УДК 519.6+517

В.А. РВАЧЕВ, Т.В. РВАЧЕВА

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Украина

О ПОСТРОЕНИИ МУЛЬТИМОДАЛЬНЫХ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ СЕМЕЙСТВ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ЗАКОНОВ

Предложен метод приближенного нахождения нормирующего множителя для многопараметрического мультимодального экспоненциального семейства плотностей распределения вероятностей – с помощью представления подынтегральной функции отрезком обобщенного ряда Тейлора для бесконечно дифференцируемых функций на основе атомарных функций – специальных решений с компактным носителем обыкновенных линейных функционально-дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и линейными отклонениями независимой переменной, обладающих хорошими аппроксимационными свойствами.

Ключевые слова: *мультимодальные многопараметрические экспоненциальные семейства плотностей, атомарная функция, обобщенный ряд Тейлора, базисные функции обобщенного ряда Тейлора.*

Введение

В задачах, связанных с обработкой сигналов и изображений, измерительной техникой, временными рядами, в областях статистической радиотехники, информатики, принятия решений и управления, робототехники и статистической физики актуальной является задача нахождения эффективных, оптимальных по объему вычислений методов оценки параметров мультимодальных многопараметрических плотностей вероятностей случайных величин [1-10]. Широко применяющиеся непараметрические методы оценки плотности вероятностей случайных величин обладают рядом существенных недостатков и используются часто только потому, что отсутствует достаточная информация о мультимодальных многопараметрических экспоненциальных семействах плотностей вероятностей. Главная трудность здесь состоит в явном вычислении нормирующего множителя для этих плотностей. Достоинством экспоненциальных мультимодальных многопараметрических семейств плотностей

$$f(x)=\frac{1}{C(\lambda_1,\dots,\lambda_m)}e^{\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i\psi_i(x)}$$

является тот факт, что они обладают нетривиальными достаточными статистиками [11].

В настоящей статье предложен метод нахождения нормирующего множителя $C(\lambda_1,\dots,\lambda_m)$ как функции параметров $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ с использованием обобщенного ряда Тейлора, предложенного В.А. Рвачевым в [12,13] и исследованного в [14,15]. В [12,13] показано, что если функция f принадлежит классу H_ρ, где $\rho\in[1;2)$, т. е. если $f\in C^\infty[-1,1]$ и $\exists\rho\in[1,2):\|f^{(k)}\|_{C[-1,1]}\le c(f)\rho^k 2^{\frac{k(k+1)}{2}}, k=0,1,2,\dots$, то f раскладывается в так называемый обобщенный ряд Тейлора:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k\in N_n}f^{(n)}(x_{n,k})\varphi_{n,k}(x), \qquad (1)$$

где:

$$N_n=\{-2^{n-1},-2^{n-1}+1,\dots,2^{n-1}-1,2^{n-1}\},\quad n\ne 0;$$
$$N_0=\{-1,0,1\};$$
$$x_{n,k}=\frac{k}{2^{n-1}},\ n\ne 0,\ k\in N_n;\ x_{o,k}=k,\ k\in N_0,$$

а функции $\varphi_{n,k}(x)\in H_1$ – базисные функции обобщенного ряда Тейлора – однозначно определяются из условий:

$$(\varphi_{n,k}(x_{m,s}))^{(m)}=\delta_n^m\delta_s^k.$$

Назовем точку $x_{n,k}$ собственной точкой функции $\varphi_{n,k}(x)$.

Для дальнейшего изложения нам будет удобнее обозначать базисные функции $\varphi_{n,k}$ так, чтобы сразу была видна собственная точка функции. Пусть

$$\hat\varphi_{n,x_{n,k}}(x)=\varphi_{n,k}(x).$$

Построение базисных функций $\hat\varphi_{n,x_{n,k}}(x)$ было проведено в [16]; там же получены асимптотические формулы для этих функций. В работе [17] были выписаны явные выражения для $\hat\varphi_{n,x_{n,k}}(x),\ n=0,\dots,3$.

Класс $H\rho$ можно рассматривать и на промежутке $[-K,K]$, $K=2,3,\dots$ Обозначим его $H_\rho[-K,K]$.

В этом случае для $1\le\rho<2$ множество $X_n(K)$

точек $x_{n,k}$, в которых задаются значения производных порядка n, определяется так:

$X_0(K) = \{x_{0,k} = k,\ k = -K,...,K\}$,

$$X_n(K) = \{x_{n,k} = \frac{k}{2^{n-1}},\ k = -2^{n-1}K,...,2^{n-1}K\},\ n > 0 ,$$

и обобщенный ряд Тейлора будет иметь вид:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{x_{n,k} \in X_n(K)} f^{(n)}(x_{n,k}) \hat{\varphi}_{n,x_{n,k}}(x) \quad (2)$$

В этом ряду функции $\hat{\varphi}_{n,x_{n,k}}$ для $x_{n,k} \in (-1,1)$ остаются теми же, что и для ряда (1) при $x \in [-1,1]$; всюду вне этого промежутка доопределяем их нулем. В случае же $x_{n,k} \notin (-1,1)$ всегда найдется целое число m такое, что $x_{n,k} - m \in (-1,1)$, и тогда функция $\hat{\varphi}_{n,x_{n,k}}(x)$ строится следующим образом:

$$\hat{\varphi}_{n,x_{n,k}}(x) = \hat{\varphi}_{n,x_{n,k}-m}(x - m) .$$

Нахождение нормирующего множителя с использованием обобщенного ряда Тейлора

Пусть экспоненциальное m-параметрическое семейство плотностей выглядит следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{C(\lambda_1,...,\lambda_m)} e^{\lambda_1\psi_1(x)+\dots+\lambda_m\psi_m(x)}, & x \in [-1,1], \\ 0, & x \notin [-1,1]. \end{cases}$$

Будем искать нормирующий множитель

$$C(\lambda_1,\dots,\lambda_m) = \int_{-1}^{1} e^{\lambda_1\psi_1(x)+\dots+\lambda_m\psi_m(x)} dx$$

с помощью разложения подынтегральной функции в отрезок обобщенного ряда Тейлора (1).

Обозначим:

$$E_k(x,\lambda_1,...,\lambda_m) = \left(e^{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i\psi_i(x)} \right)^{(k)} .$$

Заметим, что тогда

$$E_0(x,\lambda_1,...,\lambda_m) = e^{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i\psi_i(x)} ,$$

$$E_1(x,\lambda_1,...,\lambda_m) = e^{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i\psi_i(x)} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\psi_i{}'(x) ,$$

$$E_k(x,\lambda_1,...,\lambda_m) = \sum_{s=0}^{k-1} C_{k-1}^{s} E_{k-1-s}(x,\lambda_1,...,\lambda_m) \cdot \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \psi_i^{(s+1)}(x), \quad k > 1$$

Тогда, приняв

$$e^{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i\psi_i(x)} \approx \sum_{n=0}^{N} \sum_{k \in N_n} E_n(x_{n,k},\lambda_1,...,\lambda_m) \hat{\varphi}_{n,x_{n,k}}(x) ,$$

получим

$$C(\lambda_1,...,\lambda_m) \approx \sum_{n=0}^{N} \sum_{k \in N_n} E_n(x_{n,k},\lambda_1,...,\lambda_m) \cdot \int_{-1}^{1} \hat{\varphi}_{n,x_{n,k}}(x) dx. \quad (3)$$

Все интегралы в этой формуле вычисляются точно. В частности, при $N = 2$ формула (3) будет иметь вид:

$$\begin{aligned} C(\lambda_1,...,\lambda_m) \approx{}& \frac{1}{2} E_0(-1,\lambda_1,...,\lambda_m) + E_0(0,\lambda_1,...,\lambda_m) + \\ &+ \frac{1}{2} E_0(1,\lambda_1,...,\lambda_m) + \frac{13}{144} E_1(-1,\lambda_1,...,\lambda_m) - \\ &- \frac{13}{144} E_1(1,\lambda_1,...,\lambda_m) + \frac{17}{2304} E_2(-1,\lambda_1,...,\lambda_m) - \\ &- \frac{1}{128} E_2(-\frac{1}{2},\lambda_1,...,\lambda_m) + \frac{17}{1152} E_2(0,\lambda_1,...,\lambda_m) - \\ &- \frac{1}{128} E_2(\frac{1}{2},\lambda_1,...,\lambda_m) + \frac{17}{2304} E_2(1,\lambda_1,...,\lambda_m). \end{aligned} \quad (4)$$

Если подынтегральную функцию раскладывать не в обобщенный, а в обычный ряд Тейлора, получим следующую формулу для приближенного подсчета $C(\lambda_1,...,\lambda_m)$:

$$C(\lambda_1,...,\lambda_m) \approx \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} E_k(0,\lambda_1,...,\lambda_m) \int_{-1}^{1} x^k dx = = \sum_{l=0}^{N_1} \frac{2}{(2l+1)!} E_{2l}(0,\lambda_1,...,\lambda_m),$$

где $N_1 = \frac{N}{2}$, если N – четное, и $N_1 = \frac{N-1}{2}$, если N – нечетное.

Рассмотрим в качестве примера случай $m = 4$, $\psi_1(x) = x$, $\psi_2(x) = x^2$, $\psi_3(x) = x^3$, $\psi_4(x) = x^4$ и возьмем 11 членов обобщенного ряда Тейлора (до $N = 2$). Из формулы (4) с учетом того, что в нашем случае

$$E_0(x,\lambda_1,...,\lambda_4) = e^{\sum_{i=1}^{4} \lambda_i x^i} ,$$

$$E_1(x,\lambda_1,...,\lambda_4) = e^{\sum_{i=1}^{4} \lambda_i x^i} \sum_{i=1}^{4} i\lambda_i x^{i-1} ,$$

$$E_2(x,\lambda_1,...,\lambda_4) = e^{\sum_{i=1}^{4} \lambda_i x^i} \left(\sum_{i=1}^{4} i\lambda_i x^{i-1} \right)^2 + + e^{\sum_{i=1}^{4} \lambda_i x^i} \sum_{i=2}^{4} i(i-1)\lambda_i x^{i-2},$$

получим следующую приближенную формулу:

$$C(\lambda_1,...\lambda_4)\approx\frac{1}{2}e^{-\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3+\lambda_4}+1+\frac{1}{2}e^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4}+$$
$$+\frac{13}{144}(\lambda_1-2\lambda_2+3\lambda_3-4\lambda_4)e^{-\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3+\lambda_4}-$$
$$-\frac{13}{144}(\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3+4\lambda_4)e^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4}+$$
$$+\frac{17}{2304}\left(2\lambda_2-6\lambda_3+12\lambda_4+(\lambda_1-2\lambda_2+3\lambda_3-4\lambda_4)^2\right)\cdot$$
$$\cdot e^{-\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3+\lambda_4}+$$
$$+\frac{17}{2304}\left(2\lambda_2+6\lambda_3+12\lambda_4+(\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3+4\lambda_4)^2\right)\cdot$$
$$\cdot e^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4}-$$
$$-\frac{1}{128}\left(2\lambda_2-3\lambda_3+3\lambda_4+(\lambda_1-\lambda_2+\frac{3}{4}\lambda_3-\frac{1}{2}\lambda_4)^2\right)\cdot$$
$$\cdot e^{-\frac{1}{2}\lambda_1+\frac{1}{4}\lambda_2-\frac{1}{8}\lambda_3+\frac{1}{16}\lambda_4}-$$
$$-\frac{1}{128}\left(2\lambda_2+3\lambda_3+3\lambda_4+(\lambda_1+\lambda_2+\frac{3}{4}\lambda_3+\frac{1}{2}\lambda_4)^2\right)\cdot$$
$$\cdot e^{\frac{1}{2}\lambda_1+\frac{1}{4}\lambda_2+\frac{1}{8}\lambda_3+\frac{1}{16}\lambda_4}+\frac{17}{1152}(\lambda_1^2+2\lambda_2).$$

При использовании обычного ряда Тейлора (N=11) получим следующее выражение для $C(\lambda_1,...\lambda_4)$:

$$C(\lambda_1,...,\lambda_4)\approx\sum_{l=0}^{5}\frac{2}{(2l+1)!}E_{2l}(0,\lambda_1,...,\lambda_4),$$

где
$$E_0(0,\lambda_1,...,\lambda_4)=1;$$
$$E_1(0,\lambda_1,...,\lambda_4)=\lambda_1;$$
$$E_2(0,\lambda_1,...,\lambda_4)=\lambda_1^2+2\lambda_2;$$
$$E_3(0,\lambda_1,...,\lambda_4)=\lambda_1^3+6\lambda_1\lambda_2+6\lambda_3;$$
$$E_k(0,\lambda_1,...,\lambda_4)=C_{k-1}^0\lambda_1E_{k-1}(0,\lambda_1,...,\lambda_4)+$$
$$+C_{k-1}^1 2\lambda_2E_{k-2}(0,\lambda_1,...,\lambda_4)+$$
$$+C_{k-1}^2 6\lambda_3E_{k-3}(0,\lambda_1,...,\lambda_4)+$$
$$+C_{k-1}^3 24\lambda_4E_{k-4}(0,\lambda_1,...,\lambda_4),\quad k>3.$$

В таблице 1 приведены значения погрешностей ε_{GTS} и ε_{TS}, полученных при приближенном вычислении $C(\lambda_1,\ldots,\lambda_4)$ с помощью обобщенного и обычного рядов Тейлора, для различных значений λ_i.

В таблице

$$\varepsilon_{GTS}=C(\lambda_1,...,\lambda_4)-C_{GTS}(\lambda_1,...,\lambda_4),$$
$$\varepsilon_{TS}=C(\lambda_1,...,\lambda_4)-C_{TS}(\lambda_1,...,\lambda_4),$$

где $C_{GTS}(\lambda_1,...,\lambda_4)$ – приближенное значение $C(\lambda_1,...,\lambda_4)$, вычисленное с использованием обобщенного ряда Тейлора;

Таблица 1

Значения погрешностей вычисления $C(\lambda_1,...,\lambda_4)$

λ_1	λ_2	λ_3	λ_1	ε_{GTS}	ε_{TS}
0	$\frac{9}{32}$	0	$-\frac{1}{4}$	$1,97\cdot10^{-4}$	$-2,92\cdot10^{-4}$
$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{16}$	$-\frac{3}{64}$	$1,16\cdot10^{-4}$	$-7,73\cdot10^{-7}$
$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{32}$	$-\frac{3}{64}$	$3,47\cdot10^{-4}$	$1,2\cdot10^{-6}$
$\frac{3}{64}$	$-\frac{1}{32}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-1\cdot10^{-3}$	$-2,44\cdot10^{-4}$
0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{4}$	$2,02\cdot10^{-3}$	$2,13\cdot10^{-6}$

$C_{TS}(\lambda_1,...,\lambda_4)$ – приближенное значение $C(\lambda_1,...,\lambda_4)$, вычисленное с использованием обычного ряда Тейлора;

$C(\lambda_1,...,\lambda_4)$ – точное значение.

Заметим, что в формуле, полученной с помощью обобщенного ряда Тейлора при том же числе членов ряда потребовалось знание производной подынтегральной функции лишь до второго порядка, тогда как при использовании обычного ряда Тейлора нужно было вычислить все производные до десятого порядка.

При использовании обобщенного ряда Тейлора можно добиться большей точности при том же максимальном порядке N производной подынтегральной функции. Для этого нужно предварительно сделать замену

$$x=\frac{t}{K},\quad K\in\mathbb{N}$$

под знаком интеграла, а после этого подынтегральную функцию разложить в обобщенный ряд Тейлора (2). Получим:

$$C(\lambda_1,...,\lambda_m)=\frac{1}{K}\int_{-K}^{K}e^{\lambda_i\psi_i(\frac{t}{K})}dt\approx$$
$$\approx\sum_{n=0}^{N}\sum_{t_{n,k}\in X_n(K)}\frac{1}{K^{n+1}}E_n(\frac{t_{n,k}}{K},\lambda_1,...,\lambda_m)\times\int_{-K}^{K}\hat{\varphi}_{n,t_{n,k}}(t)dt.\quad(5)$$

В частности, для случая $N=2$ эта формула примет вид:

$$C(\lambda_1,...,\lambda_m)\approx\frac{1}{K}\sum_{i=-K}^{K}E_0\left(\frac{i}{K},\lambda_1,...,\lambda_m\right)\int_{-K}^{K}\hat{\varphi}_{0,i}(t)dt+$$
$$+\frac{1}{K^2}\sum_{i=-K}^{K}E_1\left(\frac{i}{K},\lambda_1,...,\lambda_m\right)\int_{-K}^{K}\hat{\varphi}_{1,i}(t)dt+$$
$$+\frac{1}{K^3}\sum_{i=0}^{4K}E_2\left(\frac{-K+\frac{i}{2}}{K},\lambda_1,...,\lambda_m\right)\int_{-K}^{K}\hat{\varphi}_{2,-K+\frac{i}{2}}(t)dt.$$

Учитывая, что

$$\int_{-K}^{K}\hat{\varphi}_{0,-K}(t)dt=\int_{-1}^{1}\hat{\varphi}_{0,-1}(t)dt=\frac{1}{2};$$

$$\int_{-K}^{K}\hat{\varphi}_{0,K}(t)dt=\int_{-1}^{1}\hat{\varphi}_{0,1}(t)dt=\frac{1}{2};$$

$$\int_{-K}^{K}\hat{\varphi}_{0,i}(t)dt=\int_{-1}^{1}\hat{\varphi}_{0,0}(t)dt=1,\quad i=-K+1,...,K-1;$$

$$\int_{-K}^{K}\hat{\varphi}_{1,-K}(t)dt=\int_{0}^{1}\hat{\varphi}_{1,0}(t)dt=\frac{13}{144};$$

$$\int_{-K}^{K}\hat{\varphi}_{1,K}(t)dt=\int_{-1}^{0}\hat{\varphi}_{1,0}(t)dt=-\frac{13}{144};$$

$$\int_{-K}^{K}\hat{\varphi}_{1,i}(t)dt=\int_{-1}^{1}\hat{\varphi}_{1,0}(t)dt=0,\quad i=-K+1,...,K-1;$$

$$\int_{-K}^{K}\hat{\varphi}_{2,-K}(t)dt=\int_{0}^{1}\hat{\varphi}_{2,0}(t)dt=\frac{17}{2304};$$

$$\int_{-K}^{K}\hat{\varphi}_{2,K}(t)dt=\int_{-1}^{0}\hat{\varphi}_{2,0}(t)dt=\frac{17}{2304};$$

$$\int_{-K}^{K}\hat{\varphi}_{2,i}(t)dt=\int_{-1}^{1}\hat{\varphi}_{2,0}(t)dt=\frac{17}{1152},\quad i=-K+1,...,K-1;$$

$$\int_{-K}^{K}\hat{\varphi}_{2,-K+\frac{1}{2}+i}(t)dt=\int_{0}^{1}\hat{\varphi}_{2,\frac{1}{2}}(t)dt=-\frac{1}{128},$$

$i=0,...,2K-1,$

получим следующую приближенную формулу:

$$C(\lambda_1,...,\lambda_m)\approx\frac{1}{K}\left(\frac{1}{2}E_0(-1,\lambda_1,...,\lambda_m)+\sum_{i=-K+1}^{K-1}E_0(\frac{i}{K},\lambda_1,...,\lambda_m)+\frac{1}{2}E_0(1,\lambda_1,...,\lambda_m)\right)+$$
$$+\frac{1}{K^2}\left(\frac{13}{144}E_1(-1,\lambda_1,...,\lambda_m)-\frac{13}{144}E_1(1,\lambda_1,...,\lambda_m)\right)+$$
$$+\frac{1}{K^3}\left(\frac{17}{2304}E_2(-1,\lambda_1,...,\lambda_m)+\frac{17}{2304}E_2(1,\lambda_1,...,\lambda_m)+\frac{17}{1152}\sum_{i=-K+1}^{K-1}E_2(\frac{i}{K},\lambda_1,...,\lambda_m)-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{128}\sum_{i=0}^{2K-1}E_2\left(\frac{-K+\frac{2i+1}{2}}{K},\lambda_1,...,\lambda_m\right)\right).\qquad(6)$$

Для оценки точности формул (3)–(6) можно воспользоваться следующей теоремой (теорема 1 из [8]):

Теорема. Пусть $f(x)\in H_\rho$, $\rho\in[1,2)$, и

$$\exists C:\ |f^{(n)}(x_{n,k})|\le Cr^n n^{\alpha n}\quad\forall n\in\mathbb{N}\ \forall k\in N_n$$

для некоторого $r>0$, $\alpha\ge 1$. Тогда справедлива следующая оценка для скорости приближения $f(x)$ частичной суммой ряда (1):

$$\|R_m(x)\|_{C[-1,1]}\le\frac{\hat{C}(r,\alpha)}{2^{\frac{m(m+1)}{2}-\alpha m\log_2(m+1)-m\log_2 r}},$$

где $R_m(x)=f(x)-\sum_{n=0}^{m}\sum_{k\in N_n}f^{(n)}(x_{n,k})\varphi_{n,k}(x)$.

Заметим, что в рассмотренном выше примере, как и вообще в случае, когда функции $\psi_1(x),\dots,\psi_m(x)$ – аналитические, $\alpha=1$.

Заключение

Предложен метод приближенного нахождения нормирующего множителя для экспоненциальных многопараметрических мультимодальных семейств плотностей распределения вероятностей с помощью представления подынтегральной функции отрезком обобщенного ряда Тейлора для бесконечно дифференцируемых функций на основе атомарных функций – специальных решений с компактным носителем обыкновенных линейных функционально-дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и линейными отклонениями независимой переменной, обладающих хорошими аппроксимационными свойствами. Предложенный метод удобен тем, что дает нормирующий коэффициент в виде явной функции параметров распределения.

Литература

1. Mironenko, A. Efficient Segmentation of Geophysical Field Images [Text] / A. Mironenko, A.M. Akhmetshin, L.G. Akhmetshina // 2005 IEEE Int. Symposium on Geoscience and Remote Sensing (IGARSS'05). – 2005. – Vol. 1. – P. 300–303.

2. Cobb, L. Estimation and Model Recursion Relations for Multimodal Distributions of the Exponential Family [Text] / L. Cobb, P. Koppstein, N.N. Chen // Journal of the American Statistical Association. – 1983. – Vol. 78, N. 381. –P. 124–130.

3. Zhou, E.A. Density Projection Approach to Dimension Reduction for Continuous-State POMDPs [Text] / E.A. Zhou, M.C. Fu, S.I. Marcus // Proc. 47th IEEE Conf. on Decision and Control. – 2008. – P. 5576–5581.

4. Yu, J.A. Novel Multimodal Probability Model for Cluster Analysis [Text] / J.A. Yu, M.-S. Yang, P. Hao // Rough Sets and Knowledge Technology. Lecture Notes in Computer Science; eds.: P. Wen et al. – Berlin / Heidelberg: Springer, 2009. – Vol. 5589. – P. 397–404.

5. Abraham, K.J. A New Technique for Sampling Multi-Modal Distributions [Text] / K.J. Abraham, L.M. Haines // Journal of Computational Physics. – 1999. – Vol. 155. – P. 380–386.

6. Lee, J. Basin model inversion using information theory and seismic data [Text] / J. Lee, A. Sayyed-Ahmad, D-H. Sheen // Geophysics. – 2007. – Vol. 72. – P. R99–R108.

7. Odakura, V. General detection model in cooperative multirobot localization [Text] / V. Odakura, R. Bianchi, A. Costa // J. Braz. Comp. Soc. – 2009. – Vol. 15, No. 3. – P. 33–46.

8. Radiocarbon dating of modern peat profiles: Pre- and post-bomb 14C variations in the construction of age-depth model [Text] / T. Goslar, W.O. Van Der Knaap, S. Hicks [та ін.] // Radiocarbon – 2005. – Vol. 47, No. 1. – P. 115–134.

9 Yang, M.-H. Face Detection Using Multimodal Density Models [Text] / M.-H. Yang, D. Kriegman, N. Ahuja // Computer Vision and Image Understanding. – 2001. – Vol. 84, Issue 2. – P. 264–284.

10. Toledo, G.A. Patch-Clamp Measurements Reveal Multimodal Distribution of Granule Sizes in Rat Mast Cells [Text] / G.A. Toledo, J.M. Fernandez // The Journal of Cell Biology. – 1990. – Vol. 110. – P. 1033–1039.

11. Леман, Э. Теория точечного оценивания [Текст] / Э. Леман. – М.: Наука, 1991. – 448 с.

12. Рвачев, В.А. Обобщенные ряды Тейлора для бесконечно дифференцируемых функций [Текст] / В.А. Рвачев // Мат. методы анализа динамических систем. – 1982. – Вып. 6. – С. 99–102.

13. Рвачев, В.А. Финитные решения функционально-дифференциальных уравнений и их применение [Текст] / В.А. Рвачев // Успехи мат. наук. – 1990. – Т. 45, Вып. 1(271). – С. 77–103.

14. Rvachova, T.V. On a relation between the coefficients and the sum of the generalized Taylor series [Text] / T.V. Rvachova // Matematicheskaya fizika, analiz, geometriya. – 2003. – Vol. 10, No 2. – P. 262–268.

15. Рвачева, Т.В. О скорости приближения бесконечно дифференцируемых функций частичными суммами обобщенного ряда Тейлора [Текст] / Т.В. Рвачева // Вісник ХНУ, сер. «Математика, прикладна математика і механіка» – 2010. – №931. – С. 93–98.

16. Рвачева, Т.В. Об асимптотике базисных функций обобщенного ряда Тейлора [Текст] / Т.В. Рвачева // Вісник ХНУ, сер. «Математика, прикладна математика і механіка» – 2003. – №602. – С. 94–104.

17. Рвачев, В.А. Об эрмитовой интерполяции с помощью атомарных функций [Текст] / В.А. Рвачев, Т.В. Рвачева // Радіоелектронні і комп'ютерні системи. – 2010. – №4(45). – С. 100–104.

Поступила в редакцию 5.12.2011

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф., проф. каф. высшей математики А.Г. Николаев, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков.

ПРО ПОБУДОВУ МУЛЬТИМОДАЛЬНИХ БАГАТОПАРАМЕТРИЧНИХ ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНИХ СІМЕЙ ІМОВІРНІСНИХ ЗАКОНІВ

В.О. Рвачов, Т.В. Рвачова

Запропоновано метод наближеного знаходження нормувального множника для багатопараметричної мультимодальної експоненціальної сім'ї щільностей розподілу імовірностей – за допомогою зображення підінтегральної функції відрізком узагальненого ряду Тейлора для нескінченно диференційовних функцій на базі атомарних функцій – спеціальних розв'язків з компактним носієм звичайних лінійних функціонально-диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами та лінійними відхиленнями аргументу, що мають добрі апроксимаційні властивості.

Ключові слова: мультимодальні багатопараметричні експоненціальні сім'ї щільностей, атомарна функція, узагальнений ряд Тейлора, базисні функції узагальненого ряду Тейлора.

ON THE CONSTRUCTION OF MULTIMODAL MULTIPARAMETER EXPONENTIAL FAMILIES PROBABILITY LAWS

V.O. Rvachov, T.V. Rvachova

A new method of approximate computation of the normalizing factor of multiparameter multimodal exponential density families is proposed with the help of the generalized Taylor series for infinitely differentiable functions based on atomic functions which are the special solutions with a compact support of ordinary linear functional differential equations with constant coefficients and linear deviations of argument which possess good approximation properties.

Key words: multimodal multiparameter exponential density families, atomic function, the generalized Taylor series, basic functions of the generalized Taylor series.

Рвачев Владимир Алексеевич - д-р физ.-мат. наук, проф., главный научный сотрудник кафедры высшей математики, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт», Харьков, Украина, e-mail: rvachov@gmail.com.

Рвачева Татьяна Владимировна – канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт», Харьков, Украина, e-mail: rvachova@gmail.com.