

УДК 621.373.5

С.К. ПІДЧЕНКО, А.А. ТАРАНЧУК, В.І. СТЕЦЮК

Хмельницький національний університет, Україна

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СИЛОЧАСТОТНИХ ХАРАКТЕРИСТИК  
КВАРЦОВИХ РЕЗОНАТОРІВ

*Розглянуті особливості визначення силочастотних характеристик кварцових резонаторів на основі розрахунку розподілу механічних напруг п'єзоелемента (ПЕ) під дією зовнішніх вібраційних впливів. Приведені співвідношення, які пов'язують тензор механічних напруг з тензором механічних деформацій та еквівалентні їм матричні вирази для кристалу кварцу. Визначені співвідношення, які характеризують чутливість модулів пружності кристалу кварцу до зовнішніх механічних впливів. Отримано на основі метода скінченних елементів в системі MATLAB/FEMLAB розподіл механічних напруг ПЕ для 2d- і 3d-моделей кварцових резонаторів та різних типів кріплення п'єзоелемента.*

**Ключові слова:** кварцовий резонатор, вібраційне прискорення, тензор механічних напруг.

## Вступ

Сучасний розвиток радіоелектронної апаратури зумовлює використання все більшої кількості високоточних та високостабільних пристроїв, домінуючу роль серед яких відіграють кварцові резонатори (КР), які використовуються в системах зв'язку, радіолокації і радіонавігації, в прецизійних вимірювальних системах, в обчислювальній та мікропроцесорній техніці, у телекомунікаційному устаткуванні, визначаючи, в переважній більшості випадків, їх технічні характеристики.

Широке розповсюдження КР пояснюється не тільки їх високими технічними характеристиками, але рядом переваг, які виводять їх на перше місце у порівнянні з іншими пристроями. Так, високоточні кварцові генератори (КГ) здатні забезпечити нестабільність частоти на рівні  $10^{-8}$  -  $10^{-10}$  при відносно помірній їх вартості. В той же час цезієві, водневі та рубідієві стандарти частоти, які забезпечують більш високу точність ( $10^{-11}$  -  $10^{-13}$ ), широкого використання не набули через їх високу вартість і гірші масо-габаритні та енергетичні показники [1, 2].

Досить часто КР працюють в складних експлуатаційних умовах, зазнаючи впливу нестаціонарного теплового потоку, вібрації, акустичних шумів, деформації тощо. Ці дії впливають на величину випадкових похибок КР і погіршують їх динамічні характеристики. Якщо по відношенню до температури сам КР володіє визначеною інерційністю, тобто властивістю лінійного опосередкування швидкозмінних теплових процесів, то по відношенню до вібрації дії цього ефекту не значні.

Особливо сильно вплив вібрації проявляється в частотних вимірювальних перетворювачах механічних величин, де використовуються КР з підвищеною силовою чутливістю [2].

Для мінімізації механічних впливів на стабільність параметрів кварцових резонаторів необхідно з високим ступенем точності визначити розподіл механічних напруг в п'єзоелементі (ПЕ) кварцового резонатора. З урахуванням складності конструкцій сучасних КР, анізотропних та нелінійних властивостей кристалу кварцу найбільш перспективним для вирішення даної задачі є використання сучасних чисельних методів скінченних елементів [2].

## 1. Постановка задачі

Як будь-яке пружне тіло, КР має набір власних частот механічних коливань. Спектр власних частот визначається розмірами і конструктивним виконанням п'єзопластини (вібратора) та кварцоутримувача, способом кріплення, пружними властивостями п'єзоматеріалу та типом деформацій в процесі коливання.

Віброчутливість кварцових резонаторів зазвичай описується векторною величиною, яка отримала позначення гамма-вектору  $\vec{\Gamma}$ . Компоненти вектору  $\vec{\Gamma}$  визначають характеристики силочутливості ПЕ до величини за трьома ортогональними напрямками. Застосувавши принцип суперпозиції до відхилень резонансних частот КР під дією вібрації дев'яти частоти  $f$ , обумовлену дією вектору вібраційного прискорення за вільним напрямком можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} \Delta f &= \Delta f_x + \Delta f_y + \Delta f_z = \\ &= \gamma_x a_x + \gamma_y a_y + \gamma_z a_z = \vec{\Gamma} \cdot \vec{A}, \end{aligned} \quad (1)$$

де  $\vec{\Gamma}$  – вектор чутливості до вібраційного прискорення, модуль якого виражається через коефіцієнти

чутливості  $\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$  повздож кристалографічних осей п'єзоелемента  $x, y, z$ :

$$|\vec{\Gamma}| = \sqrt{\gamma_x^2 + \gamma_y^2 + \gamma_z^2}; \quad (2)$$

$\vec{A} = (a_x, a_y, a_z)^T$  – вектор-стовбець вібраційних прискорень.

При цьому, можливо зробити висновок про наявність площини нульової акселерометричної чутливості, тобто площини, перпендикулярної діючому вектору вібраційного прискорення  $\vec{A}$ , за якого векторне рівняння (1) дорівнює нулю. Існування площини нульового акселерометричного впливу визначається вектором  $\vec{\Gamma}$ , який характеризує тип резонатору, що використовується.

Для опису механічних напруг в кристалі кварцу використовують тензор механічних напруг  $\vec{T}$ :

$$\vec{T} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

де компоненти  $t_{ij}$  тензора напруг дорівнює  $i$ -й компоненті сили, яка діє на одиничну площадку, розташовану у відповідній точці кристалу перпендикулярно вісі  $X_j$ .

Тензор  $\vec{T}$  має симетричну структуру  $t_{ij} = t_{ji}$  і число його незалежних компонент зводиться до шести:

$$\vec{T}_{(\lambda)} = (t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6)^T, \quad (4)$$

де  $t_1 = t_{11}, t_2 = t_{22}, t_3 = t_{33}, t_4 = 2t_{23} = 2t_{32}, t_5 = 2t_{13} = 2t_{31}, t_6 = 2t_{12} = 2t_{21}$ .

Під дією механічних напруг у кристалі виникають деформації, які внаслідок анізотропії пов'язані тензорним виразом:

$$r_{ij} = s_{ijpq} t_{pq}. \quad (5)$$

де  $s_{ijpq}$  – константи гнучкості або піддатливості кристалу.

У виразі (5) використовується правило Ейнштейна, відповідно до якого, у виразах даного типу здійснюється додавання за індексами, що повторюються.

Сукупність коефіцієнтів гнучкості  $s_{ijpq}$  утворюють тензор 4-го рангу  $\vec{S}$ , для якого діють наступні співвідношення симетрії:

$$s_{ijpq} = s_{pqij} = s_{jipq}, \quad (6)$$

Дана симетрія тензора призводить до зменшення незалежних констант гнучкості з 81 до 21, при цьому використовується перехід від чотириіндекс-

них позначень до двоіндексних за наступними правилами:

$$\begin{cases} s_{\lambda\mu} = s_{ijpq} & \text{для } i = j, p = q; \lambda = i, \mu = p; \\ s_{\lambda\mu} = 2s_{ijpq} & \text{для } i = j, p \neq q; \lambda = i, \mu = 9 - p - q; \\ s_{\lambda\mu} = 2s_{ijpq} & \text{для } i \neq j, p = q; \lambda = 9 - i - j, \mu = p; \\ s_{\lambda\mu} = 4s_{ijpq} & \text{для } i \neq j, p \neq q; \lambda = 9 - i - j, \mu = 9 - p - q. \end{cases} \quad (7)$$

У цьому випадку система (5) перетвориться до вигляду:

$$r_\lambda = s_{\lambda\mu} t_\mu, \quad (8)$$

де індекси  $\lambda$  та  $\mu$ , які відповідають парі індексів  $ij$  та  $pq$  формуються за такими правилами:

$$\lambda = \begin{cases} i & \text{для } i = j, \\ 9 - i - j & \text{для } i \neq j; \end{cases} \quad i = \overline{1,3}, j = \overline{1,3}$$

та

$$\mu = \begin{cases} p & \text{для } p = q, \\ 9 - p - q & \text{для } p \neq q; \end{cases} \quad p = \overline{1,3}, q = \overline{1,3}. \quad (9)$$

В свою чергу сукупність констант гнучкості  $s_{\lambda\mu}$  утворює тензор другого рангу, який із врахуванням симетрії кристалу кварцу містить тільки 6 незалежних компонент і має такий вигляд:

$$\vec{S}_{(\lambda\mu)} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{11} & s_{13} & -s_{14} & 0 & 0 \\ s_{13} & s_{13} & s_{33} & 0 & 0 & 0 \\ s_{14} & -s_{14} & 0 & s_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{44} & 2s_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2s_{14} & s_{66} \end{bmatrix}, \quad (10)$$

де  $s_{66} = 2(s_{11} - s_{12})$ .

Очевидно, що систему (8) можна привести до еквівалентного матричного виразу:

$$\vec{R}_{(\lambda)} = \vec{S}_{(\lambda\mu)} \times \vec{T}_{(\lambda)}. \quad (11)$$

Вирази (8), (11) відображають зв'язок між механічними напругами і деформаціями в анізотропному матеріалі у випадку, коли напруги  $t_{pq}$  є причиною появи деформацій  $r_{ij}$ . Якщо ж кристал піддати деформаціям  $r_{pq}$ , то в ньому виникнуть механічні напруги  $t_{ij}$ . У цьому випадку, коли напруги є наслідком, а не причиною деформацій, зв'язок між ними буде описуватися як

$$t_{ij} = c_{ijpq} r_{pq}, \quad (12)$$

де сукупність констант (модулів) пружності або жорсткості кристалу  $c_{ijpq}$  утворюють тензор 4-го рангу, для якого діють аналогічні співвідношення

симетрії і правила запису індексів  $\lambda, \mu$  аналогічні (9), а правило переходу від чотириіндексних позначень до двоіндексних більш простіше:

$$c_{\lambda\mu} = c_{ijpq} \quad (13)$$

При цьому система (12) може бути записана у вигляді

$$t_{\lambda} = c_{\lambda\mu} r_{\mu} \quad (14)$$

або за аналогією з (11) у матричному виразі

$$\bar{T}_{(\lambda)} = \bar{C}_{(\lambda\mu)} \times \bar{R}_{(\lambda)}, \quad (15)$$

для якої тензор другого рангу модулів пружності

$$\bar{C}_{(\lambda\mu)} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & -c_{14} & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ c_{14} & -c_{14} & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & c_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{14} & c_{66} \end{pmatrix}, \quad (16)$$

де  $c_{66} = (c_{11} - c_{12}) / 2$ .

Значення констант пружності і піддатливості, виміряні при 20 °С в умовах постійних поля і зміщення (верхні індекси E і D відповідно), наведені в табл. 1 [3].

Таблиця 1

Константи кристалу кварцу

$\lambda\mu$	$10^9 \text{ н/м}^2$		$10^{-12} \text{ м}^2/\text{н}$	
	$c_{\lambda\mu}^E$	$c_{\lambda\mu}^D$	$s_{\lambda\mu}^E$	$s_{\lambda\mu}^D$
11	86,74	87,94	12,77	12,64
12	6,99	6,23	-1,79	-1,66
13	11,91	11,94	-1,22	-1,22
14	-17,91	-18,09	4,50	4,46
33	107,2	107,2	9,60	9,60
44	57,94	57,98	20,04	20,03
66	39,88	409,53	29,12	28,58

Для визначення матеріальних констант в системі координат кварцового п'єзоелемента довільного зрізу зазвичай використовується послідовність трьох обертань за кутами Ейлера  $\varphi, \theta, \psi$  [1, 2].

Під дією зовнішніх механічних впливів на ПЕ виникають деформації, які призводять до зміни його геометричних розмірів та щільності і, як наслідок, до зміни власної резонансної частоти.

Однак, чутливість кварцу звично характеризується чутливістю модулів пружності, зміни яких можна оцінити як

$$\Delta c_{\lambda\mu} = c_{\lambda\mu\nu} r_{\nu}, \quad (17)$$

де  $c_{\lambda\mu\nu}$  – коефіцієнти жорсткості третього порядку, які симетричні відносно перестановки індексів [3].

Якщо механічні впливи на п'єзоелемент задаються не деформаціями, а механічними напругами, то з урахуванням (5), (8) отримуємо [3, 4]

$$\Delta c_{\lambda\mu} = c_{\lambda\mu\nu} s_{\nu\sigma} t_{\sigma}. \quad (18)$$

Для найбільш розповсюджених обернених резонаторів Y-зрізів з коливаннями зсуву по товщині частота коливань може бути визначена із співвідношення [1]

$$f_r = \frac{n}{2h} \sqrt{\frac{c'_{66}}{\rho}}, \quad (19)$$

де  $c'_{66} = c_{66} \cos^2 \varphi + c_{44} \sin^2 \varphi + 2c_{14} \sin \varphi \cos \varphi$  – діюча константа пружності;  $\varphi$  – кут обертання п'єзопластини;  $\rho$  – щільність;  $h$  – товщина ПЕ;  $n$  – номер механічної гармоніки.

## 2. Стрес-аналіз п'єзоелемента в системі MATLAB/FEMLAB

Основним типом рівняння, яке використовується для розв'язку подібних задач в системі FEMLAB COMSOL Multiphysics є еліптичне рівняння

$$-\text{div}(c \cdot \text{gradu}) + au = f, \quad (20)$$

де  $c, a, f$  і невідоме рішення  $u$  є комплексними функціями, які визначені на обмеженій у площині області  $\Omega$ . Система підтримує два основних типи граничних умов – Диріхле та Неймана:

$$hu = r; \quad (21)$$

$$\bar{n} \cdot (c \cdot \text{gradu}) + qu = g, \quad (22)$$

де  $\bar{n}$  – зовнішня нормальна одиниця;

$g, q, h, r$  – функції, які визначені на границі  $\partial\Omega$ .

Слід відзначити, що формулювання умови Неймана відрізняється від традиційних, де ці умови зазвичай відносяться до випадку  $q = 0$ . Тому граничні умови (22) слід називати змішаними. Для випадку  $c = 0$  умови (22) перетворюються в умови Диріхле [2].

Для отримання наближеного рішення (20) виконуються наступні дії:

1) описується геометрія області  $\Omega$  і граничні умови;

2) область визначення неперервної величини  $\Omega$  розбивається на кінцеву кількість елементів. Ці елементи мають спільні вузлові точки і разом апроксимують область  $\Omega$ ;

3) дискретизуються рівняння і граничні умови для отримання лінійної системи  $\bar{K} \times \bar{u} = \bar{F}$ . Вектор  $\bar{u}$

містить значення наближеного рішення у вершинах елементів, матриця  $\bar{K}$  утворюється коефіцієнтами  $s, a, h, q$ , права сторона  $\bar{F}$  містить середні величини  $f$  навколо кожної вершини з урахуванням  $g$ .

На рис. 1 представлені приклади чисельного розрахунку розподілу механічних напруг в системі FEMLAB COMSOL Multiphysics за умови дво- та чотириточкового кріплення п'єзоелемента. Результатом розрахунків є поле нормованих механічних напруг, яке використовується для визначення варіацій модулів пружності у відповідності до (18).

## Висновки

Аналіз отриманих даних показує, що максимальна локалізація механічних напруг спостерігається в областях механічного кріплення п'єзоелемента (рис. 1, в,е), вплив яких за вібраційних прискорень є часто визначальним. Використання запропонованої методики стрес-аналізу механічних напруг дозволяє значно підвищити ефективність оптимізаційних процедур з урахуванням анізотропних і нелінійних властивостей кристалу кварцу та конструктивних особливостей сучасних КР.

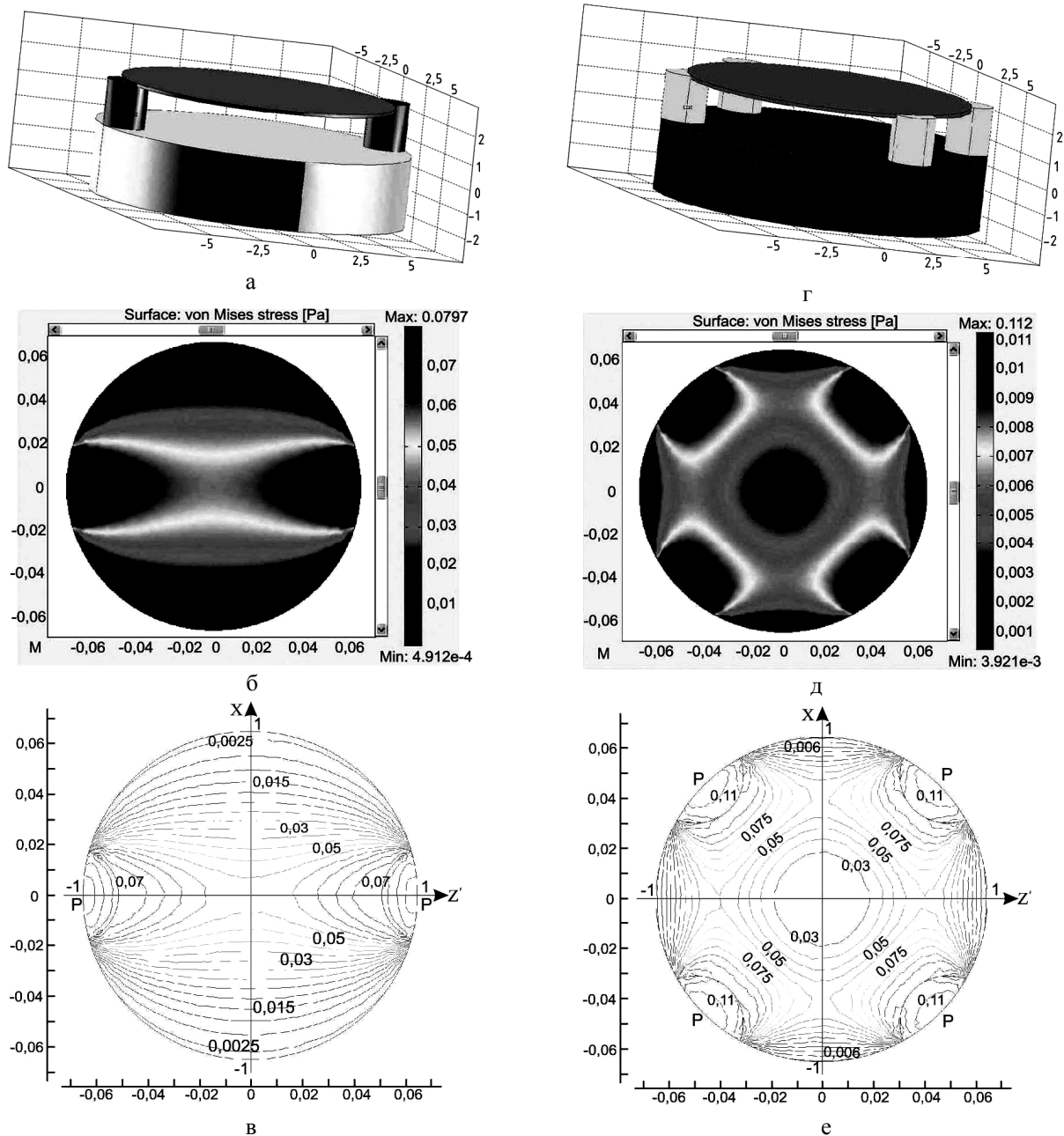


Рис. 1. Розподіл механічних напруг за двоточкового (а – в) та чотириточкового (г – е) кріплення п'єзоелемента

## Література

1. Смагин, А.Г. Пьезоэлектричество кварца и кварцевые резонаторы [Текст] / А.Г. Смагин, М.И. Ярославский. – М.: Энергия, 1970. – 488 с.

2. Колпаков, Ф. Теорія і реалізаційні основи інваріантних п'єзореzonансних коливальних систем : моногр. [Текст] / Ф. Колпаков, С. Підченко; Нац. аерокосм. ун-т «Харьк. авіац. ін-т», – Х.: ХАІ, 2011. – 327 с.

3. Лепетаев, А.Н. Расчет тензочувствительности кварцевых резонаторов [Текст] / А.Н. Лепетаев // III межотраслевой научно-технический семинар "Кварцевая стабилизация частоты". – Х., 1991. – С. 39 – 42.

4. Thurston, R.N. Third-order elastic coefficients of quartz [Текст] / R.N. Thurston, H.N. McSkimin, P. Andreatch // Journ. Appl. Phys. – 1986. – Vol . 37, №1. – P. 267 – 275.

Поступила в редакцию 1.06.2011

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф., заведующий кафедрой «Приём, передача и обработка сигналов», А.А. Зеленский, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков.

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИЛОЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК КВАРЦЕВЫХ РЕЗОНАТОРОВ

*С.К. Підченко, А.А. Таранчук, В.І. Стецюк*

Рассмотрены особенности определения силочастотных характеристик кварцевых резонаторов на основе расчета распределения механических напряжений пьезоэлемента (ПЭ) под воздействием внешних вибрационных воздействий. Приведены соотношения, связывающие тензор механических напряжений и тензор механических деформаций и эквивалентные им матричные выражения для кристалла кварца. Определены соотношения, характеризующие чувствительность модулей упругости кристалла кварца к внешним механическим воздействиям. Получено на основе метода конечных элементов в системе MATLAB/FEMLAB распределение механических напряжений ПЭ для 2d- и 3d-моделей кварцевых резонаторов и разных типов крепления пьезоэлемента.

**Ключевые слова:** кварцевый резонатор, вибрационное ускорение, тензор механических напряжений.

## MATHEMATICAL MODELING FORCE-FREQUENCY CHARACTERISTICS OF THE QUARTZ RESONATORS

*S.K. Pidchenko, A.A. Taranchuk, V.I. Stetsyuk*

The features of the determination are considered for force-frequency characteristics of the quartz resonators which are based on the calculation of the mechanical stress piezoelectric element (PE) field under influence of the external vibration effects. Correlations, relating the tensor of mechanical tensions and tensor of mechanical deformations and equivalent them matrix expressions for the crystal of quartz, are resulted. Correlations sensitiveness of the modules resiliency of quartz crystal are certain to external mechanical influences. It is got on the basis of method eventual elements in the system of Matlab/Femlab distributing of mechanical tensions of quartz resonators for 2d- and 3d-models QR and different types of fastening of piezoelectric element.

**Key words:** The quartz resonator, vibrational acceleration, tensor of the mechanical pressure.

**Підченко Сергій Костянтинович** – канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри радіоелектронних апаратів та телекомунікацій, Хмельницький національний університет, Хмельницький, Україна, E-mail: sergpchn@ya.ru.

**Таранчук Алла Анатоліївна** – канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри радіотехніки та зв'язку, Хмельницький національний університет, Хмельницький, Україна, e-mail: allatr@ukr.net.

**Стецюк Віктор Іванович** – старший викладач кафедри радіотехніки та зв'язку, Хмельницький національний університет, Хмельницький, Україна, e-mail: vicste@rambler.ru.