frac{\sum\limits_{n=0}^{N} y_n\phi_n(t)}{\sqrt{E_\Sigma}}\right]^2 dt\right\}, \qquad (24)$$

где $E_\Sigma = M\left\{\int\limits_0^{T_н}[\sum\limits_{n=0}^{N} y_n\phi_n(t)]^2 dt\right\}$ – математическое ожидание энергии ряда, аппроксимирующего сигнал, $E_x=\int\limits_0^{T_н} x^2(t)dt$ – энергия сигнала, $M\{\ \}$ – оператор математического ожидания.

Существование α, при котором функционал (24) принимает минимальное значение, показывается аналогично случаю разложения в ряд детерминированного сигнала.

3. Определение оптимального интервала смещения базисных функций

Будем считать, что детерминированный сигнал $s(t)$ является выходным сигналом некоторого фильтра с импульсной характеристикой $\phi_0(t)$.

Входным сигналом данного фильтра является сигнал $f(t)$. Коэффициентами ряда, в данном случае, будут являться отсчеты сигнала $f(t)$, взятые в моменты времени $n\alpha$.

Заметим, что сигнал $f(t)$ имеет модуль спектральной плотности, равный 1, а, следовательно, $f(t)$ содержит дельта-функцию.

В рассматриваемом случае интеграл ошибки запишется как

$$I = 2-2\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} f(n\alpha)\int\limits_0^{\infty} s(t)\phi_0(t-n\alpha)dt}{\sqrt{E_s}\cdot\sqrt{E_\Sigma(\alpha)}} . \qquad (25)$$

Определим энергию ряда, аппроксимирующего сигнал, с учетом того, что первое слагаемого ряда представляет собой импульсную характеристику фильтра $\phi_0(t)$

$$E_\Sigma(\alpha)=\int\limits_0^{\infty}\left(\phi_0(t)+\sum_{n=1}^{\infty} f(n\alpha)\phi_0(t-n\alpha)\right)^2 dt =$$

$$=\int\limits_0^{\infty}\phi_0^2(t)dt+2\int\limits_0^{\infty}\phi_0(t)\sum_{n=1}^{\infty} f(n\alpha)\phi_0(t-n\alpha)dt+$$

$$+\int\limits_0^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f(n\alpha)\phi_0(t-n\alpha)\right)^2 dt . \qquad (26)$$

Первое слагаемое в сумме (26) представляет собой энергию импульсной характеристики фильтра

$$E_\phi=\int\limits_0^{\infty}\phi_0^2(t)dt . \qquad (27)$$

Рассмотрим второй интеграл в выражении (26)

$$\int\limits_0^{\infty}\phi_0(t)\sum_{n=1}^{\infty} f(n\alpha)\phi_0(t-n\alpha)dt =$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty} f(n\alpha)\int\limits_0^{\infty}\phi_0(t)\phi_0(t-n\alpha)dt=\sum_{n=1}^{\infty} f(n\alpha)R_\phi(n\alpha) ,$$

где выражение

$$R_\phi(n\alpha)=\int\limits_0^{\infty}\phi_0(t)\phi_0(t-n\alpha)dt$$

представляет собой отсчет корреляционной функции импульсной характеристики линейной системы, взятый в моменты времени $n\alpha$.

Преобразуем третье слагаемое в (26)

$$J=\int\limits_0^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f(n\alpha)\phi_0(t-n\alpha)\right)^2 dt =$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} f(n\alpha)f(m\alpha)\int\limits_0^{\infty}\phi_0(t-m\alpha)\phi_0(t-n\alpha)dt .$$

Выражение

$$R_\phi(\alpha(n-m)) = \int_0^\infty \phi_0(t-m\alpha)\phi_0(t-n\alpha)dt$$

является отсчетом корреляционной функции $R_\phi(\alpha(n-m))$ импульсной характеристики $\phi_0(t)$ фильтра, взятом в момент времени $\alpha(n-m)$, поэтому можно записать

$$J = \sum_{m=1}^\infty \sum_{n=1}^\infty f(n\alpha)f(m\alpha)R_\phi(\alpha(n-m)).$$

Проведем группировку слагаемых при $R_\phi(\alpha(n-m))$ и получим

$$J = E_\phi \sum_{n=1}^\infty f^2(n\alpha) + 2\sum_{m=1}^\infty R_\phi(\alpha m)\sum_{n=1}^\infty f(n\alpha)f((n+m)\alpha).$$

Таким образом,

$$E_\Sigma(\alpha) = E_\phi + 2\sum_{n=1}^\infty f(n\alpha)R_\phi(n\alpha) + E_\phi\sum_{n=1}^\infty f^2(n\alpha) +$$

$$+2\sum_{m=1}^\infty R_\phi(\alpha m)\sum_{n=1}^\infty f(n\alpha)f((n+m)\alpha). \quad (28)$$

Подставляя (28) в (25), получим зависимость функционала ошибки от α. Данная зависимость позволяет определить оптимальное значение α.

Пример. Пусть задан детерминированный сигнал

$$s(t) = 1(t)\cdot(-\frac{10}{3}e^{-5t} + 12e^{-3t} - \frac{35}{3}e^{-2t} + 3e^{-t}),$$

спектральная плотность которого имеет вид

$$S(j\omega) = \frac{(j\omega-3)(j\omega-5)}{(j\omega+1)(j\omega+2)(j\omega+3)(j\omega+5)}.$$

Необходимо представить $s(t)$ в виде ряда

$$s(t) \approx \tilde{s}(t) = \sum_{n=0}^\infty f(n\alpha)\phi_0(t-n\alpha),$$

В котором функции $\phi_0(t-n\alpha)$ имеют модуль спектральной плотности, совпадающий с модулем спектральной плотности сигнала $s(t)$

$$\Phi(\omega) = S(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(\omega^2+1)(\omega^2+4)}}, \quad (29)$$

и минимальный аргумент спектральной плотности, а коэффициенты $f(n\alpha)$ являются отсчетами сигнала $f(t)$, поступающего на вход фильтра амплитудно-частотной характеристикой вида (29).

Решение. Определим функцию $\phi_0(t)$. Изображение по Лапласу от функции $\phi_0(t)$ не должно иметь нулей и полюсов в правой половине комплексной плоскости. Используя методику определения комплексных коэффициентов передачи минимально-фазовых цепей, изложенную в работе [2], получим спектральную плотность функции $\phi_0(t)$ в виде

$$\Phi(j\omega) = \frac{1}{(j\omega+1)(j\omega+2)}. \quad (30)$$

Обратное преобразование Фурье от выражения (30) дает функцию $\phi_0(t)$

$$\phi_0(t) = 1(t)\cdot(e^{-t} - e^{-2t}).$$

Тогда базисные функции запишутся как

$$\phi_0(t-n\alpha) = \\ = 1(t-n\alpha)\cdot\left(e^{-(t-n\alpha)} - e^{-2(t-n\alpha)}\right). \quad (31)$$

Спектральная плотность сигнала $f(t)$ имеет вид

$$F(j\omega) = \frac{S(j\omega)}{K(j\omega)} = \frac{(j\omega-3)(j\omega-5)}{(j\omega+3)(j\omega+5)}. \quad (32)$$

Определим сигнал $f(t)$, взяв обратное преобразование Фурье от выражения (32)

$$f(t) = \delta(t) + 1(t)\cdot(24e^{-3t} - 40e^{-5t}).$$

После необходимых вычислений получим аналитическое выражение зависимости функционала ошибки от интервала α. Графическое изображение данной зависимости показано на рис. 1.

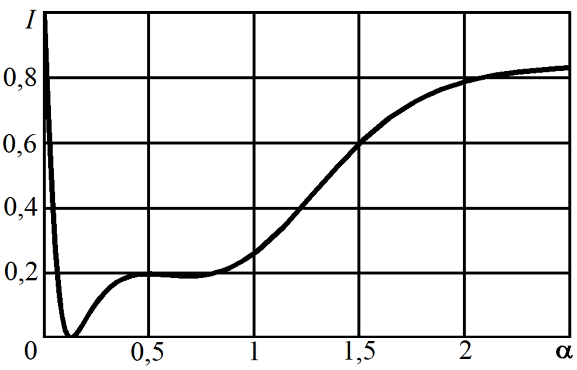


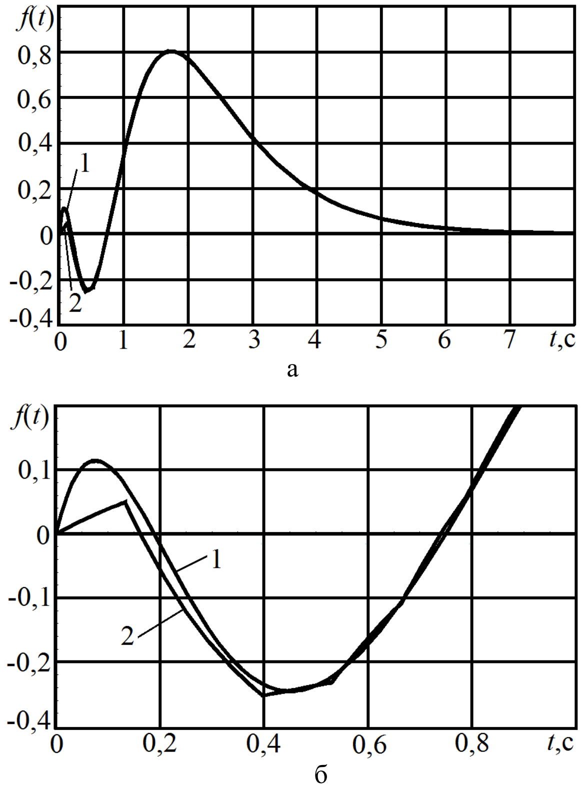
Рис. 1. Зависимость функционала ошибки от интервала смещения базисных функций

Интеграл ошибки достигает своего минимального значения 0,000844452, если интервал смещения базисных функций равен 0,132654.

На рис. 2 показаны графические изображения сигнала и результата разложения его в ряд.

Функционал ошибки разложения случайного сигнала $x(t)$ в ряд по эквидистантным функциям задается равенством (24), преобразовав которое получим

$$I = 2 - 2\frac{M\left\{\int_0^{T_н} x(t)\cdot\sum_{n=0}^N y_n\phi_0(t-n\alpha)dt\right\}}{\sqrt{E_x}\cdot\sqrt{E_\Sigma(\alpha)}}. \quad (33)$$



1 — сигнал; 2 — ряд

Рис. 2. Результат аппроксимации сигнала эквидистантным рядом

Базисные функции $\phi_0(t-n\alpha)$ имеют модуль спектральной плотности $\Phi(\omega)$, связанный с энергетическим спектром $X(\omega)$ сигнала $x(t)$ соотношением

$$\Phi^2(\omega) = X(\omega),$$

и определяются аналогично базисным функциям, используемым при разложении в ряд детерминированного сигнала.

Будем считать, что $x(t)$ является выходным сигналом фильтра с квадратом модуля амплитудно-частотной характеристики равным $X(\omega)$. Входным сигналом указанного фильтра является случайный сигнал $y(t)$.

Определим E_Σ в равенстве (33)

$$E_\Sigma =$$

$$= M\left\{\int_0^{T_н}\left[\sum_{n=0}^{N} y_n\phi_0(t-n\alpha)\right]^2 dt\right\} =$$

$$= M\left\{\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{N} y(n\alpha)y(m\alpha)\int_0^{T_н}\phi_0(t-n\alpha)\phi_0(t-m\alpha)dt\right\} =$$

$$= \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{N} M\{y(n\alpha)y(m\alpha)\}\int_0^{T_н}\phi_0(t-n\alpha)\phi_0(t-m\alpha)dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{N} R_y(n\alpha, m\alpha)\int_0^{T_н}\phi_0(t-n\alpha)\phi_0(t-m\alpha)dt.$$

При вычислениях было учтено, что

$$M\{y(n\alpha)y(m\alpha)\} = R_y(n\alpha, m\alpha)$$

является корреляционной функцией случайного процесса $y(t)$, определенной для моментов времени $n\alpha$ и $m\alpha$.

Если процесс $y(t)$ является эргодическим случайным процессом, то

$$R_y(n\alpha, m\alpha) = R_y((n-m)\alpha).$$

Учитывая, что $y(t)$ является дельта-коррелированным случайным процессом, запишем

$$E_\Sigma = \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{N} R_y((n-m)\alpha)\times$$

$$\times \int_{\max\binom{n\alpha}{m\alpha}}^{T}\phi_0(t)\phi_0(t+n\alpha-m\alpha)dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{N}\int_{n\alpha}^{T_н}\phi_0^2(t)dt. \qquad (34)$$

Поскольку

$$x(t) = \int_0^{T_н} y(\tau)\phi_0(t-\tau)d\tau,$$

то числитель дроби в формуле (33) примет вид

$$Q = M\left\{\int_0^{T_н} x(t)\cdot\sum_{n=0}^{N} y_n\phi_0(t-n\alpha)dt\right\} =$$

$$= M\left\{\int_0^{T_н}\int_0^{T_н} y(\tau)\phi_0(t-\tau)d\tau\sum_{n=0}^{N} y_n\phi_0(t-n\alpha)dt\right\} =$$

$$= \int_0^{T_н}\int_0^{T_н}\sum_{n=0}^{N} M\{y(\tau)y(n\alpha)\}\phi_0(t-\tau)\phi_0(t-n\alpha)d\tau dt =$$

$$= \int_0^{T_н}\int_0^{T_н}\sum_{n=0}^{N} R_y(\tau-n\alpha)\phi_0(t-\tau)\phi_0(t-n\alpha)d\tau dt.$$

Поскольку $y(t)$ является дельта-коррелированным случайным процессом, то

$$Q = \sum_{n=0}^{N}\int_{n\alpha}^{T_н}\phi_0^2(t)dt. \qquad (35)$$

Подстановка выражений (34) и (35) в соотношение (33) дает функционал ошибки в виде

$$I = 2 - 2\frac{\sqrt{\sum_{n=0}^{N}\int_{n\alpha}^{T_н}\phi_0^2(t)dt}}{\sqrt{E_x}}\ . \qquad (36)$$

Из выражения (36) следует, что если

$$\sum_{n=0}^{N}\int_{n\alpha}^{T_н}\phi_0^2(t)dt = E_x\ ,$$

то математическое ожидание функционала ошибки равно нулю.

Выводы

Из импульсных характеристик физически реализуемых линейных фильтров второго и выше порядков можно составить ортогональные базисы.

Существует интервал смещения базисных функций, который минимизирует среднюю квадратичную ошибку аппроксимации сигнала рядом.

Литература

1. Дегтярев, А.Н. Быстро сходящиеся ортогональные ряды в теории связи [Текст] / А.Н. Дегтярев // Радіоелектронні і комп'ютерні системи. — 2010. – № 7 (48). – С. 242 –250.

2. Лэм, Г. Аналоговые и цифровые фильтры [Текст] / Г. Лэм. – М.: Мир, 1982. – 592 с.

Поступила в редакцию 15.03.2012

Рецензент: д-р техн. наук, проф., проф. кафедры Э.Ф. Бабуров, Севастопольский национальный технический университет, Севастополь, Украина.

МІНІМІЗАЦІЯ ПОМИЛКИ РОЗКЛАДАННЯ СИГНАЛІВ У РЯД ПО ЕКВІДИСТАНТНИХ ФУНКЦІЯХ, ЯКІ ФІЗИЧНО РЕАЛІЗОВУЮТЬСЯ

А.М. Дегтярьов

У статті показано, що з імпульсних характеристик лінійних фільтрів, що фізично реалізовуються, другого і вище за порядки можна скласти ортогональні базиси. Також показано, що існує інтервал зсуву базисних функцій, який мінімізує середню квадратичну помилку апроксимації сигналу поряд. Розглядаються умови існування ортогональних базисів, складених з еквідистантних функцій, які фізично реалізуються. Показано, що існує інтервал зсуву базисних функцій, при якому досягається мінімум помилки апроксимації сигналу.

Ключові слова: функції, які фізично реалізуються, еквідистантні функції, ортогональність, функціонал помилки, ряд.

MINIMIZATION OF ERROR IN LINEAR SIGNAL SPLITTING BY THE EQUI-DISTANT PHYSICALLY REALIZED FUNCTIONS

A.N. Degtyarev

It is rotined in the article, that from impulsive descriptions of the physically realized linear filters second and higher orders it is possible to make ortogonal bases. It is also rotined that exists interval of displacement of base functions, which minimizes the middle quadratic error of approximation of signal alongside. The conditions of existence of orthogonal bases composed of physically realized equi-distant functions are considered. The existence of basis function shift gap having a minimal signal approximation error is demonstrated.

Key words: physically realized functions, equi-distant functions, orthogonality, error functional, linear.

Дегтярев Андрей Николаевич – канд. техн. наук, доцент кафедры судовых и промышленных электромеханических систем Севастопольского национального технического университета, Севастополь, Украина, e-mail: sevlana2008@yandex.ru.