УДК 519.718

А.М. РОМАНКЕВИЧ, В.В. ГРОЛЬ, В.А. РОМАНКЕВИЧ, А.П. ФЕСЕНЮК

Национальный технический университет Украины «КПИ», Украина

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ СТАТИСТИЧЕСКОГО РАСЧЕТА НАДЕЖНОСТИ ОМС, КОТОРЫМ СООТВЕТСТВУЮТ ИЕРАРХИЧЕСКИЕ GL-МОДЕЛИ

Рассматривается методика расчета вероятности безотказной работы отказоустойчивых реконфигурируемых многопроцессорных систем, основанная на проведении статистических экспериментов с иерархическими GL-моделями поведения ОМС в потоке отказов. Анализируются несколько источников возникновения погрешности вычислений: методическая погрешность, трансформированная погрешность и погрешность округления. Приводятся соотношения для оценки погрешности, позволяющие учесть влияние всех указанных факторов, как каждого в отдельности, так и их совокупности.

Ключевые слова: *надежность, отказоустойчивые многопроцессорные системы, методическая погрешность, трансформированная погрешность, погрешность округления, статистический эксперимент.*

Введение

Отказоустойчивые реконфигурируемые многопроцессорные системы (ОМС) используются при решении важных задач, например, для управления сложными объектами. Одним из важнейших требований к таким системам является их высокая надежность. В настоящее время задача разработки эффективных методов расчета характеристик надежности ОМС не решена до конца и представляет научный интерес. Расчет надежности, о котором идет речь, производится на этапе проектирования системы. В качестве основного показателя надежности рассматривается вероятность безотказной работы системы на протяжении определенного промежутка времени.

Вопросам расчета надежности ОМС уделяется много внимания, однако часто рассматриваются некоторые частные случаи ОМС, для которых зависимость между отказами элементов системы и отказами системы в целом подчиняется определенному закону. Например, в работах [1-3] рассматриваются системы, устойчивые к отказам последовательно размещенных элементов, и предлагаются соответствующие методы расчета надежности. В [4] рассматриваются двухуровневые отказоустойчивые системы. В работах [5-7] предлагается метод расчета надежности для произвольных ОМС, основанный на проведении статистических экспериментов с GL-моделями [8].

GL-модели отражают поведение ОМС при возникновении отказов элементов системы. Входными данными для GL-модели являются булевы переменные, отражающие состояния элементов системы (0 – отказ, 1 – исправное состояние). GL-модели фактически отвечают на вопрос, сохраняет ли система работоспособность при отказах некоторых ее элементов.

В настоящей работе получила дальнейшее развитие методика статистического расчета надежности на случай ОМС, которые описываются иерархическими GL-моделями. Вычисления, выполненные согласно этой методике, имеют погрешность, и ниже учитываются несколько источников возникновения погрешности: методическая погрешность, трансформированная погрешность и погрешность округления.

Определения и обозначения

Будем называть иерархическими GL-моделями такие, которые могут быть представлены в виде суперпозиции других GL-моделей. В данной работе подсистемой будем называть подмножество элементов системы, состояния которых являются входными данными для некоторой GL-модели в иерархической GL-модели ОМС. В пользу необходимости введения таких дополнительных понятий говорит тот факт, что практически для любой структурно или функционально иерархической ОМС можно построить как иерархическую, так и неиерархическую GL-модель, и для некоторых неиерархических ОМС может быть построена иерархическая GL-модель. Следует отметить, что практически всегда иерархия модели совпадает со структурной иерархией системы. Можно сказать, что ОМС, содержащие более одной подсистемы уже являются иерархическими. В частном случае, на верхнем уровне иерархии может быть 0-отказоустойчивая подсистема.

Пусть S - некоторая подсистема отказоустойчивой многопроцессорной системы, для которой построена иерархическая GL-модель. Пусть S содержит n элементов e_i ($i = 1 \ldots n$). Как уже отмечалось, будем обозначать отказ элемента (на протяжении определенного промежутка рабочего времени τ) $e_i = 0$, а исправное состояние – $e_i = 1$. Совокупность состояний элементов подсистемы S будем обозначать с помощью вектора $\mathbf{E}_k = (e_1, \ e_2, \ \ldots, \ e_n)$, который в дальнейшем будем называть вектором состояния системы. Количество различных векторов $\mathbf{E}_k$ равно $N = 2^n$. Предположим, что все такие векторы пронумерованы, и $k = 1, \ldots, N$ - индекс вектора $\mathbf{E}_k$.

Поскольку в дальнейшем будут использоваться рекуррентные соотношения, то следует подчеркнуть, что S для нас будет обозначать систему либо подсистему, для которой на текущей итерации производиться расчет, а e_i будут обозначать состояния подсистем S_i или процессоров x_i, являющиеся входными данными на данном шаге. При этом предполагается, что расчет вероятности безотказной работы для подсистем S_i был выполнен на предыдущем шаге.

Далее приведем обозначения для вероятностных характеристик системы и её элементов (будем считать, что все рассматриваемые характеристики рассчитаны для определенного промежутка времени τ): $p(x_i)$ – вероятность безотказной работы процессора, $q(x_i)$ – вероятность отказа процессора x_i, $p(S_i)$ – вероятность безотказной работы подсистемы S_i, $q(S_i)$ – вероятность отказа подсистемы S_i, $p(e_i)$ – вероятность безотказной работы элемента e_i, $q(e_i)$ – вероятность отказа элемента e_i, $p(S)$ – вероятность безотказной работы системы или подсистемы S, $q(S)$ – вероятность отказа S, $p(\mathbf{E}_k)$ – вероятность того, что элементы S находятся в состояниях описанных вектором $\mathbf{E}_k$.

1. Расчет вероятности безотказной работы ОМС

Довольно часто проще вычислить вероятность отказа системы, а затем определить вероятность безотказной работы как $p(S) = 1 - q(S)$.

Для любой ОМС среди всех возможных векторов её состояний существуют такие, что приводят к отказу системы, и такие, которые оставляют систему работоспособной. Другими словами, имеется определенная зависимость между отказами или исправными состояниями элементов системы и отказами или исправными состояниями системы в целом. Пусть $\alpha(\mathbf{E}_k)$ – индикаторная функция состояния системы, причем для удобства составления формул $\alpha(\mathbf{E}_k) = 1$ или $\alpha(\mathbf{E}_k) = 0$, если вектор состояния $\mathbf{E}_k$ приводит к отказу системы или, соответственно, не нарушает её работоспособности. Тогда вероятность отказа системы или подсистемы может быть вычислена следующим образом [5-7]:

$$q(S) = \sum_{k=1}^{N} \alpha(\mathbf{E}_k) \cdot p(\mathbf{E}_k) \qquad (1)$$

где $p(\mathbf{E}_k) = \prod_{i=1}^{n} \left(e_i \cdot (1 - q(e_i)) + (1 - e_i) \cdot q(e_i) \right)$.

Практически расчет проводится путем выполнения статистических экспериментов с GL-моделями, то есть формирования в каждом такте вектора состояния системы $\mathbf{E}_k$, получения значения $\alpha(\mathbf{E}_k)$, вычисления $p(\mathbf{E}_k)$ и накопления суммы. Для проведения таких операций требуются специальный источник формирования векторов состояния системы, GL-модель ОМС для получения $\alpha(\mathbf{E}_k)$ и соответствующие вычислительные средства. Для иерархических моделей подобный эксперимент является многоэтапным.

При большом числе элементов системы количество вычислений в соотношении (1) сильно возрастает, что не позволяет выполнить расчеты в приемлемое время. Поэтому предлагается проводить расчет не для всех возможных векторов состояния системы, а для некоторой выборки Ω, сформированной генератором. При этом может быть получено оценочное значение искомой характеристики надежности:

$$\overline{q}(S) = \frac{N}{L} \cdot \sum_{\mathbf{E}_k \in \Omega} \alpha(\mathbf{E}_k) \cdot p(\mathbf{E}_k), \qquad (2)$$

где N – общее количество векторов,

L – количество векторов в выборке Ω (объем выборки).

Как было указано в [5-6] расчет вероятности отказа системы может проводиться поэтапно для каждой кратности отказа отдельно. В настоящей статье мы не будем на этом останавливаться с целью упрощения выкладок, так как рекомендованная методика может быть применена для каждого этапа в отдельности.

Расчет надежности иерархической ОМС проводится от уровня к уровню. На каждом уровне с помощью (1) или (2) выполняется расчет надежности подсистем, и результаты этих вычислений являются исходными данными для расчетов, выполняемых на следующем уровне.

При применении такого рекуррентного подхода если элементом e_i системы S является процессор x_i, то $q(e_i)=q(x_i)$, если среди элементов системы присутствуют подсистемы S_i, то $q(e_i)=q(S_i)$ или $q(e_i)=\bar{q}(S_i)$. Последний случай $q(e_i)=\bar{q}(S_i)$ возникает при получении статистической оценки значения вероятности отказа подсистемы S_i с помощью соотношения (2), что приводит к возникновению погрешности в исходных данных.

2. Оценка погрешности

В работах [9-11] рассматриваются четыре источника погрешности расчета: математическая модель, исходные данные, приближенный метод и округления при вычислениях. В нашем случае будут рассматриваться три источника: погрешность, связанная с методом (методическая погрешность), погрешность исходных данных (трансформированная погрешность) и погрешность округления (погрешность математической модели считаем равной нулю).

Можно показать, что величина $\bar{q}(S)$ является состоятельной, несмещенной, и имеет нормальное распределение при достаточно большом L [11,12]. Таким образом, для оценки методической погрешности $\Delta q_м(S)=\left|q(S)-\bar{q}(S)\right|$ расчета надежности ОМС можно использовать правило «трех сигм»: $P\left(\left|\bar{q}(S)-q(S)\right|<3\sigma\right)\geq 0.997$, где $\sigma=\sqrt{D\left(\bar{q}(S)\right)}$,

$$D\left(\bar{q}(S)\right)=\frac{N}{L}\sum_{k=1}^{N}\alpha(\mathbf{E}_k)\cdot p^2(\mathbf{E}_k)-$$

$$-\frac{1}{L}\left(\sum_{k=1}^{N}\alpha(\mathbf{E}_k)\cdot p(\mathbf{E}_k)\right)^2.$$

Приведенное соотношение для расчета дисперсии величины $\bar{q}(S)$ требует значительных вычислений, поэтому на практике следует использовать несмещенную оценку для дисперсии [11,12]:

$$\bar{D}=\frac{N^2}{L(L-1)}\sum_{\mathbf{E}_k\in\Omega}\alpha(\mathbf{E}_k)\cdot p^2(\mathbf{E}_k)-$$
$$-\frac{N^2}{L^2(L-1)}\left(\sum_{\mathbf{E}_k\in\Omega}\alpha(\mathbf{E}_k)\cdot p(\mathbf{E}_k)\right)^2. \qquad (3)$$

При вычислении некоторой функции $z=z(y_1,\ \ldots,\ y_n)$ трансформированная погрешность $\Delta z_т$, обусловленная входными погрешностями Δy_i аргументов y_i, может быть вычислена следующим образом (с точностью до величин второго порядка относительно Δy_i) [11]:

$$\Delta z_т=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial z}{\partial y_i}\cdot\Delta y_i\ . \qquad (4)$$

Если входные погрешности Δy_i являются случайными величинами с математическими ожиданиями $M(\Delta y_i)=m_i$ и стандартами $\sigma(\Delta y_i)=\sigma_i$, то трансформированная погрешность $\Delta z_т$ также будет случайной величиной с характеристиками:

$$M(\Delta z_т)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial z}{\partial y_i}\cdot m_i;$$
$$\sigma(\Delta z_т)=\sqrt{D(\Delta z_т)}; \qquad ,\ (5)$$
$$D(\Delta z_т)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial z}{\partial y_i}\right)^2\cdot\sigma_i^2+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}\frac{\partial z}{\partial y_i}\cdot\frac{\partial z}{\partial y_j}k_{ij},$$

где k_{ij} – корреляционные моменты погрешностей Δy_i и Δy_j.

Погрешность округления вызвана тем, что для представления чисел в ЭВМ используется конечное число разрядов. Для дифференцируемой функции $z=z(y_1,\ \ldots,\ y_h)$ погрешность округления Δz_o равна [11]:

$$\Delta z_o=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial z}{\partial y_i}\cdot\Delta r_i\ , \qquad (6)$$

где Δr_i – абсолютные погрешности округления чисел y_i.

Полная погрешность Δz равна сумме указанных составляющих погрешностей:

$$\Delta z=\Delta z_м+\Delta z_т+\Delta z_o.$$

Если составляющие погрешности являются независимыми случайными величинами, то и результирующая погрешность будет случайной величиной. Для получения математического ожидания и дисперсии результирующей погрешности достаточно сложить математические ожидания и дисперсии составляющих:

$$M(\Delta z)=M(\Delta z_м)+M(\Delta z_т)+M(\Delta z_o);$$
$$D(\Delta z)=D(\Delta z_м)+D(\Delta z_т)+D(\Delta z_o).$$

При достаточно большом количестве аргументов полная погрешность Δz имеет нормальный закон распределения, и на практике при определении максимального значения погрешности используют правило «трех сигм»: $|\Delta z|=|M(\Delta z)|+|3\sigma(\Delta z)|$.

На общую погрешность вычисления надежности системы или подсистемы S влияют все рассмотренные источники погрешности, причем $\Delta q(S)=\Delta q_м(S)+\Delta q_т(S)+\Delta q_o(S)$.

При применении статистического метода расчета методическая погрешность $\Delta q_м(S)$ является случайной величиной, причем функция для получения статистической оценки подобрана таким образом, что $M(\Delta q_м(S))=0$. Трансформированная погрешность $\Delta q_т(S)$ зависит от случайных погрешностей в исходных данных, поэтому также является случайной величиной. Учитывая вышеизложенное, можем записать

$$\left|\Delta q(S)\right| = \left|M\left(\Delta q(S)\right)\right| + \left|3\sqrt{D\left(\Delta q(S)\right)}\right|. \quad (7)$$

Математическое ожидание рассчитывается, как

$$M\left(\Delta q(S)\right) = M\left(\Delta q_т(S)\right) + \Delta q_o(S), \quad (8)$$

где $M\left(\Delta q_т(S)\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial q(S)}{\partial q(e_i)} \cdot M\left(\Delta q(e_i)\right)$,

величины $M(\Delta q(e_i))$ были определены на предыдущем этапе расчета с помощью (8), $\Delta q_o(S) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial q(S)}{\partial q(e_i)} \cdot \Delta q_o(e_i)$, $\Delta q_o(e_i)$ – погрешности округления $q(e_i)$.

Соотношение для расчета дисперсии принимает следующий вид:

$$D\left(\Delta q(S)\right) = D\left(\Delta q_м(S)\right) + D\left(\Delta q_т(S)\right), \quad (9)$$

где $D\left(\Delta q_т(S)\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial q(S)}{\partial q(e_i)}\right)^2 \cdot D\left(\Delta q(e_i)\right)$,

корреляционные моменты в соотношении (5) равны нулю $k\left(\Delta q(e_i), \Delta q(e_j)\right) \underset{i \neq j}{=} 0$, поскольку случайные величины $\Delta q(e_i)$ и $\Delta q(e_j)$ независимы, дисперсии $D(\Delta q(e_i))$ были определены на предыдущем этапе расчета с помощью (9), $D(\Delta q_м(S))$ определяется с помощью соотношения (3).

В рассматриваемом случае, то есть когда используется иерархическая GL-модель ОМС, появляются некоторые особенности расчета погрешности. На нижнем уровне иерархии исходные данные – вероятности отказа процессоров $p(x_i)$ – не содержат трансформированной погрешности. Следовательно, погрешность вычисления надежности подсистемы нижнего уровня S содержит только методическую погрешность и погрешность округления ($\Delta q_т(S) = 0$).

Тогда,

$$\Delta q(S) = \Delta q_м(S) + \Delta q_o(S). \quad (10)$$

В приведенных выше соотношениях в качестве вычисляемой функции выступает $q(S)$, определяемая соотношением (1), поэтому

$$\frac{\partial q(S)}{\partial q(e_i)} = \sum_{k=1}^{N} \Big[\alpha(\mathbf{E}_k) \cdot (1 - 2e_i) \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \Big((1 - e_j) q(e_j) + e_j \big(1 - q(e_j)\big) \Big) \Big]. \quad (11)$$

Таким образом, расчет вероятности отказа системы, описываемой иерархической GL-моделью, производится рекуррентным применением соотношений (1) или (2) (в зависимости от количества входных переменных). Оценка погрешности для подсистем высших уровней выполняется на основании соотношений (7), (8) и (9), а для подсистем нижнего уровня следует учитывать условие (10).

Заключение

В работе предлагается методика расчета вероятности безотказной работы ОМС, в основе которой лежит выполнение статистических экспериментов с иерархической GL-моделью поведения ОМС в потоке отказов. Рассматривается иерархическая модель системы, подсистемы которой не имеют общих элементов.

Получены соотношения, позволяющие учесть влияние различных факторов на погрешность результата вычислений: методической погрешности, трансформированной погрешности и погрешности округления.

Литература

1. *Zuo M.J. Reliability Evaluation of Combined k-out-of-n :F, Consecutive-k-out-of-n:F, and Linear Connected-(r, s)-out-of-(m, n):F System Structures / M.J. Zuo, D. Lin, and Y. Wu // IEEE Transaction on Reliability. – 2000. – Vol. 49, № 1. – P. 99-104.*

2. *Boland P. J. An O(k² · log(n)) Algorithm for Computing the Reliability of Consecutive-k-out-of-n: F Systems / P. J. Boland and F.J. Samaniego // IEEE Transaction on Reliability. – 2004. – Vol. 53, № 1. – P. 3-6.*

3. *Yamamoto H. Recursive Formulas for the Reliability of Multi-State Consecutive-k-out-of-n:G Systems / H. Yamamoto, M. J. Zuo, T. Akiba, and Z. Tian // IEEE Transaction on Reliability. – 2006. – Vol. 55, № 1. – P. 98-104.*

4. *Stopjakova V. Reliability of Two-Stage Weighted-k-out-of-n Systems With Components in Common / V. Stopjakova, P. Malosek, M. Matej, V. Nagy and M. Margala // IEEE Transaction on Reliability. – 2005. – Vol. 54, № 3. – P. 431-440.*

5. *Романкевич А.М. Об одном подходе к расчету надежности отказоустойчивых многопроцессорных систем / А.М. Романкевич, В. В. Гроль, Л.Ф. Карачун, М.Н. Орлова, В. А. Романкевич // Автоматизированные системы управления и приборы автоматики. – 2002. – № 119. – С. 54-58.*

6. *Гроль В.В. Об одной особенности тестирования моделей отказоустойчивых многопроцессорных систем при расчете их надежности / В.В. Гроль, М.Н. Орлова, В.А. Романкевич, Рабах Ал Шбул. // Вісник Технологічного університету Поділля. – 2003. – Т. 2, № 3. – С. 40-42.*

7. Гроль В.В. Об оценке погрешности расчета надежности отказоустойчивых многопроцессорных систем / В.В. Гроль, В.А. Романкевич, А.П. Фесенюк // Радіоелектронні і комп'ютерні системи. – 2009. – № 5. – С. 56-59.

8. Романкевич А. М. Графо-логические модели для анализа сложных отказоустойчивых вычислительных систем / А.М. Романкевич, Л.Ф. Карачун, В.А. Романкевич // Электронное моделирование. – 2001. – Т. 23, № 1. – С. 102-111.

9. Калиткин Н.Н. Численные методы / Н.Н. Калиткин. – М.: Наука, 1978. – 512 с.

10. Михлин С. Г. Погрешности вычислительных процессов / С. Г. Михлин. – Тбилиси: Институт прикладной математики им. акад. И. Н. Векуа Тбилисского государственного университета, 1983. – 260 с.

11. Вероятностные методы в вычислительной технике: Учеб. пособие для вузов по спец. ЭВМ / [Крайников А. В., Кудриков Б.А., Лебедев А.Н. и др.]; под. ред. А.Н. Лебедева и Е.А. Черняковского. – М.: Высш. Шк., 1986. – 132 с.

12. Вентцель Е.С. Теория вероятностей / Е.С. Вентцель. – М.: Наука, 1964. – 576 с.

Поступила в редакцию 28.01.2010

Рецензент: д-р техн. наук, проф., проф. кафедры Автоматизации экспериментальных исследований Е.Т. Володарский, Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт», Украина.

ОЦІНКА ПОХИБКИ СТАТИСТИЧНОГО РОЗРАХУНКУ НАДІЙНОСТІ ВІДМОВОСТІЙКИХ РЕКОНФІГУРОВНИХ БАГАТОПРОЦЕСОРНИХ СИСТЕМ, ЯКИМ ВІДПОВІДАЮТЬ ІЄРАРХІЧНІ GL-МОДЕЛІ

О.М. Романкевич, В.В. Гроль, В.О. Романкевич, А.П. Фесенюк

Розглядається методика розрахунку імовірності безвідмовної роботи відмовостійких реконфігуровних багатопроцесорних систем, яка базується на проведенні статистичних експериментів з ієрархічними GL-моделями поведінки відмовостійких багатопроцесорних систем у потоці відмов. Аналізуються кілька джерел виникнення похибки обчислень: методична похибка, трансформована похибка і похибка округлення. Приводяться співвідношення для оцінки похибки, які дозволяють врахувати вплив всіх вказаних факторів, як кожного окремо, так і їх сукупності.

Ключові слова: надійність, відмовостійкі багатопроцесорні системи, методична похибка, трансформована похибка, похибка округлення, статистичний експеримент.

ERROR ESTIMATION OF THE STATISTICAL RELIABILITY CALCULATION OF FAULT-TOLERANT MULTIPROCESSOR SYSTEMS, DESCRIBED BY HIERARCHICAL GL-MODELS

O.M. Romankevich, V.V. Grol, V.O. Romankevich, A.P. Feseniuk

In the paper considered the methodology of calculating the reliability of fault-tolerant reconfigurable multiprocessor systems based on conducting statistical experiments with hierarchical GL-models of system behavior in the flow of faults. Are analyzed several sources of error of calculation: methodical error, the transformed error and the error of rounding. The formulas for the error estimates to take account of the impact of all these factors are proposed.

Key words: reliability, fault-tolerant multiprocessor systems, methodical error, transformed error, rounding error, statistical experiment.

Романкевич Алексей Михайлович – д-р техн. наук, проф., проф. специализированных компьютерных систем, Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт», Киев, Украина, e-mail: romankev@scs.ntu-kpi.kiev.ua.

Гроль Владимир Васильевич – д-р техн. наук, ст. научн. сотр., проф. кафедры специализированных компьютерных систем, Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт», Киев, Украина, e-mail: romankev@scs.ntu-kpi.kiev.ua.

Романкевич Виталий Алексеевич – канд. техн. наук, доц., доц. кафедры специализированных компьютерных систем, Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт», Киев, Украина, e-mail: romankev@scs.ntu-kpi.kiev.ua.

Фесенюк Андрей Петрович – аспирант кафедры специализированных компьютерных систем, Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт», Киев, Украина, e-mail: andrew_fesenyuk@ukr.net.