УДК 519.65

М.О. МАШНИЦЬКИЙ

Вінницький національний технічний університет, Україна

ІНТЕРПОЛЯЦІЯ БАГАТОПАРАМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ НА ОСНОВІ МОДИФІКАЦІЙ РІЗНИЦЕВИХ МЕТОДІВ ГАУСА

В даній статті розглядаються інтерполяційні методи моделювання обєктів, які описуються багатопараметричними математичними моделями. Запропоновано різницеві методи, що дозволяють досить вдало промоделювати тривимірні поверхні різних типів. Розглянуто приклад моделювання трьохвимірної поверхні, яка задана статично, за допомогою запропонованих методів. Дані методи на відміну від класичних дозволяють моделювати багатопараметричні об'єкти, які задано на основі експериментальних даних.

Ключеві слова: *моделювання, інтерполяційні методи моделювання, інтерполяція, різницеві методи, інтерполяційні методи Гауса, багатопараметрична інтерполяція, різницева інтерполяція.*

Актуальність. Постановка задачі

Інтерполювання багатопараметричних функцій є достатньо актуальною задачею. Стрімкий розвиток електроніки та техніки призвів до необхідності дослідження та моделювання об'єктів, у яких математична модель залежить від багатьох параметрів. При моделювання об'єктів, які досліджуються експериментальним шляхом, постає задача ідентифікації їх математичних моделей в аналітичному вигляді. Для вирішення цієї задачі саме потрібно застосовувати інтерполяційні методи моделювання, які об'єднують експеримент та теорію й використовуються в наступних галузях: медицина, космічні дослідження, геофізика. Це значно розширює області впровадження результатів досліджень крім традиційної комп'ютерної графіки.

Одними із важливих інтерполяційних методів моделювання є інтерполяційні методи Гауса. На даний час алгоритм методів Гауса розроблений лише для функції, яка залежить від трьох параметрів [1]. В даній статі пропонується модифікація методів Гауса для моделювання багатопараметричних функцій.

Задача інтерполяційного моделювання багатопараметричних об'єктів полягає в побудові функції $F(x1, x2,..., xm)$, яка приймає значення в деяких точках $x1_{i1}, x2_{i2},..., xm_{im}$ ($i1=\overline{1..n}, i2=\overline{1..n},..., im=\overline{1..n}$), що називаються вузлами інтерполювання, окремі значення:

$$f(x1_0, x2_0,..., xm_0) = \varphi_{0,0,...,0},$$

$$f(x1_1, x2_0,..., xm_0) = \varphi_{1,0,...,0}, \ldots,$$

$$f(x1_1, x2_1,..., xm_1) = \varphi_{1,1,...,1}, \ldots,$$

$$f(x1_n, x2_n,..., xm_n) = \varphi_{n,n,...,n}.$$

В загальному випадку інтерполяція функція зводиться до знаходження її не табличних значень [2 – 4].

Задачі інтерполяції багатопараметричних функцій необхідно розв'язувати, коли проводиться дослідження об'єктів, які описуються багатьма параметрами, в задачах різного типу моделювання, топографії та багатьох інших галузях. На даний момент в цій галузі проводиться активна дослідницька робота провідних компаній з виробництва графічних прискорювачів та компаній з виготовлення програмного забезпечення для моделювання складних об'єктів.

Метою статті є розширення використання класичних інтерполяційних методів моделювання на випадок дослідження об'єктів, у яких математична модель залежить від багатьох параметрів .

1. Описання методу

Нехай маємо $(2n+1)^m$ рівновіддалених вузлів інтерполювання:

$$(x1_{-n}, x2_{-n},..., z_{-n}), (x1_{-(n-1)}, x2_{-n},..., xm_{-n}),$$
$$..., (x1_{-1}, x2_0,..., xm_0), (x1_0, x2_0,..., xm_0),...,$$
$$(x1_n, x2_n,..., xm_{n-1}),\ (x1_n, x2_n,..., xm_n),$$

де
$$\Delta x1_{i1} = x_{i1+1} - x_{i1} = h_{x1} = const,$$
$$\Delta x2_{i2} = \ = x2_{i2+1} - x2_{i2} = h_{x2} = const,$$
$$\Delta xm_{im} = \ xm_{im+1} - xm_{im} = h_{xm} = const,$$
$$(i1=\overline{-n..(n-1)},\ i2=\overline{-n..(n-1)},..., im=\overline{-n..(n-1)})$$

і для функції $\varphi = f(x1, x2,..., xm)$ задані її значення в цих вузлах:

$$\varphi_{i1,i2,...,im} = f(x1_{i1}, x2_{i2},..., xm_{im}),\ (i1 = 0, \pm 1,..., \pm n,$$
$$i2 = 0, \pm 1,..., \pm n,...,\ im = 0, \pm 1,..., \pm n\ ).$$

© М.О. Машницький

Необхідно побудувати поліном $P(x1, x2, ..., xm)$ ступеня не вище $2n$ такий, що

$$P(x1_{i1}, x2_{i2}, ..., xm_{im}) = \varphi_{i1,i2,...,im}$$

при ($i1, i2, ..., im = 0, \pm 1, ..., \pm n$).

З останньої умови випливає, що

$$\Delta^{r1+r2+...+rm} P(x1_{i1}, x2_{i2}, ..., xm_{im}) = \Delta^{r1+r2+...+rm} \varphi_{ijk}, \quad (1)$$

для всіх відповідних значень i1 і r1, r2 і i2,…, rm і rm.

Будемо шукати поліном у вигляді:

$$\begin{aligned} P(x1, x2, ..., xm) &= C_{00...0} + C_{10...0}(x1 - x1_0) + \\ &+ C_{010...0}(x2 - x2_0) + ... + C_{00...m} \times \\ &\times (xm - xm_0) + C_{20...0}(x1 - x1_0)(x1 - x1_1) + \\ &+ C_{110...0}(x1 - x1_0)(x2 - x2_0) + C_{10...01} \times \\ &\times (x1 - x1_0)(xm - xm_0) + C_{010...01} \times \\ &\times (x2 - x2_0)(xm - xm_0) + C_{020...0} \times \\ &\times (x2 - x2_0)(x2 - x2_1) + ... + C_{00...02} \times \\ &\times (xm - xm_0)(xm - xm_1) + ... \end{aligned} \quad (2)$$

Будемо обраховувати коефіцієнти $C_{i1,i2,...,im}$ ($i1 = \overline{0..2n}, i2 = \overline{0..2n}, ..., \; im = \overline{0..2n}$) аналогічно, як обраховувалось для інтерполяційних формул Ньютона [5] та врахуємо формулу (2), і в результаті отримаємо загальну формулу коефіцієнтів, яка має такий вигляд:

$$C_{i1,i2,...,im} = \frac{\Delta^{i1,i2,...,im} \varphi_{r1,r2,...,rm}}{i1! i2! \cdot ... \cdot im! h_{x1}^{i1} h_{x2}^{i2} \cdot ... \cdot h_{xm}^{im}},$$

де $i1 = \overline{0..2n}, i2 = \overline{0..2n}, ..., im = \overline{0..2n}$; $r1 = -\lfloor i1/2 \rfloor$; $r2 = -\lfloor i2/2 \rfloor$; …; $rm = -\lfloor im/2 \rfloor$.

Введемо змінні $p1$, $p2$,…, pm, які відповідно дорівнюють

$$p1 = \frac{(x1 - x1_n)}{h_{x1}}, \; p2 = \frac{x2 - x2_n}{h_{x2}}, ..., \; pm = \frac{(xm - xm_n)}{h_{xm}},$$

підставимо їх в формулу (2) та отримаємо вираз:

$$\begin{aligned} P(x1, x2, ..., xm) &= \varphi_{0,0,...,0} + p1\Delta^{10...0}\varphi_{0,0,...,0} + \\ &+ p2\Delta^{010...0}\varphi_{0,0,...,0} + ... + pm\Delta^{00...01}\varphi_{0,0,...,0} + \\ &+ \frac{p1(p1-1)}{2!}\Delta^{20...0}\varphi_{-1,0,...,0} + p1p2 \times \\ &\times \Delta^{110...0}\varphi_{0,0,...,0} + p1pm\Delta^{101}\varphi_{0,0,...,0} + \\ &+ p2pm\Delta^{010...01}\varphi_{0,0,...,0} + \\ &+ \frac{p2(p2-1)}{2!}\Delta^{020...0}\varphi_{0,-1,0,...,0} + ... \end{aligned} \quad (3)$$

Введемо означення узагальненого степеня для функцій m-змінних. Узагальненим степенем чисел $(p1 + a)$, $(p2 + a)$,…, $(pm + a)$ будемо називати добуток, який містить в собі n множників, перший з яких дорівнює $(p1 + a)$, $(p2 + a)$,…, $(pm + a)$ відповідно, а кожний наступний на 1 менший від попереднього:

$$\begin{aligned} (p1 + a)^{[n]} &= (p1 + a)(p1 + a - 1) \cdot ... \times \\ &\times (p1 + a - n + 1), \\ (p2 + a)^{[n]} &= (p2 + a)(p2 + a - 1) \cdot ... \times \\ &\times (p2 + a - n + 1), \\ (pm + a)^{[n]} &= (pm + a)(pm + a - 1) \cdot ... \times \\ &\times (pm + a - n + 1). \end{aligned} \quad (4)$$

Використаємо формули узагальнюючих степенів (4) та підставимо в формулу (3) в результаті отримаємо формулу:

$$\begin{aligned} P(x1, x2, ..., xm) &= \varphi_{0,0,...,0} + p1\Delta^{10...0}\varphi_{0,0,...,0} + \\ &+ p2\Delta^{010...0}\varphi_{0,0,...,0} + ... + \\ &+ pm\Delta^{00...01}\varphi_{0,0,...,0} + \frac{p1^{[2]}}{2!} \times \\ &\times \Delta^{20...0}\varphi_{-1,0,...,0} + p1p2\Delta^{110...0}\varphi_{0,0,...,0} + \\ &+ p1pm\Delta^{10...01}\varphi_{0,0,...,0} + p2pm \times \\ &\times \Delta^{010...01}\varphi_{0,0,...,0} + \frac{p2^{[2]}}{2!} \times \\ &\times \Delta^{020...0}\varphi_{0,-1,0,...,0} + ... + \\ &+ \frac{pm^{[2]}}{2!}\Delta^{00...02}\varphi_{0,0,...,0,-1} + ... \end{aligned} \quad (5)$$

З формул (5) та (4) отримаємо першу інтерполяційну формулу Гауса в узагальненому вигляді для *m*-змінних:

$$P(x1, x2, ..., xm) = \sum_{i1=0}^{2n} \sum_{i2=0}^{2n} ... \sum_{im=0}^{2n} \frac{(p1 + a1)^{[i]} \cdot ... \cdot (pm + am)^{[k]}}{i1! \cdot ... \cdot im!} \times \Delta^{i1,i2,...,im}\varphi_{r1,r2,...,rm}, \quad (6)$$

де $r1 = -\lfloor i1/2 \rfloor$;
$r2 = -\lfloor i2/2 \rfloor$;
$rm = -\lfloor im/2 \rfloor$;
$a1 = \lceil i1/2 \rceil - 1$;
$a2 = \lceil i2/2 \rceil - 1$;
$am = \lceil im/2 \rceil - 1$.

Перша інтерполяційна формула Гауса містить центральні різниці:

$$\begin{aligned} &\Delta^{10...0}\varphi_{0,0,...,0}, \Delta^{01...0}\varphi_{0,0,...,0}, ..., \Delta^{00...01}\varphi_{0,0,...,0}, \\ &\Delta^{20...0}\varphi_{-1,0,...,0}, \Delta^{110...0}\varphi_{0,0,...,0}, \Delta^{10...01}\varphi_{0,0,...,0}, \\ &\Delta^{010...01}\varphi_{0,0,...,0}, \Delta^{020...0}\varphi_{0,-1,0,...,0}, ...; \\ &\Delta^{00....02}\varphi_{0,0,...,0,-1}, \Delta^{30...0}\varphi_{-1,0,...,0}, \Delta^{030...0}\varphi_{0,-1,0}, \\ &\Delta^{0...03}\varphi_{0,0,...,0,-1}, \Delta^{210...0}\varphi_{-1,0,...,0}, \Delta^{20...01}\varphi_{-1,0,...,0}, \\ &\Delta^{120...0}\varphi_{0,-1,0,...,0}, \Delta^{10....02}\varphi_{0,0,...,0,-1}, \\ &\Delta^{010...02}\varphi_{0,0,...,0,-1}, \Delta^{110...01}\varphi_{0,0,...,0}, ... \end{aligned}$$

Аналогічно можна отримати другу інтерполяційну формулу Гауса, яка містить різниці:

$$\Delta^{10...0}\varphi_{-1,0,...,0}, \Delta^{01,...0}\varphi_{0,-1,0,...,0}, ..., \Delta^{00...01}\varphi_{0,0,...,0,-1},$$
$$\Delta^{20...0}\varphi_{-1,0,...,0}, \Delta^{110...0}\varphi_{-1,-1,0,...,0}, \Delta^{10...01}\varphi_{-1,0,...,0,-1},$$
$$\Delta^{010...01}\varphi_{0,-1,0,...,0,-1}, \Delta^{020...0}\varphi_{0,-1,0,...,0}, ...,$$
$$\Delta^{00...02}\varphi_{0,0,...,0,-1}, \Delta^{30...0}\varphi_{-2,0,...,0}, \Delta^{030...0}\varphi_{0,-2,0,...,0},$$
$$\Delta^{00...03}\varphi_{0,0,-2}, \Delta^{210...0}\varphi_{-1,-1,0,...,0}, \Delta^{20...01}\varphi_{-1,0,...,0,-1},$$
$$\Delta^{120...0}\varphi_{-1,-1,0,...,0}, \Delta^{020...01}\varphi_{0,-1,0,...,0,-1},$$
$$\Delta^{10...02}\varphi_{-1,0,...,0,-1}, \Delta^{010...02}\varphi_{0,-1,0,...,0,-1},$$
$$\Delta^{110...01}\varphi_{-1,-1,0,...,0,-1}, ...$$

Друга інтерполяційна формула Гауса має вигляд:

$$\begin{aligned} P(x1, x2, ..., xm) &= \varphi_{0,0,...,0} + p1\Delta^{10...0}\varphi_{-1,0,...,0} + \\ &+ p2\Delta^{010...0}\varphi_{0,-1,0,...,0} + ... + pm \times \\ &\times \Delta^{00...01}\varphi_{0,0,...,0,-1} + \frac{(p1+1)p1}{2!} \times \\ &\times \Delta^{20...0}\varphi_{-1,0,...,0} + p1p2\Delta^{110...0}\varphi_{-1,-1,0,...,0} + \\ &+ p1pm\Delta^{10...01}\varphi_{-1,0,...,0,-1} + p2pm \times \\ &\times \Delta^{010...01}\varphi_{0,-1,0,...,0,-1} + \frac{(p2+1)p2}{2!} \times \\ &\times \Delta^{020...0}\varphi_{0,-1,0,...,0} + ... + \\ &+ \frac{(pm+1)m}{2!}\Delta^{00...02}\varphi_{0,0,...,0,-1} + ... \end{aligned} \quad (7)$$

або використаємо узагальнюючі степені (4) та підставимо в формулу (7) в результаті отримаємо формулу:

$$\begin{aligned} P(x1, x2, xm) &= \varphi_{0,0,...,0} + p1\Delta^{10...0}\varphi_{-1,0,...,0} + \\ &+ p2\Delta^{010...0}\varphi_{0,-1,0,...,0} + ... + pm \times \\ &\times \Delta^{00...01}\varphi_{0,0,...,0,-1} + \frac{(p1+1)^{[2]}}{2!} \times \\ &\times \Delta^{20...0}\varphi_{-1,0,...,0} + p1p2\Delta^{110...0}\varphi_{-1,-1,0,...,0} + \\ &+ p1pm\Delta^{101}\varphi_{-1,0,...,0,-1} + p2pm \times \\ &\times \Delta^{010...01}\varphi_{0,-1,0,...,0,-1} + \frac{(p2+1)^{[2]}}{2!} \times \\ &\times \Delta^{020...0}\varphi_{0,-1,0,...,0} + ... + \frac{(pm+1)^{[2]}}{2!} \times \\ &\times \Delta^{00...02}\varphi_{0,0,...,0,-1} + ... \end{aligned} \quad (8)$$

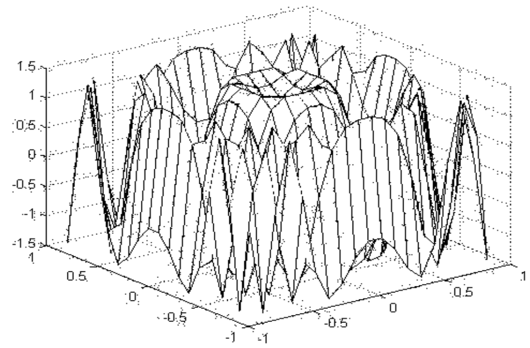
З формул (4) та (8) отримаємо другу інтерполяційну формулу Гауса в узагальненому вигляді для трьох змінних:

$$P(x1, ..., xm) = \\ = \sum_{i1=0}^{2n} ... \sum_{im=0}^{2n} \left(\frac{(p1+a1)^{[i1]} \cdot ... \cdot (r+am)^{[im]}}{i1! \cdot ... \cdot im!} \times \Delta^{i1,im}\varphi_{r1,...,rm} \right), \quad (9)$$

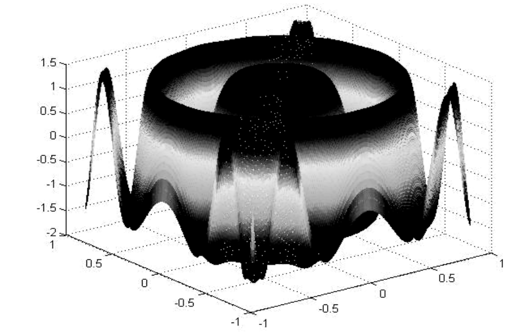
де $r1 = -\lceil i1/2 \rceil; ...;$ $rm = -\lceil im/2 \rceil;$ $a1 = \lfloor i1/2 \rfloor; ...;$ $am = \lfloor im/2 \rfloor$.

2. Приклади застосування

Розроблені різницеві методи дозволяють досить вдало промоделювати тривимірні поверхні різних типів. Приклад моделювання трьохвимірної поверхні запропонованими методами представлений на рис. 1.



а



б

Рис. 1. Моделювання трьох вимірної поверхні, яка задана статично: а – зображення вхідної функція з кроком дискретизації 0.1; б – зображення вихідної функції, отримане за допомогою запропонованих методів

Для прикладу використаємо трьохвимірну поверхню, яка описується функцією $y = \sin((x^2 + y^2 + z^2) \cdot 10) + \cos((x^2 + y^2 + z^2) \cdot 10)$.

Дискретизуємо дану функцію з кроком 0.1.

Отриману дискретну функцію промоделюємо запропонованим методом в результаті чого отримаємо поверхню, яка зображена на рис.1.б.

Як можна помітити з рис. 1, наведений метод інтерполяції досить точно відтворює вхідну функцію. Також він дає змогу отримати значення в заданих вузлах, які невідомі чи відсутні в початкових даних.

Висновки

В даній статті запропоновано інтерполяційні методи моделювання багатопараметричних об'єктів, які мають багатопараметричну математичну модель.

Розглянуті математичні моделі є досить простими та ефективними і можуть бути використані на практиці в таких галузях, як медицина, космічні дослідження, геофізика для моделювання складних об'єктів, інтерполяції або відновлення функцій, що описують величину, яка залежить від багатьох змінних.

Література

1. Машницький М.О. Моделювання трьохвимірних поверхонь на основі модифікації різницевого методу Гауса /М.О. Машницький, Р.Н. Квєтний // Вісник Черкаського державного технологічного університету. – Спецвипуск, 2007. – С.105-108.

2. Половко А.М. Интерполяция. Методы и компьютерные технологии их реализации / А.М. Половко, П.Н. Бутусов. – СПб.: БХВ-Петербург, 2004. – 320 с.

3. Квєтний Р. Н. Методи комп'ютерних обчислень: Навчальний посібник / Р.Н. Квєтний. – Вінниця: ВДТУ, 2001. – 148 с.

4. Демидович Б.П. Основы вычислительной математики / Б.П. Демидович, И.А. Марон. – М.: Лань, 2007. – 664 с.

5. Квєтний Р.Н. Моделювання трьохвимірних поверхонь на основі модифікації різницевого методу Ньютона / Р.Н. Квєтний, М.О. Машницький // Радіоелектронні і комп'ютерні системи. – 2007. – №6(25). – С. 225-229.

Надійшла до редакції 24.02.2010

Рецензент: д-р техн. наук, проф. каф. АІВТ А.Я. Кулик, Вінницький національний технічний університет, Вінниця.

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ НА ОСНОВЕ МОДИФИКАЦИЙ РАЗНОСТНЫХ МЕТОДОВ ГАУСА

М.А. Машницкий

В данной статье рассматриваются интерполяционные методы моделирования объектов, которые описываются многопараметрических математическими моделями. Предложены разностные методы, которые позволяют удачно моделировать трехмерные поверхности разных типов. Рассмотрен пример моделирования трехмерных поверхности, которая задано статически, с помощью предложенных методов. Данные методы в отличии от классических разрешают моделировать многопараметрических объекты, которые заданы на базе экспериментальных данных.

Ключевые слова: моделирование, интерполяционные методы моделирования, интерполяция, разностные методы, интерполяционные методы Гаусса, многопараметрическая интерполяция, разностная интерполяция.

MULTI-PARAMETERS FUNCTION INTERPOLATION BASED ON MODIFICATION OF GAUSS DIFFERENCE INTERPOLATION METHODS

M.O. Mashnitskyy

Interpolation methods are represented in this article for modeling of object that described by multi-parameters mathematical model. Proposed difference-based interpolation methods allows to implement modeling of three-dimension surface. Example of three-dimension surface defined statically modeling is described by suggested methods. As opposed to classic methods, these methods allow modeling multi-parameters object defined by experimental results.

Keywords: modeling, modeling interpolation methods, interpolation, difference methods, Gauss interpolation method, interpolation of multi-parameters function, difference interpolation.

Машницький Максим Олександрович - асистент кафедри АІВТ, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, Україна, email: maxandsens@mail.ru.