УДК 519.6+517

Т.В. РВАЧЁВА

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Украина

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ С ПОМОЩЬЮ АТОМАРНЫХ РЯДОВ ТЕЙЛОРА

Предложен новый способ приближенного нахождения преобразования Фурье функций – с помощью представления синусов и косинусов отрезком обобщенного ряда Тейлора для бесконечно дифференцируемых функций на основе атомарных функций – специальных решений с компактным носителем обыкновенных линейных функционально-дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и линейными отклонениями независимой переменной, обладающих хорошими аппроксимационными свойствами. Полученные приближенные формулы удобны тем, что дают преобразования A(t), B(t) в виде функций от t, и не требуют пересчета интегралов.

Ключевые слова: *преобразование Фурье, атомарная функция, обобщенный ряд Тейлора, базисные функции обобщенного ряда Тейлора.*

Введение

Преобразование Фурье широко используется во многих областях науки, в том числе в обработке сигналов и связанных областях [1 – 4].

В настоящей статье предложен метод нахождения преобразования Фурье с использованием обобщенного ряда Тейлора, предложенного В.А. Рвачёвым в [5, 6] и исследованного в [7, 8]. В этой работе показано, что если функция f принадлежит классу H_ρ, где $\rho \in [1;2)$, т. е. если $f \in C^\infty[-1,1]$ и

$$\exists \rho \in [1,2) : \| f^{(k)} \|_{C[-1,1]} \le c(f)\rho^k 2^{\frac{k(k+1)}{2}}, \quad k = 0,1,2,\ldots,$$

то f раскладывается в так называемый обобщенный ряд Тейлора:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k\in N_n} f^{(n)}(x_{n,k})\varphi_{n,k}(x), \qquad (1)$$

где:

$$N_n = \{-2^{n-1}, -2^{n-1}+1, \ldots, 2^{n-1}-1, 2^{n-1}\},\ n \ne 0;$$
$$N_0 = \{-1,0,1\};$$
$$x_{n,k} = \frac{k}{2^{n-1}},\ n \ne 0,\ k \in N_n;\ x_{o,k} = k,\ k \in N_0,$$

а функции $\varphi_{n,k}(x) \in H_1$ – базисные функции обобщенного ряда Тейлора – однозначно определяются из условий:

$$(\varphi_{n,k}(x_{m,s}))^{(m)} = \delta_n^m \delta_s^k. \qquad (3)$$

Назовем точку $x_{n,k}$ собственной точкой функции $\varphi_{n,k}(x)$.

Для дальнейшего изложения нам будет удобнее обозначать базисные функции $\varphi_{n,k}$ так, чтобы сразу была видна собственная точка функции: пусть

$$\hat{\varphi}_{n,x_{n,k}}(x) = \varphi_{n,k}(x).$$

Построение базисных функций $\hat{\varphi}_{n,x_{n,k}}(x)$ было проведено в [9]; там же получены асимптотические формулы для этих функций. В работе [10] были выписаны явные выражения для $\hat{\varphi}_{n,x_{n,k}}(x)$, $n = 0,\ldots,3$.

Класс H_ρ можно рассматривать и на всей оси $\mathbb{R}$.Обозначим его $H_\rho(\mathbb{R})$. Тогда для $f \in H_\rho(\mathbb{R})$, $\rho \in [1;2)$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{x_{n,k}\in X_n(\mathbb{R})} f^{(n)}(x_{n,k})\hat{\varphi}_{n,x_{n,k}}(x), \qquad (2)$$

где

$$X_0(\mathbb{R}) = \{x_{o,k} = k, k \in \mathbb{Z}\},$$
$$X_n(\mathbb{R}) = \{x_{n,k} = \frac{k}{2^{n-1}}, k \in \mathbb{Z}\},\ n > 0.$$

Заметим, что в этом случае при $x_{n,k} \notin (-1,1)$ всегда найдется целое число m такое, что

$$x_{n,k} - m \in (-1,1),$$

и тогда функция $\hat{\varphi}_{n,x_{n,k}}(x)$ строится следующим образом:

$$\hat{\varphi}_{n,x_{n,k}}(x) = \hat{\varphi}_{n,x_{n,k}-m}(x-m).$$

При этом исходные функции $\hat{\varphi}_{n,x_{n,k}}(x)$, собственные точки которых принадлежат $(-1,1)$, ранее определенные для ряда (1), всюду вне $(-1,1)$ доопределим нулем.

Вычисление преобразования Фурье с помощью обобщенного ряда Тейлора

Пусть $A(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos tx dx$,

$$B(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin tx dx .$$

Вычислим $A(t)$, $B(t)$ с помощью разложения $\cos tx$, $\sin tx$ в обобщенный ряд Тейлора на всей оси по переменной x:

$$\cos tx = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{x_{n.k}\in X_n(\mathbb{R})} \frac{\partial^n}{\partial x^n}(\cos tx)|_{x=x_{n,k}}\ \hat{\varphi}_{n,x_{n,k}}(x),$$

$$\sin tx = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{x_{n.k}\in X_n(\mathbb{R})} \frac{\partial^n}{\partial x^n}(\sin tx)|_{x=x_{n,k}}\ \hat{\varphi}_{n,x_{n,k}}(x).$$

Отсюда

$$A(t) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{x_{n.k}\in X_n(\mathbb{R})} \frac{\partial^n}{\partial x^n}(\cos tx)|_{x=x_{n,k}} \cdot$$

$$\cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\hat{\varphi}_{n,x_{n,k}}(x)dx,$$

$$B(t) = \pi^{-1}\times$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{x_{n.k}\in X_n(\mathbb{R})} \frac{\partial^n}{\partial x^n}(\sin tx)|_{x=x_{n,k}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\hat{\varphi}_{n,x_{n,k}}(x)dx.$$

Ограничившись конечным отрезком ряда по n, получим приближенные формулы для $A(t)$ и $B(t)$. В частности, взяв $n = 0,...,3$, получим следующие формулы:

$$A(t) \approx \frac{1}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}(\cos kt\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\hat{\varphi}_{0,k}(x)dx -$$

$$-t\sin kt\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\hat{\varphi}_{1,k}(x)dx - t^2\cos\frac{kt}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\hat{\varphi}_{2,\frac{k}{2}}(x)dx +$$

$$+t^3\sin\frac{kt}{4}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\hat{\varphi}_{3,\frac{k}{4}}(x)dx);$$

$$B(t) \approx \frac{1}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}(\sin kt\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\hat{\varphi}_{0,k}(x)dx +$$

$$+t\cos kt\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\hat{\varphi}_{1,k}(x)dx - t^2\sin\frac{kt}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\hat{\varphi}_{2,\frac{k}{2}}(x)dx -$$

$$-t^3\cos\frac{kt}{4}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\hat{\varphi}_{3,\frac{k}{4}}(x)dx).$$

Рассмотрим в качестве примера функцию

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x\in[-1,1], \\ 0, & x\notin[-1,1]. \end{cases}$$

Ее преобразование Фурье легко находится непосредственно:

$$A(t) = \frac{\sin t}{\pi t}. \qquad (3)$$

Найдем теперь $A(t)$ приближенно и сравним полученный результат с (3). Для достижения большей точности сделаем замену переменных:

$$A(t) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos tx dx = \frac{1}{100\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{y}{100}\right)\cos\frac{ty}{100}dy.,$$

и разложим в обобщенный ряд Тейлора по y $\cos\frac{ty}{100}$:

$$\cos\frac{ty}{100} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{x_{n.k}\in X_n(\mathbb{R})} \frac{\partial^n}{\partial y^n}\left(\cos\frac{ty}{100}\right)|_{y=x_{n,k}}\hat{\varphi}_{n,x_{n,k}}(y) \approx$$

$$\approx \sum_{n=0}^{3}\sum_{x_{n.k}\in X_n(\mathbb{R})} \frac{\partial^n}{\partial y^n}\left(\cos\frac{ty}{100}\right)|_{y=x_{n,k}}\ \hat{\varphi}_{n,x_{n,k}}(y).$$

Тогда в силу того, что носитель функции $f\left(\frac{y}{100}\right)$ – отрезок $[-100,100]$, получим:

$$A(t) \approx \frac{1}{200\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}(\cos\frac{kt}{100}\int_{-100}^{100}\hat{\varphi}_{0,k}(y)dy -$$

$$-\frac{t}{100}\sin\frac{kt}{100}\int_{-100}^{100}\hat{\varphi}_{1,k}(y)dy - (\frac{t}{100})^2\cos\frac{kt}{200}\cdot$$

$$\cdot\int_{-100}^{100}\hat{\varphi}_{2,\frac{k}{2}}(y)dy + \left(\frac{t}{100}\right)^3\sin\frac{kt}{400}\int_{-100}^{100}\hat{\varphi}_{3,\frac{k}{4}}(y)dy).$$

Заметим, что:

а) при $x_{n,k}\notin\mathbb{Z}$ $\operatorname{supp}\varphi_{n,x_{n,k}} \subset [m, m+1]$, где $m\in\mathbb{Z}$ и $x_{n,k}\in(m, m+1)$;

б) при $x_{n,k} = m\in\mathbb{Z}$ $\operatorname{supp}\varphi_{n,x_{n,k}} \subset [m-1, m+1]$.

В силу этого

$$A(t) \approx \frac{1}{200\pi}(\sum_{k=-100}^{100}\cos\frac{kt}{100}\int_{-100}^{100}\hat{\varphi}_{0,k}(y)dy -$$

$$-\sum_{k=-100}^{100}\frac{t}{100}\sin\frac{kt}{100}\int_{-100}^{100}\hat{\varphi}_{1,k}(y)dy -$$

$$-\sum_{k=-200}^{200}\left(\frac{t}{100}\right)^2\cos\frac{kt}{200}\int_{-100}^{100}\hat{\varphi}_{2,\frac{k}{2}}(y)dy +$$

$$+\sum_{k=-400}^{400}\left(\frac{t}{100}\right)^3\sin\frac{kt}{400}\int_{-100}^{100}\hat{\varphi}_{3,\frac{k}{4}}(y)dy).$$

Все интегралы в этом представлении вычисляются точно:

$$\int\limits_{-100}^{100}\hat{\varphi}_{o,k}(y)dy=\begin{cases}\int\limits_{k-1}^{k+1}\hat{\varphi}_{o,k}(y)dy=\int\limits_{-1}^{1}\hat{\varphi}_{o,o}(y)dy=1,\\ k=-99,...,99,\\ \int\limits_{-100}^{-99}\hat{\varphi}_{o,-100}(y)dy=\int\limits_{0}^{1}\hat{\varphi}_{o,o}(y)dy=\frac{1}{2},\\ k=-100,\\ \int\limits_{99}^{100}\hat{\varphi}_{o,100}(y)dy=\int\limits_{-1}^{0}\hat{\varphi}_{o,o}(y)dy=\frac{1}{2},\\ k=100,\\ 0,\ |k|>100,\end{cases}$$

$$\int\limits_{-100}^{100}\hat{\varphi}_{1,k}(y)dy=$$

$$=\begin{cases}\int\limits_{k-1}^{k+1}\hat{\varphi}_{1,k}(y)dy=\int\limits_{-1}^{1}\hat{\varphi}_{1,o}(y)dy=0,\\ k=-99,...,99,\\ \int\limits_{-100}^{-99}\hat{\varphi}_{1,-100}(y)dy=\int\limits_{0}^{1}\hat{\varphi}_{1,o}(y)dy=\frac{13}{72},\\ k=-100,\\ \int\limits_{99}^{100}\hat{\varphi}_{1,100}(y)dy=\int\limits_{-1}^{0}\hat{\varphi}_{1,o}(y)dy=-\frac{13}{72},\\ k=100,\\ 0,\ |k|>100,\end{cases}$$

$$\int\limits_{-100}^{100}\hat{\varphi}_{2,\frac{k}{2}}(y)dy=$$

$$=\begin{cases}\int\limits_{m}^{m+1}\hat{\varphi}_{2,m+\frac{1}{2}}(y)dy=\int\limits_{0}^{1}\hat{\varphi}_{2,\frac{1}{2}}(y)dy=-\frac{1}{16},\\ k=2m+1,\ \ m=-100,...,99,\\ \int\limits_{m-1}^{m+1}\hat{\varphi}_{2,m}(y)dy=\int\limits_{-1}^{1}\hat{\varphi}_{2,o}(y)dy=\frac{34}{288},\\ k=2m,\ m=-99,...,99,\\ \int\limits_{-100}^{-99}\hat{\varphi}_{2,-100}(y)dy=\int\limits_{0}^{1}\hat{\varphi}_{2,o}(y)dy=\frac{17}{288},\\ k=-200,\\ \int\limits_{99}^{100}\hat{\varphi}_{2,100}(y)dy=\int\limits_{-1}^{0}\hat{\varphi}_{2,o}(y)dy=\frac{17}{288},\\ k=200,\\ 0,\ |k|>100,\end{cases}$$

$$\int\limits_{-100}^{100}\hat{\varphi}_{3,\frac{k}{4}}(y)dy=$$

$$=\begin{cases}\int\limits_{m-1}^{m+1}\hat{\varphi}_{3,m}(y)dy=\int\limits_{-1}^{1}\hat{\varphi}_{3,0}(y)dy=0,\\ k=4m,\ \ m=-99,...,99,\\ \int\limits_{-100}^{-99}\hat{\varphi}_{3,-100}(y)dy=\int\limits_{0}^{1}\hat{\varphi}_{3,o}(y)dy=\frac{38657}{2073600},\\ k=-400\\ \int\limits_{99}^{100}\hat{\varphi}_{3,100}(y)dy=\int\limits_{-1}^{0}\hat{\varphi}_{3,o}(y)dy=-\frac{38657}{2073600},\\ k=400,\\ \int\limits_{m}^{m+1}\hat{\varphi}_{3,m+\frac{1}{2}}(y)dy=\int\limits_{0}^{1}\hat{\varphi}_{3,\frac{1}{2}}(y)dy=0,\\ k=4m+2,\ m=-100,...,99,\\ \int\limits_{m}^{m+1}\hat{\varphi}_{3,m+\frac{1}{4}}(y)dy=\int\limits_{0}^{1}\hat{\varphi}_{3,\frac{1}{4}}(y)dy=-\frac{1}{64},\\ k=4m+1,\ m=-100,...,99,\\ \int\limits_{m}^{m+1}\hat{\varphi}_{3,m+\frac{3}{4}}(y)dy=\int\limits_{0}^{1}\hat{\varphi}_{3,\frac{3}{4}}(y)dy=\frac{1}{64},\\ k=4m+3,\ m=-100,...,99,\\ 0,\ |k|>400.\end{cases}$$

После подстановки получим следующую приближенную формулу для $A(t)$:

$$A(t)\approx\frac{1}{200\pi}\Big(\sum_{k=-99}^{100}\cos\frac{kt}{100}+$$
$$+\frac{13t}{3600}\sin t-\left(\frac{t}{100}\right)^2\Big(-\frac{1}{16}\sum_{m=-100}^{99}\cos\frac{(2m+1)t}{200}+$$
$$+\frac{34}{288}\sum_{m=-99}^{99}\cos\frac{mt}{100}+\frac{17}{144}\cos t\Big)+ \tag{4}$$
$$+\left(\frac{t}{100}\right)^3\Big(-\frac{77314}{2073600}\sin t-\frac{1}{64}\sum_{m=-100}^{99}\sin\frac{(4m+1)t}{400}+$$
$$+\frac{1}{64}\sum_{m=-100}^{99}\sin\frac{(4m+3)t}{400}\Big).$$

Расчет, проведенный в системе Maxima (версия 5.20.1), показал, что модуль разности приближенно вычисленной по формуле (4) и точной $A(t)$ на промежутке $[-10\pi,10\pi]$ не превосходит значения $4{,}5\cdot10^{-5}$.

Отметим, что описанный выше метод может быть применен также к интегральным преобразованиям Лапласа и Хартли.

Заключение

Предложен новый способ приближенного нахождения преобразования Фурье функций – с помощью представления синусов и косинусов отрезком обобщенного ряда Тейлора для бесконечно дифференцируемых функций на основе атомарных функций – специальных решений с компактным носителем обыкновенных линейных функционально-дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и линейными отклонениями независимой переменной. Полученные приближенные формулы удобны тем, что дают $A(t)$, $B(t)$ в виде функций от t, и не требуют пересчета интегралов.

Литература

1. *Bloomfield P. Fourier Analysis of Time Series. An introduction / P. Bloomsfield. – John Wiley & Sons, 2000. – 260 p.*
2. *Booton R.C. Computational Methods for Electromagnetics and Microwaves / R.C. Booton. – John Wiley & Sons, 1992. – 182 p.*
3. *Chari M.V.K. Numerical methods in electromagnetism / M.V.K. Chari, S.J. Salon. – Academic Press, 2000. – 767 p.*
4. *Снеддон И. Преобразования Фурье / И. Снеддон. – М.: изд-во иностранной литературы, 1955. – 667 с.*
5. *Рвачёв В.А. Обобщенные ряды Тейлора для бесконечно дифференцируемых функций / В.А. Рвачёв // Мат. методы анализа динамических систем. – 1982. – Вып. 6. – С. 99–102.*
6. *Рвачёв В.А. Финитные решения функционально-дифференциальных уравнений и их применение / В.А. Рвачёв // Успехи мат. наук. – 1990. – Т. 45. – Вып. 1(271). – С. 77–103.*
7. *Rvachova T.V. On a relation between the coefficients and the sum of the generalized Taylor series / T.V. Rvachova // Matematicheskaya fizika, analiz, geometriya. – 2003. – Vol. 10, No 2. – P. 262–268.*
8. *Рвачёва Т.В. О скорости приближения бесконечно дифференцируемых функций частичными суммами обобщенного ряда Тейлора / Т.В. Рвачёва // Вісник ХНУ, сер. «Математика, прикладна математика і механіка» – 2010. – № 931. – С. 93–98.*
9. *Рвачёва Т.В. Об асимптотике базисных функций обобщенного ряда Тейлора / Т.В. Рвачёва // Вісник ХНУ, сер. «Математика, прикладна математика і механіка» – 2003. – №602. – С. 94–104.*
10. *Рвачёв В.А. Об эрмитовой интерполяции с помощью атомарных функций / В.А. Рвачёв, Т.В. Рвачёва // Радіоелектронні і комп'ютерні системи. – 2010. – № 4 (45). – С. 100–104.*

Поступила в редакцию 2.03.2011

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф., проф. каф. высшей математики А.Г. Николаев, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков.

ОБЧИСЛЕННЯ ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є ЗА ДОПОМОГОЮ АТОМАРНИХ РЯДІВ ТЕЙЛОРА

Т.В. Рвачова

Запропоновано новий метод наближеного знаходження перетворення Фур'є функцій – за допомогою зображення синусів и косинусів відрізком узагальненого ряду Тейлора для нескінченно диференційовних функцій на базі атомарних функцій – спеціальних розв'язків з компактним носієм звичайних лінійних функціонально-диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами та лінійними відхиленнями аргументу, що мають добрі апроксимаційні властивості. Одержані наближені формули зручні тим, що дають перетворення A(t), B(t) у вигляді функцій від t, і не потребують перерахунку інтегралів.

Ключові слова: перетворення Фур'є, атомарна функція, узагальнений ряд Тейлора, базисні функції узагальненого ряду Тейлора.

COMPUTATION OF FOURIER TRANSFORM WITH THE HELP OF THE ATOMIC FUNCTIONS

T.V. Rvachova

A new method of approximate computation of Fourier transform is proposed with the help of the generalized Taylor series for infinitely differentiable functions based on atomic functions which are the special solutions with a compact support of ordinary linear functional differential equations with constant coefficients and linear deviations of argument which possess good approximation properties. Obtained approximate formulas are convenient because they give transforms A(t), B(t) as functions of t. Thus, iterative calculation of integrals is not required.

Key words: Fourier transform, atomic function, the generalized Taylor series, basic functions of the generalized Taylor series.

Рвачёва Татьяна Владимировна – канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт», Харьков, Украина, e-mail: rvachova@gmail.com.