УДК 519.2:658.7

В.А. ПОПОВ, А.В. МИРОШНИЧЕНКО, Н.В. ЕРЕМЕНКО, Е.Ю. СИНЕБРЮХОВА

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Украина

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ УРОВНЯ ЗАПАСОВ НА ОСНОВЕ КОМПОЗИЦИИ ЕГО СОСТАВЛЯЮЩИХ

Предложен подход к определению закона распределения уровня запасов на основе композиции распределенных по некоторому закону случайных величин, соответствующих основным компонентам уравнения Морана для водохранилища. Получены плотность и функция распределения, а также основные числовые характеристики в аналитическом виде для трех компонент уравнения запаса, распределенных по показательному закону – поступающей продукции, наличного запаса и потребляемой продукции. Рассмотрены различные случаи композиции трех случайных величин в соответствии с уравнением Морана. Показана целесообразность использования определенной последовательности при получении композиции законов распределения компонент уравнения запаса.

Ключевые слова: *запас продукции, случайная величина, поступление, потребление, текущий уровень запаса, закон распределения.*

Введение

Анализ публикаций [1 – 3] показал, что задача преобразования случайных величин, характеризующих текущий уровень запаса на складе, поступление или потребление продукции, рассматривается на уровне случайных процессов, что является основной проблемой в теории запасов. Под запасом понимается количество продукции, хранящееся на складе с целью будущей продажи или использования в процессе производства. В случае дискретного времени величина запаса Z_t определяется рекуррентным соотношением [2]:

$$Z_{t+1} = Z_t + \eta_{t+1} - f(Z_t + \eta_{t+1}, \xi_{t+1}),$$

где η_{t+1} – объем заказа в момент $t+1$, ξ_{t+1} – потребность в некотором продукте в интервале $(t, t+1)$, $f(Z_t + \eta_{t+1}, \xi_{t+1})$ – количество реализованного продукта в момент $t+1$. Обычно предполагается, что требования на продукт $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ являются взаимно независимыми одинаково распределенными случайными величинами, при этом объем заказа на продукцию и функция f определяются выбранной политикой заказов. Возможны два варианта проведения политики заказов: задолженность по отгрузке продукции допускается или не допускается, т.е. поставки либо соответствуют размеру заказа, либо являются случайными величинами.

Существует класс моделей, в которых и поставки продукта (вход модели) и требования на него (выход модели) случайны. Задача состоит в регулировании спроса с целью достижения желаемого уровня запасов. Эти модели определяются как модели «вход-выход» или модели хранения. Примером таких моделей является модель Морана [2] для водохранилищ конечного объема.

В данной работе рассматривается частный случай нахождения закона распределения уровня запасов на складе, когда основные параметры системы, связанные с поступлением и потреблением продукции являются случайными величинами и имеют соответствующие законы распределения. В связи с этим определение композиции трех случайных величин оказывается далеко нетривиальным, так как получение общего закона распределения в аналитическом виде представляет собой достаточно сложную задачу. При получении аналитической записи для плотности и функции распределения оказывается возможным определение основных характеристик итогового распределения.

1. Вероятностная постановка и решение задачи о запасах

Рассмотрим состояние системы запасов на складе как вероятность распределения случайных величин X_i, $i = \overline{1,3}$. Текущий уровень запасов обозначим X_1, уровень отгрузки продукции со склада – X_2 и уровень поступления продукции – X_3. В некоторый момент времени состояние системы запасов будет характеризоваться величиной Z, представляющей собой композицию случайных величин X_i. При этом возможны два варианта определения уравнения, описывающего уровень запасов на складе, когда при наличии некоторого ненулевого текущего уровня запасов сначала поступает продукция, а затем проводится отгрузка, тогда $Z_1 = (X_1 + X_3) - X_2$ и наоборот – сначала осуществляется отгрузка со склада, а затем поступление продукции $Z_2 = (X_1 - X_2) + X_3$. Таким образом, уравнение уровня запасов на складе обладает свойством ассоциативности. Для данной модели также характерно наличие дефицита. Дефицит запаса продукции наступает при условии $X_3 < X_2$, когда на склад приходит продукции меньше, чем отгружается, а при $X_3 > X_2$ дефицит будет отсутствовать. На рис. 1 изображена модель системы запасов, исследуемая с позиции случайных величин. Возможны различные варианты распределения случайных величин X_i, при этом некоторые величины могут принимать фиксированное значение.

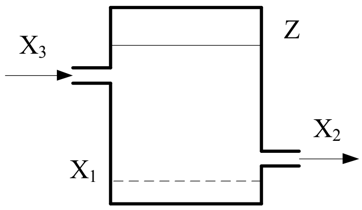

Рис. 1. Модель системы запасов

Первый вариант. Если величина X_i является постоянной, т.е. $X_i = const$, то задача определения уровня запаса на складе Z сводится к вычислению одной из величин Z_1 или Z_2. Поставим в соответствие каждой величине X_i некоторую константу, тогда $X_1 = a$, $X_2 = b$, $X_3 = c$ и задача нахождения уровня запаса принимает вид $Z_1 = (a + c) - b$ для первого случая и $Z_2 = (a - b) + c$ для второго.

Когда изменение одной из трех величин X_i подчиняется некоторому закону, а остальные являются константами, рассматриваются три ситуации распределения величины Z в зависимости от того, какие параметры модели запасов остаются постоянными.

Пусть X_i - непрерывная случайная величина с плотностью распределения $f(x)$, а Y_j - случайная величина, связанная с ней функциональной зависимостью $Y = \varphi(X)$, где φ - дифференцируемая функция, монотонная на всем участке возможных значений аргумента, тогда плотность случайной величины Y выражается формулой $g(y) = f(\psi(y)) \,|\, \psi'(y) \,|$, где ψ - функция, обратная по отношению к φ. В случае, когда необходимо найти плотность $g(y)$ случайной величины $Y = aX + b$, где a и b не случайны, обратная функция $\psi(y)$ вычисляется путем разрешения относительно x уравнения $y = ax + b$. Тогда $\psi(y) = (y - b)/a$, где $\psi'(y) = 1/a$ и $|\,\psi'(y)| = 1/|\,a\,|$. Плотность распределения

$$g(y) = \frac{1}{|\,a\,|} f\left(\frac{y-b}{a}\right).$$

Второй вариант. Одна случайная величина может принимать фиксированное значение, а две другие случайные величины подчиняются некоторому закону распределения. Рассмотрим возможные варианты распределения случайных величин на примере показательного закона.

1. Пусть X_2 – константа, X_1 и X_3 – некоторые случайные величины, распределенные по показательному закону, λ_i – константа при $i = \overline{1,n}$ для $n = 3$ и плотность распределения составляет $f(x_i) = \lambda_i e^{-\lambda_i x_i}$. Величина $Z_1 = Y_1 - X_2$ характеризует изменение объема запаса на складе после поступления продукции, где X_2 – константа. Необходимо определить плотность распределения $Y_1 = X_1 + X_3$ композиции двух взаимосвязанных показательно распределенных случайных величин [4] с заданными плотностями распределения $f(x_1) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 x_1}$ и $f(x_3) = \lambda_3 e^{-\lambda_3 x_3}$. Найдем плотность распределения случайной величины y_1:

$$g(y_1) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x_1) \cdot f(x_3) dx_1. \qquad (1)$$

Получим систему (x_1, x_3) двух непрерывных случайных величин, из которой величина x_3 выражается как разность $x_3 = y_1 - x_1$, тогда при $x_1 > 0$ и $y_1 > 0$:

$$\begin{aligned} g(y_1) &= \int\limits_0^{y_1} f(x_1) \cdot f(x_3) dx_1 = \int\limits_0^{y_1} f(x_1) \cdot f(y_1 - x_1) dx_1 = \\ &= \int\limits_0^{y_1} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x_1} \cdot \lambda_3 e^{-\lambda_3 (y_1 - x_1)} dx_1 = \frac{\lambda_1 \lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_1} \left(e^{-\lambda_1 y_1} - e^{-\lambda_3 y_1} \right). \end{aligned} \qquad (2)$$

2. Пусть X_3 – константа, X_1 и X_2 – некоторые случайные величины. Получим систему (x_1, x_2), из которой необходимо найти плотность распределения случайной величины $Y_2 = X_1 - X_2$, характеризующей изменение объема запаса на складе после отгрузки продукции:

$$g(y_2) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x_1) \cdot f(x_2) dx_1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x_1) \cdot f(x_1 - y_2) dx_1.$$

В зависимости от соотношения уровней X_i возможны два варианта распределения области интегрирования:

а) $y_2 > 0$ – отсутствие дефицита;

$$g(y_2) = \int_{y_2}^{+\infty} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x_1} \cdot \lambda_3 e^{-\lambda_1 (x_1 - y_2)} dx_1 = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} e^{-\lambda_1 y_2}.$$

б) $y_2 < 0$ – наличие дефицита;

$$g(y_2) = \int_{0}^{+\infty} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x_1} \cdot \lambda_3 e^{-\lambda_1 (x_1 - y_2)} dx_1 = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} e^{\lambda_2 y_2}.$$

3. Когда X_1 – константа, X_2 и X_3 – некоторые случайные величины, уравнение уровня запасов принимает вид $Y_3 = X_3 - X_2$, то результат аналогичен предыдущему пункту.

Третий вариант. В случае, когда все три компоненты уравнения являются случайными величинами и подчиняются показательному закону с следующими плотностями распределения $f(x_1) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 x_1}$, $f(x_2) = \lambda_2 e^{-\lambda_2 x_2}$ и $f(x_3) = \lambda_3 e^{-\lambda_3 x_3}$, возможны различные варианты последовательности выполнения композиции при определении уровня запасов.

1. Требуется найти плотность распределения величины $Z_1 = (X_1 + X_3) - X_2$, соответствующей запасу на складе для ситуации, когда сначала поступает продукция, а затем проводится ее отгрузка:

$$g(z_1) = \int_{0}^{z_1} f(y_1) \cdot f(x_2) dy_1 .$$

Пусть $\lambda_1 = \lambda_3 = \lambda$, причем $\lambda \neq \lambda_2$, тогда в выражении (2) получается неопределенность типа $0/0$, раскрывая которую, получим:

$$g(y_1) = \lambda^2 y_1 e^{-\lambda y_1} . \qquad (3)$$

В зависимости от условий наличия или отсутствия дефицита величина $g(z_1)$ принимает следующие значения на участках $z_1 > 0$ и $z_1 < 0$:

$$g(z_1) = \int_{z_1}^{+\infty} \lambda^2 y_1 e^{-\lambda y_1} \cdot \lambda_2 e^{-\lambda_2 (y_1 - z_1)} dy_1 =$$

$$= \frac{\lambda^2 \lambda_2}{\lambda + \lambda_2} e^{-\lambda z_1} \cdot \left(z_1 + \frac{1}{\lambda + \lambda_2} \right);$$

$$g(z_1) = \int_{0}^{+\infty} \lambda^2 y_1 e^{-\lambda y_1} \cdot \lambda_2 e^{-\lambda_2 (y_1 - z_1)} dy_1 = \frac{\lambda^2 \lambda_2}{(\lambda + \lambda_2)^2} e^{\lambda_2 z_1}.$$

2. Требуется найти плотность распределения величины $Z_2 = (X_1 - X_2) + X_3$, соответствующей запасу на складе для ситуации, когда сначала проводится отгрузка, а потом поступление продукции. При условии, что $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ и $\lambda \neq \lambda_3$ результат рассчитывается аналогично предыдущему, но для случаев, когда $z_2 > 0$ и $z_2 < 0$.

Для задачи определения закона распределения трех независимых случайных величин целесообразно находить соотношение текущей и поступающей продукции, а затем уже учитывать уровень потребления запаса. В случае отсутствия одного из элементов композиции на первом этапе вычислений поиск результата значительно упрощается путем приведения задачи к случаю композиции случайной и постоянной величины.

2. Характеристики закона распределения уровня запасов

Найдем плотность распределения $g(z_1)$ для композиции трех случайных величин, распределенных по показательному закону при равных коэффициентах λ_i, когда $\lambda_i = 1$ на примере выполнения отгрузки после поступления продукции. При $\lambda_1 = \lambda_3 = 1$ выражение (3) принимает вид: $g(y_1) = y_1 e^{-y_1}$, тогда плотность распределения величины $Z_1 = (X_1 + X_3) - X_2$ согласно (1) имеет вид:

$$g(z_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y_1) \cdot f(x_2) dy_1 .$$

Для двух случаев вычисляем:

а) $z_1 > 0$:

$$g(z_1) = \int_{z_1}^{+\infty} y_1 e^{-y_1} \cdot e^{-x_2} dy_1 = \int_{z_1}^{+\infty} y_1 e^{-y_1} \cdot e^{-(z_1 - y_1)} dy_1 =$$

$$= \frac{1}{4} e^{-z_1} (2z_1 + 1);$$

б) $z_1 < 0$:

$$g(z_1) = \int_{0}^{+\infty} y_1 e^{-y_1} \cdot e^{-x_2} dy_1 = \int_{0}^{+\infty} y_1 e^{-y_1} \cdot e^{-(z_1 - y_1)} dy_1 = \frac{1}{4} e^{z_1}.$$

Находим функцию распределения:

$$G(z_1) = \int_{-\infty}^{z_1} g(z_1) dz_1.$$

а) $z_1 > 0$:

$$G(z_1) = \int_{0}^{z_1} \frac{1}{4} e^{-z_1} (2z_1 + 1) dz_1 = \frac{1}{4} e^{-z_1} (2z_1 + 3);$$

б) $z_1 < 0$: $G(z_1) = \int_{-\infty}^{z_1} \frac{1}{4} e^{z_1} dz_1 = \frac{1}{4} e^{z_1}$.

Далее вычислим основные характеристики для полученного распределения: математическое ожидание, мода, дисперсия, асимметрия и эксцесс. В общем случае математическое ожидание вычисляем по формуле:

$$m_{z_1} = M[Z_1] = \int_{-\infty}^{+\infty} z_1 \cdot g(z_1) dz_1 .$$

Для рассматриваемого примера математическое ожидание находится на двух участках:

а) $z_1 > 0 : m'_{z_1} = \int\limits_0^{+\infty} z_1 \cdot \frac{1}{4} e^{-z_1} (2z_1 + 1) dz_1 = \frac{5}{4}$;

б) $z_1 < 0$: $m''_{z_1} = \int\limits_{-\infty}^{0} z_1 \cdot \frac{1}{4} e^{z_1} dz_1 = -\frac{1}{4}$.

Тогда результирующее значение равно

$$m_{z_1} = m'_{z_1} + m''_{z_1} = 1.$$

Модой M_0 случайной величины называется ее наиболее вероятное значение. Для непрерывной величины модой является то значение, в котором плотность вероятности является максимальной.

$$M_0 = \max[g(z_1)],$$

$g'(z_1) = \frac{1}{4} e^{-z_1} - \frac{z_1}{2} e^{-z_1}$, при $g'(z_1) = 0$, $M_0 = \frac{1}{2}$.

На основании полученных результатов построим график плотности распределения для композиции показательно распределенных случайных величин (рис. 2). При построении зависимости учитывалось, что величина Z_1 распределена на двух участках, когда $z_1 > 0$ и $z_1 < 0$. График является несимметричным и смещен вправо относительно оси y.

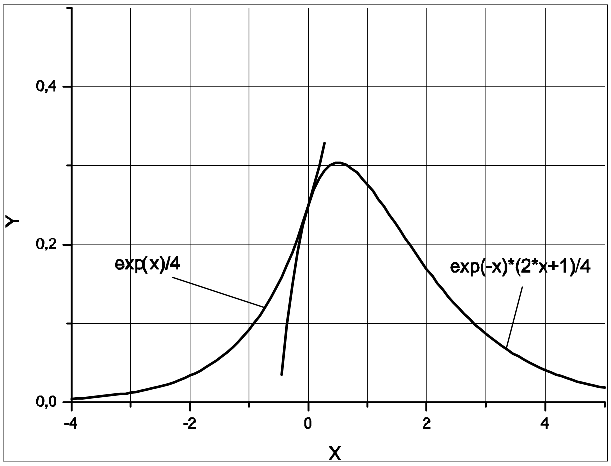

Рис. 2. Плотность распределения уровня запасов

Дисперсия случайной величины выражается формулой:

$$D_{z_1} = D[Z_1] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} z_1^2 \cdot g(z_1) dz_1 - m_{z_1}^2.$$

Вторым способом определения дисперсии является ее выражение через центральные моменты первого и второго порядка:

$$\mu_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2,$$

где $\alpha_1 = m_{z_1}$, $\alpha_2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} z_1^2 \cdot g(z_1) dz_1$.

Так как плотность распределения функции z_1 представлена на двух участках, то и расчет начальных моментов проводится для α'_2 на интервале $(0;+\infty)$, а для α''_2 – $(-\infty;0)$, затем полученные значения суммируются, и второй начальный момент составляет $\alpha_2 = \alpha'_2 + \alpha''_2 = 3{,}5 + 0{,}5 = 4$. Тогда значение дисперсии составит $D_{z_1} = \mu_2 = 3$.

Значение асимметрии найдем как отношения центральных моментов:

$$A = \frac{\mu_3}{(\sqrt{\mu_2})^3},$$

где $\mu_3 = \alpha_3 - 3\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1^2$ – третий центральный момент, $\alpha_3 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} z_1^3 \cdot g(z_1) dz_1$ – третий начальный момент, также рассчитываемый на двух интервалах $(-\infty;0)$ и $(0;+\infty)$, тогда $A = \frac{2}{(\sqrt{3})^3} = 0{,}4$.

Выражение эксцесса случайной величины через центральные моменты имеет вид:

$$E = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3,$$

где $\mu_4 = \alpha_4 - 4\alpha_1\alpha_3 + 6\alpha_1^2\alpha_2 - 3\alpha_1^4 = 45$ – четвертый центральный момент, $\alpha_4 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} z_1^4 \cdot g(z_1) dz_1 = 72$ – четвертый начальный момент, тогда $E = \frac{45}{9} - 3 = 2$.

Коэффициент вариации равен $K = \frac{\sigma}{\alpha_1} = \frac{\sqrt{3}}{1} = 1{,}732$, где $\sigma = \sqrt{D_{z_1}}$ – среднеквадратическое отклонение.

При получении аналитической записи для композиции трех случайных величин в уравнении запаса целесообразным является изначально получить сумму двух компонент, характеризующих поступление продукции и текущий запас, а затем найти разность полученной величины и компоненты, соответствующей потреблению продукции.

Заключение

В данной работе предложен подход к определению закона распределения уровня запасов на основе композиции трех случайных величин – поступления, потребления и текущего уровня некоторой продукции. Для решения данной задачи была использована модель Морана в виде рекуррентного соотношения, что позволило поставить конкретные задачи преобразования случайных.

Для получения конечного результата предлагается находить композицию двух случайных величин с показательным законом распределения, характеризующих поступление и потребление продукции, а затем композицию полученного результата с наличным запасом. На примере исследования трех независимых показательно распределенных случайных величин рассчитана плотность распределения при различном порядке выполнения операций композиции для случая единичных коэффициентов, а также получены основные характеристики представленного закона распределения.

Предложенное решение задачи определения закона распределения уровня запасов может быть использовано для тех практических ситуаций, когда четко определены основные компоненты в уравнении Морана для водохранилищ.

Литература

1. *Рыжиков Ю.И. Теория очередей и управление запасами / Ю.И. Рыжиков. – СПб.: Питер, 2001. – 384 с.*

2. *Прабху Н. Стохастические процессы теории запасов: пер. с англ. / Н. Прабху. – М.: Мир, 1984. – 184 с.*

3. *Мандель А.С. Адаптивные алгоритмы оценки параметров оптимальных стратегий управления запасами при ограниченном дефиците / А.С. Мандель, Д.А. Семенов // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. – 2008. – № 8. – С. 25-31.*

4. *Вентцель Е.С. Теория вероятностей: учеб. пособие / Е.С. Вентцель. – М.: Высшая школа, 2006. – 576 с.*

Поступила в редакцию 8.07.2010

Рецензент: д-р техн. наук, проф., заведующий кафедрой информатики А.Ю. Соколов, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков.

ВИЗНАЧЕННЯ ЗАКОНУ РОЗПОДІЛУ РІВНЯ ЗАПАСІВ НА ОСНОВІ КОМПОЗИЦІЙОГО СКЛАДНИКІВ

В.О. Попов, Г.В. Мирошниченко, Н.В. Єременко, Є.Ю. Синєбрюхова

Запропонована методика визначення закону розподілу рівня запасів на основі композиції розподілених по деякому законі випадкових величин, які являються основними компонентами рівняння Морана для водосховища. Отримано щільність розподілу та функції розподілу, а також основні числові характеристики в аналітичному вигляді для трьох компонент рівняння запасу, розподілених по показовому закону – продукції, що надходить до складу, наявного запасу та спожитої продукції. Розглянуто різні випадки композиції трьох випадкових величин згідно з рівнянням Морана. Показана доцільність використання певної послідовності при отриманні композиції законів розподілу компонент рівняння запасу.

Ключові слова: запас продукції, випадкова величина, надходження, споживання, наявний запас, закон розподілу.

DISTRIBUTION LAW DEFINITION OF THE STOCK LEVEL APPLYING ITS COMPONENTS COMPOSITION

V.A. Popov, A.V. Miroshnichenko, N.V. Eremenko, E.Y. Sinebryukhova

The method of law definition for the stock level distribution is suggested based on the random values composition as the basic components of Moran's equation for a water basin. Density and distribution functions with other numerical characteristics in analytical form are received for three components of Moran's equation with exponential distributed variables – receipts of a product, cash stock and consumption of any product. Various cases of three random variables composition according to Moran's equation are considered. The usage expediency of a certain sequence for achieving distribution law composition in certain sequence is shown.

Keywords: product stock, random variable, receiption, consumption, cash stock level, distributing law.

Попов Вячеслав Алексеевич – канд. техн. наук, проф., проф. кафедры информационных управляющих систем, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина.

Мирошниченко Анна Викторовна – магистр кафедры информационных управляющих систем, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина.

Еременко Наталья Валентиновна – аспирант кафедры информационных управляющих систем, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина.

Синебрюхова Евгения Юрьевна – аспирант кафедры информационных управляющих систем, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина.