

УДК 681.325.57

О.Н. ПАУЛИН

Одесский национальный политехнический университет, Украина

## СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МЕТОДОВ ПРОЕКТИРОВАНИЯ УМНОЖИТЕЛЕЙ

*Предлагаются два метода проектирования быстродействующих умножителей: метод фрагментов и метод ромбов. Для известных и предложенных методов строятся временные модели умножителей, на основе которых проводится сравнительный анализ методов по задержке умножителей в достаточно широком диапазоне разрядностей сомножителей. Показывается, что каждый тип умножителя на определённом интервале разрядностей сомножителей имеет преимущество по сравнению с остальными типами. Даются рекомендации по выбору типа умножителя.*

**Ключевые слова:** умножитель, проектирование, метод фрагментов, метод ромбов, временные модели, задержка, анализ.

### Введение

Повышение производительности вычислительных систем может быть достигнуто, в частности, за счет ускорения умножения, одной из важнейших арифметических операций. Схема умножения двух двоичных операндов ("школьное" умножение) может быть представлена в виде ромба бит частичных произведений (РБЧП). Для получения результата необходимо просуммировать все частичные произведения; результат умножения может быть представлен как результат свёртки многорядных кодов [1].

Свёртка многорядных кодов (МРК) в один операционный такт нереализуема из-за чрезмерных затрат оборудования, поэтому на практике прибегают к декомпозиции исходного РБЧП. Распространённым вариантом декомпозиции является выделение нескольких слоев, содержащих выбранное количество строк кодов, для последующей их свёртки различными средствами.

Устройства умножения как функционально законченные устройства применяются в: процессорах цифровой обработки сигналов; процессорах конвейерных суперЭВМ; встроенных устройствах небольшой размерности в ПЛИС и др.

Наиболее быстрой аппаратной реализацией операции умножения до последнего времени являлся умножитель на основе деревьев; его задержка определяется выражением

$$T_{уд} = t_k + qt_d + t_{пс}, \quad (1)$$

где  $t_k$  – задержка конъюнктора;

$q$  – число этапов свёртки МРК;

$t_d$  – задержка дерева, состоящего из однорядных полных сумматоров (ОПС);

$t_{пс}$  – задержка суммирования в бинарном сумматоре с параллельным переносом.

Однако в настоящее время умножители, задержка которых определяется выражением (1), не удовлетворяют возросшим требованиям к быстродействию (задержке) в широком диапазоне разрядностей.

**Постановка задачи:** необходимо провести сравнительный анализ по задержке традиционных и предложенных автором методов построения умножителей для выработки обоснованных рекомендаций при выборе умножителя того или иного типа при заданной его разрядности.

### 1. Методы проектирования умножителей

Как показал анализ, не существует универсальный метод построения умножителей, пригодный для произвольной разрядности. В связи с этим предложены новые методы, которые являются наилучшими по критерию минимальной задержки в определённом диапазоне разрядностей, либо при данном диапазоне и одинаковой (близкой) задержке обладают меньшей сложностью.

Методы проектирования умножителей включают в себя методы покрытия РБЧП фрагментами области бит (ОБ) и методы обработки фрагментов соответствующим компрессором (ОПС, деревом на ОПС, каскадом многорядного многооперандного сумматора, полноразрядным сумматором). Ниже рассмотрены следующие предложенные в работах [2, 3] методы покрытия: метод фрагментов – покрытие каждого слоя регулярными фрагментами; метод ромбов – покрытие ромба БЧП подромбами.

Соответственно методам покрытия разработаны методы построения умножителей, которые состоят в следующем:

- 1) по заданному значению разрядности сомножителей строится РБЧП;
- 2) на каждом этапе процедуры свёртки кодов проводятся декомпозиции первоначального РБЧП и результирующих ОБ на слои и каждого слоя на регулярные фрагменты (треугольники, квадраты, прямоугольники, трапеции [4]);
- 3) для каждого фрагмента строятся сумматоры [4], т.е. выбирается структура сумматора и проводится его описание в виде таблиц разрядных индексов симметрических функций (СФ) с учётом конфигурации фрагмента и параметров сумматора;
- 4) сумматоры связываются в соответствующую структуру умножителя.

### 1.1. Построение быстродействующих умножителей методом фрагментов

Предложенный в [2] метод фрагментов повторяет описанные выше пункты метода построения быстродействующих умножителей, с той особенностью, что используется раздельное суммирование в параллельных каналах потетрадных частичных сумм и переносов, возникающих при суммировании кодов в многоразрядном многооперандном сумматоре (ММС) и кодов промежуточных этапов в блоках каналов.

Для примера на рис.1 показана схема умножения  $8 \times 8$  с разбиением РБЧП на регулярные фрагменты; стрелками показаны позиции переносов из сумматоров, обрабатывающих данный фрагмент. Результат представлен форматом, в каждой позиции которого записано число суммируемых бит.

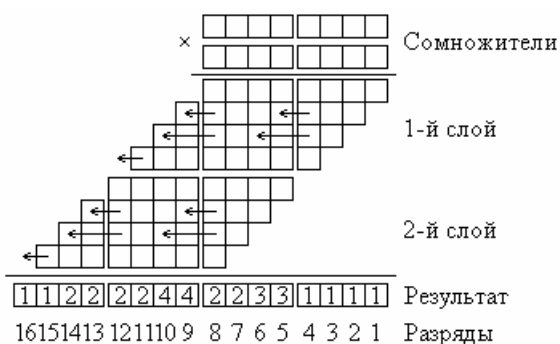


Рис. 1. Схема умножения восьмиразрядных чисел

Структура умножителя на фрагментах [2, 4] состоит из блока конъюнкторов, реализующих логическое произведение  $a_i b_j$ ,  $i, j=1..n$ , бит сомножителей А и В; блока обработки четырёхразрядных регулярных фрагментов;  $m$  блоков по числу этапов свёртки в каждом канале, осуществляющих суммирование сумм и переносов фрагментных сумматоров и результатов суммирования на промежуточных этапах;

блока результирующего суммирования, в котором два потока кодов сливаются.

Высокое быстродействие умножителя достигается путем одновременной послойной обработки фрагментов ОБ с помощью ММС, а также параллельной обработки на каждом ранге двухканального суммирования. Разработанный в [5] трёхоперандный сумматор (ТОС) позволил усовершенствовать процедуру свёртки МРК [2], в том числе и для РБЧП, применив в качестве результирующего сумматора ТОС.

### 1.2. Построение быстродействующих умножителей методом ромбов

В работе [3] предложены новый подход к разбиению ромба БЧП и новые схемотехнические решения при построении умножителей с целью снижения их задержки. Метод построения умножителя, основанный на использовании сумматора типа ромб, включает в себя:

- 1) декомпозицию ромба БЧП на 4 подромба половинной размерности двумя сечениями, горизонтальным и наклонным, параллельным границам;
- 2) использование для подромбов соответствующих сумматоров (они одинаковы);
- 3) свёртку результатов предыдущего этапа суммирования с помощью ТОС.

Суть метода показана на схеме умножения восьмиразрядных чисел (рис. 2). Подромбы пронумерованы от 1 до 4. Значком "x" обозначен бит результата логического умножения соответствующих бит сомножителей. В форматах результатов свёртки подромбов показано количество слагаемых в данном разряде; пунктиром отмечены разряды, в которых возможен перенос.

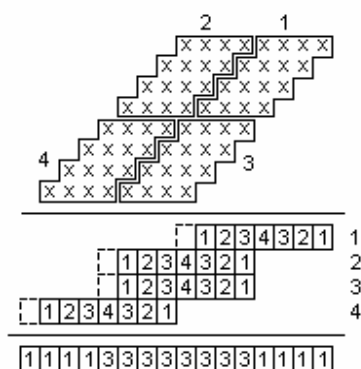


Рис. 2. Разбиение на ромбы

Каждый ромб бит обрабатывается своим сумматором со следующим распределением бит слагаемых по разрядам: [1 2 3 4 3 2 1]; который выдаёт однорядный результат. Такой сумматор разработан в [3] и назван сумматором типа ромб. Нетрудно убедиться, что 4 промежуточные суммы образуют трехрядный код со следующим распределением слагаемых по

разрядам: крайние 4 разряда справа и слева имеют по одному однокбитному слагаемому, а разряды с 5-го по 12-й – по 3 слагаемых. Младшие 4 разряда уже являются результатом и идут непосредственно на выход, а для суммирования разрядов с 5-го по 12-й целесообразно использовать восьмиразрядный ТОС.

**Теорема.** При разбиении ромба БЧП на 4 одинаковых подромба результаты суммирования их бит выстраиваются в 3 ряда кодов. Эта теорема и следствие из неё (на каждом этапе свёртки кодов их результаты также выстраиваются в 3 ряда кодов) обосновывают применение ТОС при построении умножителей на базе сумматоров типа ромб. Отметим, что для обработки старшей тетрады необходим вырожденный сумматор; он требует дополнительного рассмотрения. Итак, при предложенном методе осуществляется двухэтапная свёртка 8→3 и 3→1.

## 2. Временные модели умножителей

Для сравнения методов построения умножителей  $n \times n$  разного типа примем следующие допущения: сигналы на входах всех схем – прямые; все схемы построены на элементах И-НЕ, задержка элемента И-НЕ составляет  $\tau$ ; задержка элемента НЕ также равна  $\tau$ . Предполагается реализация умножителей на ПЛИС, поэтому принято, что нагрузочные способности по входу и выходу элементов И-НЕ имеют достаточно высокие значения.

Далее рассмотрим типовые компоненты умножителей и их временные модели; это позволит построить временные модели для умножителей. Имеем:

- ПОС –  $t_{\text{ПОС}} = 3\tau$ ;
- сумматор для обработки регулярного фрагмента – значение задержки слагается из задержек на вычисление СФ ( $3\tau$ ) и комбинационной схемы И-ИЛИ ( $2\tau$ ),  $t_{\Phi} = 5\tau$ ;
- сумматоры сумм –  $t_{\text{СС}} = t_{\Phi} = 5\tau$ ,
- ПС –  $t_{\text{ПС}} = t_{\text{СФ}} + t_{\text{ИИЛИ}} + t_{\text{м2}} = 5\tau + 2\tau$ ;

где  $t_{\text{СФ}}$  – задержка вычисления функций генерации  $\gamma_i = a_i b_i$  и прозрачности  $\pi_i = a_i \vee b_i$ ,  $t_{\text{СФ}} = 2\tau$ ;  $t_{\text{м2}}$  – задержка логического элемента «сложение по модулю 2»,  $t_{\text{м2}} = 3\tau$ ;  $l$  – количество ярусов схем параллельного переноса, для наиболее распространённого разбиения многоразрядной схемы ПС на тетрады имеем  $l = \log_4 n$ ;  $t_{\text{ПН}}$  – задержка яруса схемы параллельного переноса,  $t_{\text{ПН}} = 2\tau$ .

- ТОС –  $t_{\text{ТОС}} = t_{\text{СФ}} + t_{\text{КС}} + l t_{\text{ПН}} + t_{\text{выб}} = 7\tau + 2l\tau$ ;

где  $t_{\text{СФ}}$  – задержка вычисления значений СФ,  $t_{\text{СФ}} = 3\tau$ ;  $t_{\text{КС}}$  – задержка комбинационной схемы И-ИЛИ, реализующей ДНФ относительно СФ;  $l$  – число рангов схемы параллельного переноса ТОС;  $t_{\text{ПН}}$  – задержка схемы параллельного переноса ТОС,  $t_{\text{ПН}} = 2\tau$ ;  $t_{\text{выб}}$  –

задержка коммутатора, выбирающего результат из трёх значений суммирования на вырожденных сумматорах,  $t_{\text{выб}} = 2\tau$ .

**Умножитель, построенный на деревьях,** включает в себя деревья Санторо или Уоллеса, а также на последнем ранге схемы – ПС.

Тогда временные модели умножителей на деревьях примут вид (см. (1))

$$\begin{aligned} \text{TУДС} &= t_{\text{К}} + q_{\text{С}} t_{\text{С}} + t_{\text{ПС}} = 2\tau + 6q_{\text{С}} \tau + \\ &5\tau + 2l\tau = 7\tau + 6q_{\text{С}} \tau + 2l\tau, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{TУДУ} &= t_{\text{К}} + q_{\text{У}} t_{\text{У}} + t_{\text{ПС}} = 2\tau + 9q_{\text{У}} \tau + \\ &5\tau + 2l\tau = 7\tau + 9q_{\text{У}} \tau + 2l\tau, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $q_{\text{С}}$ ,  $q_{\text{У}}$  – количество уровней обработки слоя.

Для определения  $q_{\text{С}}$  и  $q_{\text{У}}$  при конкретном  $n$  надо рассмотреть соответствующую схему вычислений; например, при  $n=16$  схема вычислений имеет вид (в скобках указано количество рядов результата обработки слоя деревом Уоллеса):  $16=2 \cdot 6(=4)+4 \rightarrow 1 \cdot 6(=2)+2 \rightarrow 1 \cdot 6(=2)$  – ПС, т.е.  $q_{\text{У}}=3$ .

Отметим, что при свёртке деревьями ПС обрабатывает  $2n$  разрядов.

**Умножитель, построенный на фрагментах,** состоит из сумматоров, обрабатывающих фрагменты, из тетрадных сумматоров и ТОС.

Отметим, что задержка в канале обработки переноса не превосходит задержки в канале суммирования, поэтому временная модель умножителя рассматривается только по каналу суммирования.

Итак, задержка умножителя на фрагментах составляет

$$\begin{aligned} \text{TУФ} &= t_{\text{К}} + t_{\Phi} + m t_{\text{СС}} + t_{\text{ТОС}} = 2\tau + 5(m+1)\tau + \\ &7\tau + 2l\tau = 9\tau + 5(m+1)\tau + 2l\tau, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $m$  – количество рангов схем суммирования сумм.

**Умножитель, построенный на сумматорах типа ромб,** состоит из ромбов –  $t_{\text{р}} = t_{\Phi} = 5\tau$  и цепочки из  $r$  ТОС; – задержка определяется суммой задержек ТОС  $t_{\text{ТОС}}^i$  каждого ранга. Отметим, что ТОС на  $i$ -м ранге обрабатывает  $n_i$  разрядов, и, следовательно, имеет  $l_i$  ярусов схем параллельного переноса ТОС.

Итак, задержка умножителя, построенного на сумматорах типа ромб, составляет

$$\begin{aligned} \text{TУР} &= t_{\text{К}} + t_{\text{р}} + t_{\text{выб}} + \sum_{i=1}^r t_{\text{ТОС}}^i = \\ &= 2\tau + 5\tau + 5\tau + 2\tau + 2\tau \sum_{i=1}^r l_i = 7(r+1)\tau + 2\tau \sum_{i=1}^r l_i. \end{aligned} \quad (5)$$

## 3. Анализ методов

По полученным выражениям вычислены значения задержек для рассмотренных умножителей различной разрядности. Данные занесены в табл. 1. Анализ табл. 1 показывает, что по задержке умножители могут быть выстроены следующим образом:

1) соотношение величин задержек для умножителей на деревьях Санторо и Уоллеса определяется диапазоном разрядностей сомножителей;

2) умножитель на деревьях Санторо является самым быстрым для  $n=24$  и  $32$ ;

3) умножитель на ромбах целесообразно применять при  $n=4..16$ . Кроме того, он обладает важным преимуществом – регулярностью структуры.

ности  $n$ , отсутствующей в табл. 1, необходимо использовать ближайшее значение  $n$  для оценки задержки умножителя.

Если окажется, что условно подходят 2 типа умножителя, то надо провести их проектирование на структурном уровне для данного  $n$ .

## Литература

1. Паулин О.Н. Модель и метод проектирования многооперандных сумматоров на базе симметрических функций / О.Н. Паулин, А.М. Ляховецкий // Матеріали міжнародної конференції з індуктивного моделювання. "МКІМ-2002", секція 5. – Львів: ДНДІ-ІІ, 2002. – С. 208-213.

2. Паулин О.Н. Метод и средства проектирования структур быстродействующих устройств умножения / О.Н. Паулин, А.М. Ляховецкий // Труды Одесского политехнического университета. – Одесса, 2001. – Вып. 4 (16). – С. 100-104.

3. Паулин О.Н. К разработке умножителя на основе сумматора типа ромб / О.Н. Паулин // Искусственный интеллект. – №4. – 2006. – С. 35-41.

4. Паулин О.Н. К построению быстродействующих арифметических устройств / О.Н. Паулин // Искусственный интеллект. – Спец. выпуск, Т. 3. – 2002. – С. 314-322.

5. Паулин О.Н. О свертке трехрядных кодов / О.Н. Паулин // Управляющие системы и машины. – № 5. – 2005. – С. 68-72.

Поступила в редакцию 4.01.2010

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф., проф. кафедры "Комп'ютерні системи" В.С. Ситников, Одесский национальный политехнический университет, Одесса, Украина.

## ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ МЕТОДІВ ПРОЕКТУВАННЯ ПОМНОЖУВАЧІВ

*О.М. Паулін*

Пропонуються два методи проектування швидкодіючих помножувачів: метод фрагментів та метод ромбів. Для відомих і пропонуваніх методів будуються часові моделі помножувачів, на основі яких проводиться порівняльний аналіз методів по затримці помножувачів в достатньо широкому діапазоні розрядностей співмножників. Показується, що кожен тип помножувача на визначеному інтервалі розрядностей співмножників має перевагу в порівнянні з рештою типів. Даються рекомендації до вибору типу помножувачів.

**Ключові слова:** помножувач, проектування, метод фрагментів, метод ромбів, часові моделі, затримка, аналіз.

## COMPARE ANALYSIS OF THE DESIGN METHODS OF THE MULTIPLIERS

*O.N. Paulin*

Two methods for design of the fast multipliers are proposed: fragment method and rhombus method. The time models of multipliers for known and new methods are constructed (built). On the base of this models compare analysis of the multiplier delay in wide diapason of digits of the operands is realized. Any type of its multiplier on certain diapason of operands is shown. References for selection of the type of the multipliers are given.

**Key words:** multiplier, design, fragment method, rhombus method, time model, delay, analysis.

**Паулин Олег Николаевич** – канд. техн. наук, доцент, доцент кафедры системного программного обеспечения Одесского национального политехнического университета, Одесса, Украина, e-mail: paulin@te.net.ua.