

УДК 681.621.510

В.А. БАГУТА¹, Г.В. КУЛИНЧЕНКО²¹ *Шосткинський інститут Сумського державного університету, Шостка, Україна*² *Сумський державний університет, Суми, Україна*

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ ПОЛИМЕРА В КАНАЛЕ ФИЛЬЕРЫ С УЧЕТОМ ЕГО ПРИСТЕННОГО СКОЛЬЖЕНИЯ

Описана математическая модель течения раствора пленкообразующего полимера, характеризующегося неньютоновскими свойствами в формирующем канале фильеры. В модели учитывается аномалия пристенного скольжения полимера. Расчеты и моделирование выполнены в математическом пакете Mathcad. Получено распределение поля скоростей композиции, позволяющее прогнозировать устойчивость и стационарность течения полимера в формирующей щели фильеры. Переходная характеристика объекта управления, представляемая предложенной моделью, описывается параметрами давление/расход.

Ключевые слова: математическая модель, течение полимера, π - эффект, переходная характеристика.

Введение

При производстве целлюлозных пленок, в зависимости от назначения пленок, в технологии предусматривается изменение технологических режимов и операций. Стремление обеспечить наибольшую производительность технологического процесса изготовления пленок обуславливает непрерывный характер протекания процесса, что сопряжено с постоянным энергопотреблением. При этом, организация крупнотоннажного производства предполагает дополнительные энергозатраты при сушке растворителей. Решение задач энергосбережения и экологии приводит к необходимости уменьшения количества растворителей в растворе, соответственно увеличивается вязкость полимерного раствора, изменяется состав и реология применяемого раствора полимера. Такие изменения в процессе обуславливают корректировку известных описаний всего процесса и объекта управления. Тем не менее, задача обеспечения стабильности процесса нанесения раствора на движущуюся подложку системой дозирования раствора по ширине и длине слоя пленки остается актуальной [1].

Основная трудность решения задачи дозирования состоит в обеспечении постоянного расхода раствора по всему фронту щелевого канала. Эта трудность связана с тем, что давление вдоль фронта формирующей щели фильеры распределяются неравномерно, в результате на разных участках щели фильеры наблюдается неодинаковый объемный расход и, как следствие, возникает поперечная разнотолщинность получаемой пленки. Таким образом,

реализация малотоннажного производства нитроцеллюлозных пленок предполагает наличие математического описания объекта управления, которое позволяет оптимизировать процесс посредством соответствующих каналов управления, допускающих адаптацию к изменяющимся во времени параметрам.

Постановка задачи исследования

Экструзионному способу производства различных пленок посвящено достаточное количество работ. Однако, характеристики и параметры процессов, исследуемые в этих работах, применимы при многотоннажном производстве, основываются на предположениях о стационарности параметров, описывающих процесс отлива пленок.

Задачей данной работы является получение математического описания движения пленкообразующего полимера, в щели формирующего инструмента - фильеры, с учетом реологии полимерного раствора. Принимая во внимание вязкоупругие свойства композиций, используемых при отливе пленок, приходится учитывать нелинейный характер зависимостей параметров движения раствора от управляющих воздействий, которые характеризуются нестационарностью.

Пленкообразующий раствор является неньютоновской псевдопластичной жидкостью, кривая течения которого сохраняет нелинейный характер при отсутствии первоначального напряжения сдвига (рис.1). Как видно из экспериментально полученной характеристики с помощью ротационного аналого-

вого вискозиметра Брукфильда, с возрастанием напряжения сдвига ω кажущаяся вязкость η уменьшается [2]. Это обстоятельство приводит к усложнению описания искомой модели.

Дополнительной сложностью получения модели течения полимерной композиции в щели фильеры является то, что это течение описывается уравнением Навье - Стокса в частных производных. Поскольку в настоящее время неизвестно аналитическое решение этого уравнения, то его использование в построении модели течения композиции является проблематичным, в силу больших вычислительных и временных затрат.

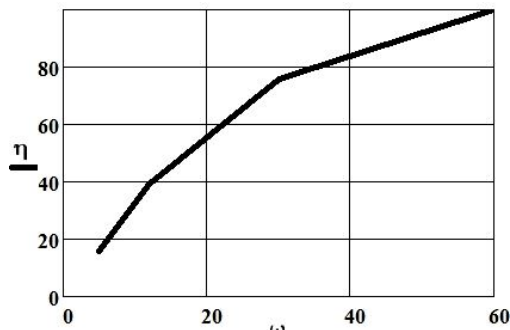


Рис. 1. Зависимость вязкости от скорости сдвига

Относительно простым, и в тоже время, дающим достаточно точные результаты, является степенное аналитическое выражение, описывающее зависимость градиента скорости от напряжения сдвига и реологических констант, уравнение Освальда и де Виля:

$$\eta = B|\dot{\gamma}|^{n-1},$$

где η – вязкость жидкости;

B – коэффициент, характеризующий вязкость системы;

$\dot{\gamma}$ – скорость сдвига;

n – отклонение свойств используемой жидкости от свойств ньютоновской жидкости.

Общепринятым подходом при расчете поля скоростей течения жидкости в канале является допущение, что скорость течения у стенки равняется нулю, т.е. предполагается «прилипание» жидкости к стенкам формующей щели. Это положение используется при задании начальных условий интегрирования.

Однако во время движения полимера вблизи твердых поверхностей при соответствующих параметрах текущей жидкости проявляется аномалия, заключающаяся в возникновении проскальзывания, называемая пристенным эффектом, или π -эффектом. Наличие пристенного эффекта приводит к нарушению гипотезы о «прилипании» и необходимости задания соответствующих граничных условий. Данный эффект практически приводит к увеличе-

нию фактического расхода полимера через поперечное сечение формующего канала, по сравнению с расходом вычисленным по формуле Пуазеля [3].

Поскольку в разрабатываемой модели особый интерес представляется в аспекте канала, управляющего толщиной пленки, то задача построения модели формулируется как нахождение связи параметров вход/выход.

Выходной параметр объекта управления – толщина пленки, которая зависит от мгновенного расхода полимерного раствора через значения технологических параметров и пропорционально связана с полем скоростей течения используемой композиции. Тогда формализуя задачу построения модели, ее можно представить как динамическую задачу получения уравнения движения жидкости в щели в виде:

$$V(t) = f(P(t)),$$

где t – реальное время;

$V(t)$ – скорость движения полимера на выходе из формующей щели фильеры;

$P(t)$ – давление на входе в формующую щель фильеры.

Рассмотрим изотермическое нестационарное течение раствора полимера между двумя неподвижными параллельными пластинами длиной L и шириной S . Расстояние между пластинами $H=2h$. Пространственная ось z направлена по оси симметрии, а ось y – по глубине канала. Течение жидкости происходит за счет приложения на входе в канал давления P_0 , действующего на входе в канал фильеры. В качестве реологического уравнения используем уравнение Балкли - Гершеля для нелинейной вязкопластической жидкости.

$$\tau = \tau_0 \sin g(\dot{\gamma}) + B|\dot{\gamma}|^{n-1} \dot{\gamma}, \quad (1)$$

где τ – напряжение сдвига;

τ_0 – начальный предел текучести (при $\tau < \tau_0$ жидкость ведет себя как твердое тело, и подчиняется законам Гука, при $\tau > \tau_0$ жидкость начинает течь);

B – коэффициент, который характеризует вязкость системы (определяется опытным путем [2]);

n – отклонение свойств данной жидкости от свойств ньютоновской жидкости (определяется опытным путем).

На рисунке 2 представлена схема течения вязкопластической жидкости с пристеночным скольжением в щели фильеры, на входе которой действует давление P_0 .

С учетом принятых обозначений и допущений, в соответствии со схемой рис. 2, уравнение (1) примет вид:

$$\tau = B \left| \frac{\partial V}{\partial z} \right|^{n-1} \frac{\partial V}{\partial z}. \quad (2)$$

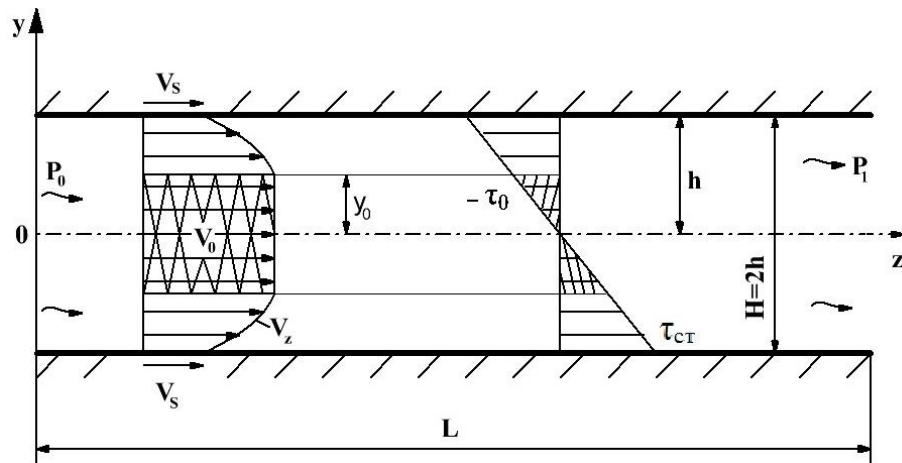


Рис. 2. Схема течения вязкопластической жидкости со скольжением

Граничные условия у стенок, учитывающие аномалию пристенного скольжения, описываются выражением:

$$V_s = \begin{cases} 0, & \text{при } \tau \leq \tau_{ct}, \\ \frac{\beta_s(\tau_{ct})|\tau_{ct}|}{(k_0 H)^{m_0}}, & \text{при } \tau > \tau_{ct}, \end{cases} \quad (3)$$

где β_s – «истинный» коэффициент скольжения;
 τ_{ct} – касательное напряжение на стенке;
 k_0 – коэффициент перехода от визкометрических измерений в капилляре на течение между пластин;
 H – высота щели формирующего капилляра;
 m_0 – коэффициент определяемый экспериментально.

Из уравнения (3) видно, что скольжение по поверхности капилляра начнется только тогда, когда касательное напряжение у стенок будет больше некоторого порогового значения τ_{ct} . Учет поправки скорости, связанного с наличием пристенного скольжения используемой композиции, изменяет картину распределения скоростей течения, соответственно и поля величины расхода при формировании пленки.

Решение задачи

Рассмотрим двумерное течение вязкой несжимаемой жидкости под действием давления. Считаем, что составляющая скорости по оси $y = 0$, т.е. течение плоскопараллельное, распределение давления по длине щели равномерное, деформация элементов, по сравнению с их линейными размерами незначительна. Исследуемым параметром принимается потенциальная фазовая переменная – скорость жидкости вдоль оси z .

Разобьем исследуемое пространство на элементы размером $\Delta z \times \Delta y$ (рис. 3)[4].

Будем считать, что каждый элемент имеет мас-

су m , а его поведение описывается уравнением Балкли-Гершеля (2). Уравнение равновесия для каждого элемента будет иметь вид:

$$\sum F = ma = F_p - F_{tp}, \quad (4)$$

где a – ускорение;
 m – масса;
 F_p – сила давления;
 F_{tp} – сила вязкого трения.
 В свою очередь:

$$F_p = \Delta P \cdot \Delta y \cdot h, \quad (5)$$

где ΔP – разность давлений;
 h – толщина элемента.

$$F_{tp} = \tau \cdot \Delta z \cdot h. \quad (6)$$

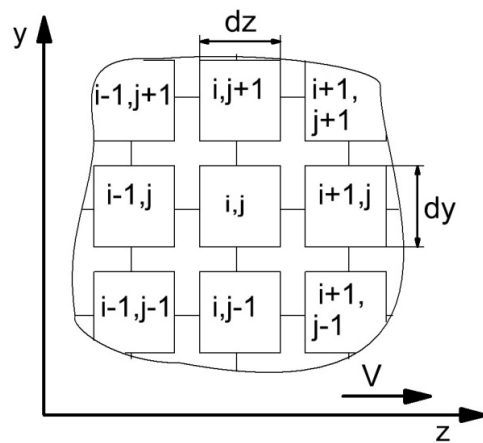


Рис. 3. Схема модели полимера

Для элемента жидкости с индексами i, j , в рамках дискретной модели выражение (5) для момента времени k примет вид:

$$F_p(k) = [P_{i,j}(k) - P_{i+1,j}(k)] \cdot \Delta y \cdot h. \quad (7)$$

Касательное напряжение, согласно (2) для дискретной модели вычисляется следующим образом:

$$\tau(k) = -\frac{B}{\Delta y} (V_{i,j+1}(k) - 2V_{i,j}(k) + V_{i,j-1}(k))^n. \quad (8)$$

С учетом выражения (8), выражение (6) примет

вид:

$$F_{\text{тп}}(k) = -\frac{B}{\Delta y} (V_{i,j+1}(k) - 2V_{i,j}(k) + V_{i,j-1}(k))^n \cdot \Delta z \cdot h. \quad (9)$$

Подставим (7) и (9) в уравнение равновесия (4) получим:

$$m a_{i,j}(k) = [P_{i,j}(k) - P_{i+1,j}(k)] \cdot \Delta y \cdot h + \frac{B \cdot \Delta z \cdot h}{\Delta y} (V_{i,j+1}(k) - 2V_{i,j}(k) + V_{i,j-1}(k))^n. \quad (10)$$

Масса элементарной ячейки жидкости выражается как произведение плотности на объем данной ячейки, а ускорение выражается через разность скоростей:

$$m = \rho \cdot v = \rho \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot h, \quad (11)$$

$$a_{i,j}(k) = \frac{V_{i,j}(k+1) - V_{i,j}(k)}{\Delta t}. \quad (12)$$

Уравнение (10) после подстановки выражений (11) и (12) примет вид:

$$\rho \frac{V_{i,j}(k+1) - V_{i,j}(k)}{\Delta t} = \frac{P_{i,j}(k) - P_{i+1,j}(k)}{\Delta z} + \frac{B}{\Delta y^2} (V_{i,j+1}(k) - 2V_{i,j}(k) + V_{i,j-1}(k))^n. \quad (13)$$

Уравнение (13), при моделировании позволяет на каждом шаге дискретного времени определять новое состояние (скорость) каждого элемента. Функция переходов для внутренних элементов запишется следующим образом:

$$V_{i,j}(k+1) = V_{i,j}(k) + \frac{\Delta t}{\rho} \left[\frac{\Delta P}{\Delta z} + \frac{B}{\Delta y^2} (V_{i,j+1}(k) - 2V_{i,j}(k) + V_{i,j-1}(k))^n \right]. \quad (14)$$

Результаты

Процесс изменения скорости композиции в формирующем канале фильеры, вычислялся численным моделированием уравнения (13) с граничными условиями (3) в математическом пакете *Mathcad*.

Численные значения параметров раствора полимера соответствовали реальным, измеренным при температуре 20°C: $\rho = 940 \text{ кг/м}^3$, $B = 5 \text{ Па} \cdot \text{с}$, $n = 0,49$.

Размеры канала фильеры: $z = 1 \text{ мм}$, $y = 0,2 \text{ мм}$.

В расчетах принято: размер элементарной ячейки $\Delta z \times \Delta y = 0,01 \times 0,01 \text{ мм}$, дискретизация по времени $\Delta t = 0,0001 \text{ с}$.

В результате моделирования получена переходная характеристика объекта управления, которой является параметр - расход полимера на выходе щели фильеры (рис.4).

Излом на характеристике наблюдается в мо-

мент достижения параметром касательного напряжения на стенке величины порогового значения, соответствующего граничным условиям (2).

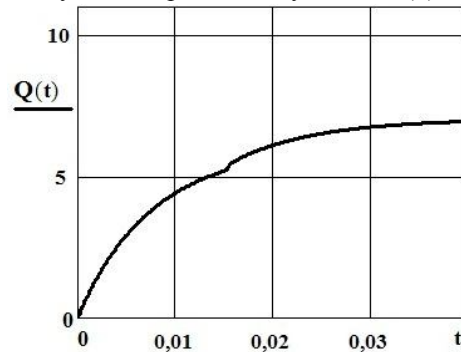


Рис. 4. Переходная характеристика объекта

В плане исследования равномерности толщины пленки по ширине канала фильеры в модели исследовалось распределение поля скоростей во времени.

При этом особый интерес представляет отсутствие волнового течения жидкости, определяющего устойчивость процесса пленкообразования.

На рисунке 5 отображено изменение профиля скоростей по поперечному сечению щели в различные моменты времени. На нем кривая 1 соответствует начальному моменту времени $t = 0,01 \text{ с}$, при этом касательное напряжение на стенке меньше порогового значения, скорость у стенки равна 0.

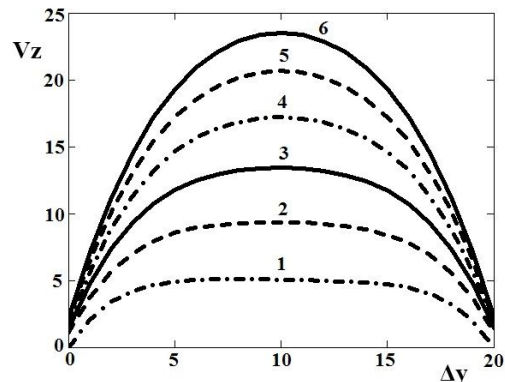


Рис. 5. Профили скоростей течения полимера

Кривая 2 соответствует моменту времени $t = 0,016 \text{ с}$, при этом напряжение у стенки достигает порогового значения, скорость у стенки отлична от нуля.

Кривые 3,4,5 - показывают дальнейшее развитие профиля скорости, скорость у стенки растет незначительно.

Кривая 6 - характеризует установившийся профиль скорости на выходе из щели, что соответствует стационарному режиму течения

Заключение

Получена математическая модель движения пленкообразующего полимера, в щели формирующего

инструмента, с учетом реологических свойств полимера и его пристенного проскальзывания у твердой стенки в нестационарном режиме.

Описанная модель позволяет исследовать режимы течения полимерных композиций в зависимости от параметров, используемого при отливе пленок, оборудования, а также реологических и физико-химических характеристик полимерной композиции.

Расчеты, проведенные на модели, позволяют оценить эффективность канала управления.

Литература

1. Багута, В.А. Задачи управления в процессе отлива пленок [Текст] / В. А. Багута., Г. В. Кулинченко // IX Всеукраїнська науково-технічна конференція «Фізичні процеси та поля технічних і

біологічних об'єктів». – Кременчук, 2010. – С. 9-10.

2. Багута, В.А. Оценка коэффициентов модели течения неньютоновской жидкости [Текст] / В.А. Багута., Г.В. Кулинченко // XI Міжнародна науково - технічна конференція «Фізичні процеси та поля технічних і біологічних об'єктів». – Кременчук, 2012. – С. 7- 8.

3. Янков, В.И. Переработка волокнообразующих полимеров. Основы реологии полимеров и течения полимеров в каналах [Текст] / В.И. Янков, В.И. Боярченко. - Москва - Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». Институт компьютерных исследований, 2008. – 264 с.

4. Бобков, С.П. Моделирование плоскопараллельного течения жидкости с использованием теории клеточных автоматов [Текст] / С.П. Бобков // Современные наукоемкие технологии. – 2008. – №3. – С. 59-63.

Поступила в редакцию 3.11.2012

Рецензент: д-р техн. наук, профессор, зав. каф. компьютерных наук А.С. Довбыш, Сумский государственный университет, Сумы, Украина

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕЧІЇ ПОЛІМЕРУ В КАНАЛІ ФІЛЬ'ЄРИ З УРАХУВАННЯМ ЙОГО ПРИСТІННОГО КОВЗАННЯ

В.А. Багута, Г.В. Кулінченко

Описано математичну модель течії розчину пленкоутворюючого полімеру, що характеризується неньютоновськими властивостями в формуючому каналі філь'єри. У моделі враховується аномалія пристінного ковзання полімеру. Розрахунки і моделювання виконані в математичному пакеті Mathcad. Отримано розподіл поля швидкостей композиції, що дозволяє прогнозувати стійкість і стаціонарність течії полімеру в формуючій щілині філь'єри. Перехідна характеристика об'єкта управління, яка надається запропонованою моделлю, описується параметрами тиск / витрата.

Ключові слова: математична модель, течія полімеру, π - ефект, перехідна характеристика.

MATHEMATICAL MODELING FLOW POLYMERS IN THE CHANNEL DIES IN VIEW OF ITS SLIDING WALL

V.A. Bahuta, G.V. Kulichenko

The mathematical model flow solution of film-forming polymer is characterized by non-Newtonian properties of the channel in the forming die. The model takes into account the anomaly wall slip polymer. Calculations and simulations are made in the mathematical package Mathcad. The distribution of the velocity field of the composition, which allows to predict the stability and the stationary flow of the polymer in the mold slit die. Transient response of the controlled object, represented by the proposed model, described by the parameters pressure / flow.

Keywords: mathematical model, flow polymers, π – effect, transient response.

Багута Виктор Анатольевич – аспирант, кафедры компьютерных наук, Сумский государственный университет, Сумы, Украина, e-mail: viktrbaguta@gmail.com

Кулинченко Георгий Васильевич - канд. техн. наук доцент кафедры компьютерных наук, Сумский государственный университет, Сумы, Украина, e-mail: heorhy@rambler.ru