УДК 517

В.А. МАКАРИЧЕВ

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Украина

О БАЗИСНЫХ ФУНКЦИЯХ ОБОЩЕННОГО РЯДА ТЕЙЛОРА

Рассмотрены обобщенные ряды Тейлора для некоторых неквазианалитических классов бесконечно дифференцируемых функций, встречающихся в теории уравнений с частными производными и математической биологии при исследовании динамики клеточных популяций. Отмечена возможность применения обобщенных рядов Тейлора для приближенного вычисления функций, которые являются функциями верхнего предела интеграла. Получены формулы для вычисления базисных функций с применением конечных линейных комбинаций сдвигов атомарной функции $mup_s(x)$. Установлено, что коэффициенты соответствующих линейных разложений являются рациональными и могут быть найдены точно. Приведено доказательство некоторых свойств функции $mup_s(x)$. Исследованы свойства сдвигов функции $mup_s(x)$.

Ключевые слова: *обобщенные ряды Тейлора, атомарная функция, неквазианалитический класс функций, финитная функция, базисные функции, бесконечно дифференцируемая функция, функционально-дифференциальное уравнение.*

Введение

Неквазианалитические классы бесконечно дифференцируемых функций находят свое применение в теории уравнений с частными производными [1, 2], а также в математической биологии при исследовании динамики клеточных популяций [3]. Класс $H(M)$, состоящий из функций $f \in C^{\infty}_{[a,b]}$ таких, что $\left|f^{(n)}(x)\right| \le c(f)\cdot M_n$ для любых $x \in [a,b]$ и $n = 0,1,2,...$, где $M = \{M_n > 0, n = 0,1,2,...\}$, называется квазианалитическим, если любая функция $f \in H(M)$ однозначно определяется по последовательности чисел $\left\{f^{(n)}(x_0)\right\}_{n=0}^{\infty}$, где $x_0 \in [a,b]$. В противном случае $H(M)$ называется неквазианалитическим.

В работах В.А. Рвачева были предложены и исследованы обобщенные ряды Тейлора для неквазианалитических классов $H_\rho = H\left(M_\rho\right) \subset C^{\infty}_{[-1,1]}$, где $M_\rho = \left\{M_n = \rho^n \cdot 2^{\frac{n(n+1)}{2}}, n = 0,1,2,...\right\}$. В [4, 5] доказано, что если $f \in H_\rho$ при $1 < \rho < 2$, то

$$f^{(\ell)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k\in N_n} f^{(n)}\left(x_{n,k}\right)\cdot \varphi^{(\ell)}_{n,k}\left(x\right),$$

где ряд в правой части сходится равномерно на отрезке $[-1,1]$ для любого $\ell = 0,1,2,...$ и $N_0 = \{-1,0,1\}$, $x_{0,k} = k$ при $k \in N_0$, $N_n = \left\{-2^{n-1},...,2^{n-1}-1, 2^{n-1}\right\}$, $x_{n,k} = \frac{k}{2^{n-1}}$ при $k \in N_n$, причем базисные функции $\varphi_{n,k}(x)$ однозначно определяются из следующих условий: $\varphi_{n,k} \in H_1$ и $\varphi^{(j)}_{n,k}\left(x_{j,m}\right) = \delta^j_n \cdot \delta^m_k$ для $n, j = 0,1,2,...$, $k \in N_n$, $m \in N_j$, δ^j_i – символ Кронекера. Базисные функции $\varphi_{n,k}(x)$ были построены с использованием атомарной функции $up(x)$, которая является финитным решением функционально-дифференциального уравнения

$$y'(x) = 2\cdot(y(2x+1) - y(2x-1)).$$

Исследования В.А. Рвачева в области построения обобщенных рядов Тейлора были продолжены его учениками Г.А. Старцем и В.М. Кузниченко [6 – 8].

Введем в рассмотрение неквазианалитический класс функций $H_{\rho,s} = H\left(M_{\rho,s}\right) \subset C^{\infty}_{[-1,1]}$, где

$$M_{\rho,s} = \left\{M_n = \rho^n \cdot 2^n \cdot (2s)^{\frac{n(n-1)}{2}}, n = 0,1,2,...\right\}.$$

Согласно [6, 7], если $f(x)$ является функцией класса $H_{\rho,s}$ при $s = 2,3,4,...$ и $1 < \rho < 2s$, то

$$f^{(\ell)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k\in N_{s,n}} f^{(n)}\left(x_{s,n,k}\right)\cdot \varphi^{(\ell)}_{s,n,k}(x) + \\ + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p\in D_{s,n}} \Delta^2_{\frac{1}{s\cdot(2s)^n}}\left(f^{(n)}; x^*_{s,n,p}\right)\cdot \psi^{(\ell)}_{s,n,p}(x),$$

где $N_{s,0} = \{-1,0,1\}$ и $x_{s,0,k} = k$ при $k \in N_{s,0}$;

$$N_{s,n} = \left\{-s\cdot(2s)^{n-1},...,s\cdot(2s)^{n-1}-1, s\cdot(2s)^{n-1}\right\};$$

$x_{s,n,k} = \frac{k}{s\cdot(2s)^{n-1}}$ при $k \in N_{s,n}$;

$D_{s,n} = \left\{1,2,3,...,(2s)^{n+1}-1\right\} \setminus \{k\cdot s\}, k \in N;$

$x^*_{s,n,p} = -1 + \frac{p}{s\cdot(2s)^n}$ при $p \in D_{s,n}$;

$\Delta_h^2(f;x) = f(x+h) - 2\cdot f(x) + f(x-h)$ – вторая разность функции f в точке x с шагом h. При этом ряд в правой части сходится равномерно на отрезке $[-1,1]$ для любого $\ell = 0,1,2,...$. Базисные функции $\left\{\varphi_{s,n,k}(x), \psi_{s,n,p}(x)\right\}$ однозначно определяются из условий:

$$\varphi^{(\ell)}_{s,n,k}\left(x_{s,\ell,m}\right) = \delta^\ell_n \cdot \delta^m_k, \qquad (1)$$

$$\psi^{(\ell)}_{s,n,p}\left(x_{s,\ell,m}\right) = 0, \qquad (2)$$

$$\Delta^2_{\frac{1}{s\cdot(2s)^\ell}}\left(\varphi^{(\ell)}_{s,n,k}; x^*_{s,\ell,q}\right) = 0, \qquad (3)$$

$$\Delta^2_{\frac{1}{s\cdot(2s)^\ell}}\left(\psi^{(\ell)}_{s,n,p}; x^*_{s,\ell,q}\right) = \delta^\ell_n \cdot \delta^p_q, \qquad (4)$$

где $n = 0,1,2,...$, $k \in N_{s,n}$ и $p \in D_{s,n}$; $\ell = 0,1,2,...$, $m \in N_{s,\ell}$ и $q \in D_{s,\ell}$. Для их построения была использована функция $\mathrm{mup}_s(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\cdot F_s(t)dt$,

где $F_s(t) = \prod\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2\frac{st}{(2s)^k}}{s^2\cdot\frac{t}{(2s)^k}\cdot\sin\frac{t}{(2s)^k}}$.

С помощью обобщенных рядов Тейлора функции классов H_ρ и $H_{\rho,s}$ могут быть восстановлены с использованием информации, заданной в точках достаточно простых конечных множеств, что делает данный математический аппарат удобным для исследования функций из вышеуказанных классов. Так, например, обобщенные ряды Тейлора нашли свое применение при исследовании краевых задач нового типа для функционально-дифференциальных уравнений [5, 9, 10]. Отдельно отметим перспективность практического использования обобщенных рядов Тейлора для приближения функций вида $f(x) = \int\limits_{-1}^{x} g(t)dt$, поскольку для представления такой функции обобщенным рядом Тейлора необходимы значения $f(x)$ в точках некоторого конечного множества (эти значения можно получить, применяя методы приближенного вычисления интегралов), а также значения ее производных, вычисление которых, естественно, является более простой задачей, чем вычисление значений самой функции $f(x)$.

Таким образом, к числу актуальных задач можно отнести разработку программного обеспечения, реализующего аппарат обобщенных рядов Тейлора.

Целью настоящей работы является получение формул для вычисления базисных функций $\varphi_{s,n,k}(x)$ и $\psi_{s,n,p}(x)$ с использованием конечных линейных комбинаций сдвигов атомарной функции $\mathrm{mup}_s(x)$, что является существенным для оптимального использования вычислительных ресурсов.

1. Функция $\mathrm{mup}_s(x)$ и ее свойства

В данном разделе мы приведем некоторые свойства функции $\mathrm{mup}_s(x)$, которые нам понадобятся для решения поставленной задачи.

Согласно [6], функция $\mathrm{mup}_s(x)$ является финитным решением следующего функционально-дифференциального уравнения:

$$y'(x) = \\ = 2\cdot\sum_{k=1}^{s}\left(y(2sx+2s-2k+1) - y(2sx-2k+1)\right). \qquad (5)$$

Кроме того, эта функция обладает такими свойствами:

1) носителем $\mathrm{mup}_s(x)$ является отрезок $[-1,1]$, $\mathrm{mup}_s(x)$ – четная функция;

2) $\mathrm{mup}_s(x)$ является бесконечно дифференцируемой и $\left\|\mathrm{mup}_s^{(k)}\right\|_C = 2^k\cdot(2s)^{\frac{k(k-1)}{2}}$ [6];

3) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{mup}_s(x)dx = 1$, $\mathrm{mup}_s(0) = 1$ [6];

4) функция $\mathrm{mup}_s(x)$ на промежутке $[-1,0]$ монотонно возрастает;

5) производная ℓ-го порядка функции $\mathrm{mup}_s(x)$ может быть найдена по формуле

$$\mathrm{mup}_s^{(\ell)}(x) = 2^\ell\cdot(2s)^{\frac{\ell(\ell-1)}{2}}\cdot\sum_{k=1}^{(2s)^\ell}\delta_{s,\ell,k}\times \\ \times\mathrm{mup}_s\left((2s)^\ell x + (2s)^\ell - 2k + 1\right),$$

где коэффициенты $\delta_{s,\ell,k}$ могут быть найдены следующим образом:

а) $\delta_{s,1,i} = 1$ для любого $i = 1,...,s$ и $\delta_{s,1,j} = -1$ для любого $j = s+1,...,2s$;

б) если $\ell \ge 2$, то $\delta_{s,\ell,i+j\cdot(2s)^{\ell-1}} = \delta_{s,\ell-1,i}$ и $\delta_{s,\ell,i+k\cdot(2s)^{\ell-1}} = -\delta_{s,\ell-1,i}$, где $i = 1,...,(2s)^{\ell-1}$, $j = 0,1,...,s-1$ и $k = s,...,2s-1$; отдельно отметим, что $\delta_{s,\ell,1} = 1$ для любого натурального l;

6) $\mathrm{mup}_s(-1) = \mathrm{mup}_s(1) = 0$ и $\mathrm{mup}_s^{(i)}\left(\frac{2j}{(2s)^i}\right) = 0$

для всех $i \in N$ и $j \in \left\{-s\cdot(2s)^{i-1},\dots,s\cdot(2s)^{i-1}\right\}$;

7) для любого $k = 0,1,2,\dots$ значения функции $\mathrm{mup}_s(x)$ в точках вида $-1+\frac{1}{s(2s)^k}$ и $-1+\frac{1}{(2s)^k}$ могут быть найдены по следующим формулам:

$$\mathrm{mup}_s\left(-1+\frac{1}{s\cdot(2s)^k}\right) = \frac{2^{k+1}}{(2s)^{\frac{(k+1)(k+2)}{2}}}\cdot\sum_{j=0}^{k}\frac{\mu_{s,j}}{j!\cdot(k-j)!}$$ и

$$\mathrm{mup}_s\left(-1+\frac{1}{(2s)^k}\right) = \frac{2^k}{(k-1)!\cdot(2s)^{\frac{k(k+1)}{2}}}\cdot\nu_{s,k-1},$$

где $\mu_{s,j} = \int_{-1}^{1} x^j\cdot\mathrm{mup}_s(x)dx$ и $\nu_{s,k} = \int_{0}^{1} x^k\cdot\mathrm{mup}_s(x)dx$;

8) величины $\mu_{s,j}$ и $\nu_{s,k}$ могут быть найдены следующим образом:

а) $\mu_{s,0} = 1$ и для любого натурального n

$$\mu_{s,2n} = \frac{(2n)!}{s\cdot\left((2s)^{2n}-1\right)}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{\sum_{\ell=1}^{s}(2\ell-1)^{2k+1}}{(2n-2k)!\cdot(2k+1)!}$$ и $\mu_{s,2n-1} = 0$;

б) $\nu_{s,2n} = \frac{\mu_{s,2n}}{2}$ и для любого $n = 0,1,2,\dots$

$$\nu_{s,2n-1} = \frac{1}{n\cdot(2s)^{2n+1}}\cdot\sum_{\ell=0}^{n}C_{2n}^{2\ell}\cdot\sum_{k=1}^{s}(2k-1)^{2\ell}\cdot\mu_{s,2n-2\ell};$$

9) $\Delta^2_{\frac{1}{s(2s)^\ell}}\left(\mathrm{mup}_s^{(\ell)};\frac{m}{s(2s)^\ell}\right) = 0$ при $\ell = 0,1,2,\dots$,

$m \in \left\{-s\cdot(2s)^\ell+1,\dots,s\cdot(2s)^{\ell-1}-2, s\cdot(2s)^{\ell-1}-1\right\}\setminus\{k\cdot s\}$,

где $k \in Z$.

Свойства 4) – 9) взяты из [11]. Для полноты изложения мы приведем их доказательство.

Докажем свойство 4). Для этого покажем, что на промежутке $[-1,0]$ имеет место $\mathrm{mup}'_s(x) \ge 0$. Воспользуемся функционально-дифференциальным уравнением (5). Так как для любых $x \in [-1,0]$ и $k = 1,2,\dots,s$ справедливо $2s\cdot x - 2k + 1 \le -1$, то с использованием свойства 1) функции $\mathrm{mup}_s(x)$ получаем $\mathrm{mup}_s(2sx-2k+1) = 0$. Значит, $\mathrm{mup}'_s(x) =$

$= 2\cdot\sum_{k=1}^{s}\mathrm{mup}_s(2sx+2s-2k+1)$ при $x \in [-1,0]$. Остается проверить, что $\mathrm{mup}_s(x) \ge 0$ для любого x.

Докажем, что функция $\mathrm{mup}_s(x)$ является плотностью распределения вероятностей некоторой случайной величины.

Введем в рассмотрение функции $p_{kj}(x)$, такие что $p_{kj}(x) = \frac{(2s)^k}{2s^2}$ при $|x| \le \frac{2j-1}{(2s)^k}$ и $p_{kj}(x) = 0$ при $|x| > \frac{2j-1}{(2s)^k}$. Далее, положим $p_k(x) = \sum_{j=1}^{s}p_{kj}(x)$. Поскольку $p_k(x) \ge 0$ для любого $x \in R$ и $\int_{-\infty}^{\infty}p_k(x)dx = 1$, то функция $p_k(x)$ является плотностью распределения некоторой случайной величины, которую будем обозначать через ξ_k. Характеристическая функция ξ_k имеет вид $\varphi_k(t) = \sum_{j=1}^{s}\frac{\sin\left((2j-1)\cdot\frac{t}{(2s)^k}\right)}{s^2\cdot\frac{t}{(2s)^k}}$. Используя формулу $\sum_{j=1}^{s}\sin\left((2j-1)\alpha\right) = \frac{\sin^2(s\alpha)}{\sin\alpha}$, получаем

$\varphi_k(t) = \frac{\sin^2\frac{st}{(2s)^k}}{s^2\cdot\frac{t}{(2s)^k}\cdot\sin\frac{t}{(2s)^k}}$. Пусть $Y_k = \sum_{j=1}^{k}\xi_j$. Характеристическая функция случайной величины Y_k имеет вид $\psi_k(t) = \prod_{j=1}^{k}\varphi_j(t) = \prod_{j=1}^{k}\frac{\sin^2\frac{st}{(2s)^j}}{s^2\cdot\frac{t}{(2s)^j}\cdot\sin\frac{t}{(2s)^j}}$. Из этого видно, что $F_s(t) = \lim_{k\to\infty}\psi_k(t)$, где, напомним, $F_s(t)$ – преобразование Фурье функции $\mathrm{mup}_s(x)$. По теореме Леви (см., например, [12], стр. 114) $F_s(t)$ – характеристическая функция случайной величины Y, к которой сходятся по распределению Y_k при $k \to \infty$. Значит, функция $\mathrm{mup}_s(x)$ является плотностью распределения Y. Откуда получаем $\mathrm{mup}_s(x) \ge 0$ для любого $x \in R$ и, следовательно, $\mathrm{mup}'_s(x) \ge 0$ на отрезке $[-1,0]$. Свойство 4) доказано.

Свойства 5) и 6) получаются непосредственно из уравнения (5) путем дифференцирования с использованием свойства 1) функции $\mathrm{mup}_s(x)$.

Приступим к доказательству свойства 7). Для этого воспользуемся формулой Тейлора с остатком в интегральной форме: $\mathrm{mup}_s\left(-1+\frac{1}{s\cdot(2s)^n}\right) =$

$$= \sum_{k=0}^{n}\frac{\mathrm{mup}_s^{(k)}(-1)}{k!} + \frac{1}{n!}\cdot\int_{-1}^{-1+\frac{1}{s\cdot(2s)^n}}\mathrm{mup}_s^{(n+1)}(t)\times$$

$\times\left(-1+\frac{1}{s\cdot(2s)^n}-t\right)^n dt$. Из свойства 6) следует, что $\mathrm{mup}_s^{(k)}(-1)=0$ для любого $k=0,1,2,\ldots$. Значит,

$$\mathrm{mup}_s\left(-1+\frac{1}{s\cdot(2s)^n}\right)=\frac{1}{n!}\cdot\int_{-1}^{-1+\frac{1}{s\cdot(2s)^n}}\mathrm{mup}_s^{(n+1)}(t)\times$$

$\times\left(-1+\frac{1}{s\cdot(2s)^n}-t\right)^n dt$. Применяя свойство 5), имеем

$$\mathrm{mup}_s\left(-1+\frac{1}{s\cdot(2s)^n}\right)=\frac{1}{n!}\int_{-1}^{-1+\frac{1}{s\cdot(2s)^n}}\left(-1+\frac{1}{s\cdot(2s)^n}-t\right)^n\times$$

$$\times 2^{n+1}\cdot(2s)^{\frac{n(n+1)}{2}}\cdot\sum_{k=1}^{(2s)^{n+1}}\delta_{s,n+1,k}\cdot\mathrm{mup}_s\Big((2s)^{n+1}\cdot t+$$

$$+(2s)^{n+1}-2k+1\Big)dt=\frac{2^{n+1}}{n!\cdot(2s)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}}\cdot\sum_{k=1}^{(2s)^{n+1}}\delta_{s,n+1,k}\times$$

$\times\int_{-2k+1}^{3-2k}(-\tau+3-2k)^n\cdot\mathrm{mup}_s(\tau)d\tau$. Последний переход получается после замены переменной. Из свойства 1) следует, что для любого $\tau\in[-2k+1,-2k+3]$ $\mathrm{mup}_s(\tau)=0$ при $k=2,3,\ldots,(2s)^{n+1}$. Поэтому, учитывая $\delta_{s,n+1,1}=1$, получаем $\mathrm{mup}_s\left(-1+\frac{1}{s\cdot(2s)^n}\right)=$

$=\frac{2^{n+1}}{n!\cdot(2s)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}}\cdot\int_{-1}^{1}(-\tau+1)^n\cdot\mathrm{mup}_s(\tau)d\tau$. Поскольку функция $\mathrm{mup}_s(x)$ является четной, то с использованием обозначений $\mu_{s,k}=\int_{-1}^{1}x^k\cdot\mathrm{mup}_s(x)dx$ получаем $\mathrm{mup}_s\left(-1+\frac{1}{s\cdot(2s)^n}\right)=\frac{2^{n+1}}{n!(2s)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}}\cdot\sum_{k=0}^{n}\frac{\mu_{s,k}}{k!\cdot(n-k)!}$.

Аналогично, $\mathrm{mup}_s\left(-1+\frac{1}{(2s)^n}\right)=\frac{2^n}{(n-1)!(2s)^{\frac{n(n+1)}{2}}}\nu_{s,n-1}$,

где $\nu_{s,n-1}=\int_0^1 x^{n-1}\cdot\mathrm{mup}_s(x)dx$. Итак, свойство 7) доказано.

Покажем справедливость свойства 8). Сразу отметим, что из свойств 1) и 3) следует $\mu_{s,0}=1$. Далее, преобразование Фурье функции $\mathrm{mup}_s(x)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$F_s(t)=F_s\left(\tfrac{t}{2s}\right)\cdot\tfrac{2}{t\cdot s}\cdot\sum_{k=1}^{s}\sin\left((2k-1)\cdot\tfrac{t}{2s}\right). \quad (6)$$

Функция $F_s(t)$ является целой [13] (гл. 3, § 1). Разложим ее в ряд Маклорена: $F_s(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_s^{(n)}(0)}{n!}\cdot t^n$. Из свойств преобразования Фурье следует, что $F_s^{(n)}(0)=i^n\cdot\int_{-1}^{1}x^n\cdot\mathrm{mup}_s(x)dx$. Поскольку функция $\mathrm{mup}_s(x)$ является четной (свойство 1)), то справедливы равенства $\mu_{s,2n-1}=\int_{-1}^{1}x^{2n-1}\cdot\mathrm{mup}_s(x)dx=0$ и $F_s^{(2n-1)}(0)=0$. Значит, $F_s(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot\mu_{s,2n}}{(2n)!}\cdot t^{2n}$.

Далее, разложим правую часть функционального уравнения (6) в ряд Маклорена:

$$F_s\left(\frac{t}{2s}\right)\cdot\frac{2}{t\cdot s}\cdot\sum_{k=1}^{s}\sin\left((2k-1)\cdot\frac{t}{2s}\right)=\frac{2}{s}\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m)!}\times$$

$$\times\frac{\mu_{s,2m}}{(2s)^{2m}}\cdot t^{2m}\times\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j\cdot t^{2j}\cdot\sum_{k=1}^{s}(2k-1)^{2j+1}}{(2j+1)!\cdot(2s)^{2j+1}}=$$

$=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\cdot t^{2n}$, где $c_n=\frac{2\cdot(-1)^n}{s}\cdot\sum_{j=0}^{n}\frac{\mu_{s,2n-2j}}{(2n-2j)!}\times$

$\times\frac{\sum_{k=1}^{s}(2k-1)^{2j+1}}{(2j+1)!\cdot(2s)^{2n+1}}$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, мы получаем равенство

$$\frac{\mu_{s,2n}}{(2n)!}=\frac{2}{s}\cdot\sum_{j=0}^{n}\frac{\sum_{k=1}^{s}(2k-1)^{2j+1}}{(2n-2j)!\cdot(2j+1)!\cdot(2s)^{2n+1}}\cdot\mu_{s,2n-2j}.$$

Из этого, учитывая $\sum_{k=1}^{s}(2k-1)=s^2$, получаем

$$\mu_{s,2n}\cdot\frac{(2s)^{2n}-1}{(2n)!\cdot(2s)^{2n}}=\frac{1}{s^2}\cdot\sum_{j=1}^{n}\frac{\mu_{s,2n-2j}\cdot\sum_{k=1}^{s}(2k-1)^{2j+1}}{(2n-2j)!\cdot(2j+1)!\cdot(2s)^{2n}},$$

откуда и следует приведенная в свойстве формула.

Получим теперь формулы для вычисления для вычисления величин $\nu_{s,n}=\int_0^1 x^n\cdot\mathrm{mup}_s(x)dx$. В силу четности функции $\mathrm{mup}_s(x)$ (свойство 1)) справедливо равенство $\nu_{s,2n}=\frac{\mu_{s,2n}}{2}$.

Далее, интегрируя по частям и используя $\mathrm{mup}_s(0)=1$, получаем $\nu_{s,2n-1}=\int_0^1 x^{2n-1}\mathrm{mup}_s(x)dx=$

$= -\frac{1}{2n} \cdot \int_0^1 x^{2n} \cdot \mathrm{mup}'_s(x)dx$. Воспользуемся функционально-дифференциальным уравнением (5). Имеем $\nu_{s,2n-1} = -\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{s} \left(\int_0^1 x^{2n} \cdot \mathrm{mup}_s(2sx + 2s - 2k + 1)dx - \int_0^1 x^{2n} \cdot \mathrm{mup}_s(2sx - 2k + 1)dx \right)$. Так как при $x \in [0,1]$ и $k = 1,...,s$ справедливо $2sx + 2s - 2k + 1 \geq 1$, то с учетом свойства 1) получаем $\nu_{s,2n-1} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{s} \int_0^1 x^{2n} \times$ $\times \mathrm{mup}_s(2sx - 2k + 1)dx$, откуда после замены переменной и некоторых преобразований получаем $\nu_{s,2n-1} = \frac{1}{n \cdot (2s)^{2n+1}} \cdot \sum_{k=1}^{s} \sum_{\ell=0}^{2n} C_{2n}^{2\ell} \cdot (2k-1)^{2n-\ell} \cdot \mu_{s,\ell}$. Из этого равенства следует приведенная в свойстве формула. Итак, свойство 8) доказано.

Докажем свойство 9). Рассмотрим сначала случай $\ell = 0$. Нужно доказать, что

$$\mathrm{mup}_s\left(\frac{m+1}{s}\right) - 2 \cdot \mathrm{mup}_s\left(\frac{m}{s}\right) + \mathrm{mup}_s\left(\frac{m-1}{s}\right) = 0 \quad (7)$$

для любого $m = -s+1, -s+2, ..., s-1$, $m \neq 0 (\mathrm{mod}\ s)$. Для этого найдем значения функции $\mathrm{mup}_s(x)$ в точках вида $x = -1 + \frac{r}{s}$, где $r = 1, 2, ..., 2s-1$, $r \neq s$.

Имеем $\mathrm{mup}_s\left(-1 + \frac{r}{s}\right) = \int_{-1}^{-1+\frac{r}{s}} \mathrm{mup}'_s(t)dt$, откуда с использованием (5) получаем формулу $\mathrm{mup}_s\left(-1 + \frac{r}{s}\right) = 2 \cdot \sum_{k=1}^{s} \left(\int_{-1}^{-1+\frac{r}{s}} \mathrm{mup}_s(2sx + 2s - 2k + 1)dx - \int_{-1}^{-1+\frac{r}{s}} \mathrm{mup}_s(2sx - 2k + 1)dx \right)$. Используя замену переменной, получаем $\int_{-1}^{-1+\frac{r}{s}} \mathrm{mup}_s(2sx + 2s - 2k + 1)dx =$ $= \frac{1}{2s} \cdot \int_{-2k+1}^{2r-2k+1} \mathrm{mup}_s(t)dt$. Если $r < k$, то полученный интеграл равен нулю, так как $\mathrm{mup}_s(t) = 0$ при $t \leq -1$. Если $r \geq k$, то в силу свойств 1) и 3) получаем $\int_{-2k+1}^{2r-2k+1} \mathrm{mup}_s(t)dt = 1$. Следовательно, можно записать $\int_{-1}^{-1+\frac{r}{s}} \mathrm{mup}_s(2sx + 2s - 2k + 1)dx = \begin{cases} 0, & k \geq r+1, \\ \frac{1}{2s}, & k \leq r. \end{cases}$

Аналогично проверяется справедливость равенства $\int_{-1}^{-1+\frac{r}{s}} \mathrm{mup}_s(2sx - 2k + 1)dx = \begin{cases} 0, & k > r-s, \\ \frac{1}{2s}, & k \leq r-s. \end{cases}$ Значит, $\mathrm{mup}_s\left(-1 + \frac{r}{s}\right) = \begin{cases} \frac{r}{s}, & r = 1,...,s-1, \\ 2 - \frac{r}{s}, & r = s+1,...,2s-1. \end{cases}$ С использованием этой формулы справедливость (7) проверяется непосредственно.

Пусть $\ell > 0$. В этом случае, используя свойство 5), получаем $\Delta^2_{\frac{1}{s(2s)^\ell}}\left(\mathrm{mup}_s^{(\ell)}; \frac{m}{s(2s)^\ell}\right) = 2^\ell \cdot (2s)^{\frac{(\ell-1)\ell}{2}} \times$ $\times \sum_{k=1}^{(2s)^\ell} \delta_{s,\ell,k} \cdot \Delta^2_{\frac{1}{s}}\left(\mathrm{mup}_s; \frac{m + s \cdot \left((2s)^\ell - 2k + 1\right)}{s}\right)$. Если $\left|m + s \cdot \left((2s)^\ell - 2k + 1\right)\right| \geq s$, то из $m \neq 0 (\mathrm{mod}\ s)$ следует $\left|m + s \cdot \left((2s)^\ell - 2k + 1\right)\right| \geq s+1$. Тогда в силу свойства 1) имеет место равенство $\Delta^2_{\frac{1}{s}}\left(\mathrm{mup}_s; \frac{m + s \cdot \left((2s)^\ell - 2k + 1\right)}{s}\right) = 0$.

Если $\left|m + s \cdot \left((2s)^\ell - 2k + 1\right)\right| < s$, то аналогичным образом $\left|m + s \cdot \left((2s)^\ell - 2k + 1\right)\right| < s-1$. В этом случае $\Delta^2_{\frac{1}{s \cdot (2s)^\ell}}\left(\mathrm{mup}_s^{(\ell)}; \frac{m}{s \cdot (2s)^\ell}\right) = 0$ в силу (7). Итак, свойство 9) доказано.

2. Построение базисных функций

Введем в рассмотрение функции $\hat{\varphi}_{s,n,0}(x)$, которые на промежутке $[-1,0]$ определяются следующим образом: $\hat{\varphi}_{s,0,0}(x) = \mathrm{mup}_s(x)$ и $\hat{\varphi}_{s,n,0}(x) =$ $= \mathrm{mup}_s\left(x - 1 + \frac{1}{(2s)^n}\right) + \sum_{j=0}^{n-1} x_{s,n-j-1} \mathrm{mup}_s\left(x - 1 + \frac{1}{s(2s)^j}\right)$ в случае, когда n является натуральным, причем коэффициенты $\{x_{s,i}\}$ удовлетворяют бесконечной треугольной системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \mathrm{mup}_s\left(-1+\frac{1}{2s}\right)+x_{s,0}\mathrm{mup}_s\left(-1+\frac{1}{s}\right)=0\\ \mathrm{mup}_s\left(-1+\frac{1}{(2s)^2}\right)+x_{s,1}\mathrm{mup}_s\left(-1+\frac{1}{s}\right)+\\ +x_{s,0}\mathrm{mup}_s\left(-1+\frac{1}{s\cdot 2s}\right)=0\\ \dots\\ \mathrm{mup}_s\left(-1+\frac{1}{(2s)^n}\right)+x_{s,n-1}\mathrm{mup}_s\left(-1+\frac{1}{s}\right)+\\ +\dots+x_{s,0}\mathrm{mup}_s\left(-1+\frac{1}{s(2s)^{n-1}}\right)=0\\ \dots\end{cases} \tag{8}$$

Так как $\mathrm{mup}_s\left(-1+\frac{1}{s}\right)=\frac{1}{s}$ (это следует из свойств 8) и 9) функции $\mathrm{mup}_s(x)$), система уравнений (8) имеет единственное решение. Поэтому функции $\hat{\varphi}_{s,n,0}(x)$ определены корректно.

На промежуток $[0,1]$ функции $\hat{\varphi}_{s,n,0}(x)$ с четными номерами n продолжим четным образом, а с нечетными – нечетным образом. Это необходимо для того, чтобы эти функции были бесконечно дифференцируемыми на $[-1,1]$.

Введем также в рассмотрение функции $\hat{\psi}_{s,n,s(2s)^n-1}(x)$, которые для всех $x\le 0$ определим следующей формулой: $\hat{\psi}_{s,n,s(2s)^n-1}(x)=$

$$=-\mathrm{mup}_s\left(x-1+\frac{1}{(2s)^n}\right)+s\cdot\mathrm{mup}_s\left(x-1+\frac{1}{s\cdot(2s)^n}\right)+$$

$$+\sum_{j=0}^{n-1}y_{s,n-j-1}\cdot\mathrm{mup}_s\left(x-1+\frac{1}{s\cdot(2s)^j}\right),$$ где коэффициенты $\{y_{s,j}\}$ удовлетворяют бесконечной треугольной системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} -\mathrm{mup}_s\left(-1+\frac{1}{2s}\right)+s\cdot\mathrm{mup}_s\left(-1+\frac{1}{s\cdot(2s)}\right)+\\ +y_{s,0}\cdot\mathrm{mup}_s\left(-1+\frac{1}{s}\right)=0\\ \dots\\ -\mathrm{mup}_s\left(-1+\frac{1}{(2s)^n}\right)+s\cdot\mathrm{mup}_s\left(-1+\frac{1}{s\cdot(2s)^n}\right)+\\ +y_{s,0}\cdot\mathrm{mup}_s\left(-1+\frac{1}{s\cdot(2s)^{n-1}}\right)+\dots+y_{s,n-1}\times\\ \times\mathrm{mup}_s\left(-1+\frac{1}{s}\right)=0\\ \dots\end{cases} \tag{9}$$

Так как $\mathrm{mup}_s\left(-1+\frac{1}{s}\right)=\frac{1}{s}$, приведенная система уравнений имеет единственное решение.

Для $x>0$ пусть $\hat{\psi}_{s,n,s(2s)^n-1}(x)=0$.

Далее, введем в рассмотрение функции $\hat{\varphi}_{s,n,k}(x)$ и $\hat{\psi}_{s,n,p}(x)$ ($k\ne 0$ и $p\ne s\cdot(2s)^n-1$), которые определены следующим образом:

а) для $n=0$ положим $\hat{\varphi}_{s,0,-1}(x)=\hat{\varphi}_{s,0,0}(x+1)$, $\hat{\varphi}_{s,0,1}(x)=\hat{\varphi}_{s,0,0}(x-1)$, $\hat{\psi}_{s,0,1}(x)=\hat{\psi}_{s,0,s-1}(-x-1)$, $\hat{\psi}_{s,0,s+1}(x)=\hat{\psi}_{s,0,s-1}(-x)$; остальные функции $\hat{\psi}_{s,0,p}$ строим рекуррентно: для любого $p=2,\dots,s-2$ положим $\hat{\varphi}_{s,0,p}(x)=\hat{\psi}_{s,0,s-1}\left(-x-1+\frac{p-1}{s}\right)-\hat{\varphi}_{s,0,0}(x)\times$ $\times\hat{\psi}_{s,0,s-1}\left(-1+\frac{p-1}{s}\right)-\hat{\psi}_{s,0,p-1}(x)\cdot\Delta^2_{\frac{1}{s}}\left(\hat{\psi}_{s,0,s-1};-1-\right.$ $\left.-x^*_{s,0,p-1}+\frac{p-1}{s}\right)-\hat{\psi}_{s,0,s+p-1}(x)\cdot\Delta^2_{\frac{1}{s}}\left(\hat{\psi}_{s,0,s-1};-x^*_{s,0,p-1}-\right.$ $\left.-1+\frac{p-1}{s}\right)$ и $\hat{\psi}_{s,0,p+s}(x)=\hat{\psi}_{s,0,p}(x-1)$;

б) пусть $n>0$ и для всех $m=1,\dots,n-1$, $j\in N_{s,m}$ и $q\in D_{s,m}$ функции $\hat{\varphi}_{s,m,j}(x)$ и $\hat{\psi}_{s,m,q}(x)$ уже построены, тогда

– для любого $k\in N_{s,n}$ положим $\hat{\varphi}_{s,n,k}(x)=$

$$=\hat{\varphi}_{s,n,0}\left(x-x_{s,n,k}\right)-\sum_{\ell=0}^{n-1}\frac{1}{2^\ell\cdot(2s)^{\frac{\ell(\ell-1)}{2}}}\cdot\sum_{j\in N_{s,\ell}}\hat{\varphi}_{s,\ell,j}(x)\times$$

$$\times\hat{\varphi}^{(\ell)}_{s,n,0}\left(x_{s,\ell,j}-x_{s,n,k}\right)-\sum_{\ell=0}^{n-1}\frac{1}{2^\ell\cdot(2s)^{\frac{\ell(\ell-1)}{2}}}\times$$

$$\times\sum_{p\in D_{s,\ell}}\Delta^2_{\frac{1}{s(2s)^\ell}}\left(\hat{\varphi}^{(\ell)}_{s,n,0};x^*_{s,\ell,p}-x_{s,n,k}\right)\cdot\hat{\psi}_{s,\ell,p}(x);$$

– $\hat{\psi}_{s,n,1}(x)=\hat{\psi}_{s,n,s\cdot(2s)^n-1}(-x-1)$;

– $\hat{\psi}_{s,n,s\cdot(2s)^n+1}(x)=\hat{\psi}_{s,n,s\cdot(2s)^n-1}(-x)$;

– для любого $j=1,\dots,2\cdot(2s)^n-1$ положим

$$\hat{\psi}_{s,n,s\cdot j+1}(x)=\hat{\psi}_{s,n,1}\left(x-\frac{1}{(2s)^n}\right)-\sum_{\ell=0}^{n}\frac{1}{2^\ell\cdot(2s)^{\frac{\ell(\ell-1)}{2}}}\times$$

$$\times\sum_{k\in N_{s,i}}\hat{\varphi}_{s,i,k}(x)\cdot\hat{\psi}^{(i)}_{s,n,1}\left(x_{s,i,k}-\frac{j}{(2s)^n}\right)-\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{2^i(2s)^{\frac{i(i-1)}{2}}}\times$$

$$\sum_{q\in D_{s,i}}\hat{\psi}_{s,i,q}(x)\cdot\Delta^2_{\frac{1}{s(2s)^i}}\left(\hat{\psi}^{(i)}_{s,n,1};x^*_{s,i,q}-\frac{j}{(2s)^n}\right);$$

– для $m=0,1,\dots,2\cdot(2s)^n-1$ и $s=2,\dots,s-1$ функцию $\hat{\psi}_{s,n,m\cdot s+p}(x)$ определим формулой

$$\hat{\psi}_{s,n,m\cdot s+p}(x)=\hat{\psi}_{s,n,1}\left(x-\frac{m\cdot s+p-1}{s\cdot(2s)^n}\right)-\sum_{\ell=0}^{n}\frac{1}{2^\ell\cdot(2s)^{\frac{\ell(\ell-1)}{2}}}\times$$

$$\times\sum_{k\in N_{s,\ell}}\hat{\varphi}_{s,\ell,k}(x)\cdot\hat{\psi}^{(\ell)}_{s,n,1}\left(x_{s,\ell,k}-\frac{m\cdot s+p-1}{s\cdot(2s)^n}\right)-$$

$$-\sum_{\ell=0}^{n-1}\frac{1}{2^{\ell}\cdot(2s)^{\frac{\ell(\ell-1)}{2}}}\cdot\sum_{q\in D_{s,\ell}}\hat{\psi}_{s,\ell,q}(x)\cdot\Delta^2_{\frac{1}{s(2s)^{\ell}}}\left(\hat{\psi}^{(\ell)}_{s,n,1};x^*_{s,\ell,q}-\frac{m\cdot s+p-1}{s\cdot(2s)^n}\right)-\sum_{j=0}^{2(2s)^n-1-m}\frac{1}{2^n\cdot(2s)^{\frac{n(n-1)}{2}}}\hat{\psi}_{s,n,s\cdot j+s\cdot m+p-1}(x)\times$$
$$\times\Delta^2_{\frac{1}{s\cdot(2s)^n}}\left(\hat{\psi}^{(n)}_{s,n,1};x^*_{s\cdot j+m\cdot s+p-1}-\frac{m\cdot s+p-1}{s\cdot(2s)^n}\right).$$

Теорема 1. Для любых $n=0,1,2,...$, $k\in N_{s,n}$ и $p\in D_{s,n}$ имеют место следующие равенства:

$$\hat{\varphi}_{s,n,k}(x)\equiv 2^n\cdot(2s)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot\varphi_{s,n,k}(x),$$
$$\hat{\psi}_{s,n,p}(x)=2^n\cdot(2s)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot\psi_{s,n,p}(x).$$

Чтобы доказать эту теорему, нам понадобятся некоторые вспомогательные утверждения.

Сначала отметим, что из свойства 1) функции $mup_s(x)$ следует, что $\hat{\varphi}_{s,n,0}(x)=0$ и $\hat{\psi}_{s,n,p}(x)=0$ при $|x|\ge 1$ и $n=0,1,2,...$. Кроме того, по построению $\hat{\varphi}_{s,n,k}(x)$ и $\hat{\psi}_{s,n,p}(x)$ являются функциями класса $H_{1,s}$ (это следует из свойства 2) функции $mup_s(x)$).

Лемма 1. Для любых $\ell=0,1,2,...$, $n\in N$ и $j\in\{k\in N_{s,\ell}:k\le 0\}$ верно $mup_s^{(\ell)}\left(x_{s,1,j}-1+\frac{1}{(2s)^n}\right)=$

$$=\begin{cases}2^{\ell}\cdot(2s)^{\frac{\ell(\ell-1)}{2}}\cdot mup_s\left(-1+\frac{1}{(2s)^{n-\ell}}\right), & \text{если } \ell\le n \text{ и } j=0,\\ 0, & \text{во всех других случаях.}\end{cases}$$

Доказательство. Пусть $\ell=0$. Тогда $j\in\{-1;0\}$. Если $j=-1$, то $x_{s,\ell,j}=-1$. В этом случае для любого натурального n из свойства 1) функции $mup_s(x)$ следует $mup_s\left(-2+\frac{1}{(2s)^n}\right)=0$. Если $j=0$, то $x_{s,\ell,j}=0$ и $mup_s\left(-1+\frac{1}{(2s)^n}\right)=mup_s\left(-1+\frac{1}{(2s)^n}\right)$.

Пусть теперь $\ell>0$. Тогда $x_{s,\ell,j}=\frac{j}{s\cdot(2s)^{\ell-1}}$. Используя свойство 5) функции $mup_s(x)$, мы получаем $mup_s\left(x_{s,\ell,j}-1+\frac{1}{(2s)^n}\right)=2^{\ell}\cdot(2s)^{\frac{\ell(\ell-1)}{2}}\cdot\sum_{k=1}^{(2s)^{\ell}}\delta_{s,\ell,k}\times$ $\times mup_s\left(2j-2k+1+(2s)^{-n+\ell}\right)$.

Если $k>1$, то для всех $j\in\{m\in N_{s,\ell}:m\le 0\}$ и $n\in N$ точка $2j-2k+1+(2s)^{-n+\ell}$ лежит вне интервала $(-1,1)$. Значит, в силу свойства 1) функции $mup_s(x)$ верно равенство $mup_s\left(x_{s,\ell,j}-1+\frac{1}{(2s)^n}\right)=$ $=2^{\ell}\cdot(2s)^{\frac{\ell(\ell-1)}{2}}\cdot mup_s\left(2j-1+(2s)^{-n+\ell}\right)$ (здесь мы воспользовались тем, что $\delta_{s,\ell,1}=1$). Точка $2j-1+\frac{1}{(2s)^{n-\ell}}$ принадлежит $(-1,1)$ тогда и только тогда, когда $j=0$ и $\ell\le n$, из чего и следует справедливость указанной в лемме формулы при $\ell>0$.

Итак, лемма доказана.

Применяя аналогичные рассуждения можно доказать следующее утверждение:

Лемма 2. Для любых $\ell=0,1,2,...$, $m\in\{k\in N_{s,\ell}:k\le 0\}$ и $j=0,1,2,...$ справедлива следующая формула: $mup_s^{(\ell)}\left(x_{s,\ell,m}-1+\frac{1}{s\cdot(2s)^j}\right)=$

$$=\begin{cases}2^{\ell}\cdot(2s)^{\frac{\ell(\ell-1)}{2}}\cdot mup_s\left(-1+\frac{1}{s(2s)^{j-\ell}}\right), \ell\le j \text{ и } m=0,\\ 0, \text{ во всех других случаях.}\end{cases}$$

Лемма 3. Для любых $n=0,1,2,...$, $\ell=0,1,2,...$ и $m\in N_{s,\ell}$ верно

$$\hat{\varphi}^{(\ell)}_{s,n,0}\left(x_{s,\ell,m}\right)=2^n(2s)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot\delta_n^{\ell}\cdot\delta_0^m.$$

Доказательство. Так как $\hat{\varphi}_{s,0,0}(x)=mup_s(x)$, то в силу свойств 3) и 6) функции $mup_s(x)$ выполняется равенство $\hat{\varphi}^{(\ell)}_{s,0,0}\left(x_{s,\ell,m}\right)=\delta_0^{\ell}\cdot\delta_0^m$.

Рассмотрим любое натуральное число n. Если $\ell=n$ и $m=0$, то из лемм 1 и 2 с учетом свойства 3) следует равенство $\hat{\varphi}^{(\ell)}_{s,n,0}\left(x_{s,\ell,0}\right)=2^n(2s)^{\frac{n(n-1)}{2}}$. Если $m=0$ и $\ell<n$, то из тех же соображений следует, что $\hat{\varphi}^{(\ell)}_{s,n,0}\left(x_{s,\ell,0}\right)=2^{\ell}(2s)^{\frac{\ell(\ell-1)}{2}}\left(mup_s\left(-1+\frac{1}{(2s)^{n-\ell}}\right)+\sum_{j=\ell}^{n-1}x_{s,n-j-1}\cdot mup_s\left(-1+\frac{1}{s\cdot(2s)^{j-\ell}}\right)\right)$, а так как коэффициенты $\{x_{s,j}\}$ являются решением системы (8), то $\hat{\varphi}^{(\ell)}_{s,n,0}\left(x_{s,\ell,0}\right)=0$. Лемма доказана.

С применением подобных рассуждений можно доказать следующее утверждение:

Лемма 4. Для любых $n=0,1,2,...$, $\ell=0,1,2,...$ и $m\in N_{s,\ell}$ имеет место

$$\hat{\psi}^{(\ell)}_{s,n,s(2s)^n-1}\left(x_{s,\ell,m}\right)=0.$$

Лемма 5. Для любых $n\in N$, $\ell=0,1,2,...$ и $p\in\left\{q\in D_{s,\ell} : q\le s\cdot(2s)^{\ell}-1\right\}$ справедливо равенство

$$\Delta^2_{\frac{1}{s(2s)^{\ell}}}\left(\mathrm{mup}_s^{(\ell)}; x^*_{s,\ell,p}-1+\frac{1}{(2s)^n}\right)=$$

$$=\begin{cases}2^{\ell}(2s)^{\frac{\ell(\ell-1)}{2}}\mathrm{mup}_s\left(-1+\frac{1}{(2s)^{n-\ell}}\right), \ell<n \text{ и } p=s(2s)^{\ell}-1,\\ 0, \text{ во всех остальных случаях.}\end{cases}$$

Доказательство. Возможны несколько случаев: $\ell\ge n$ и $p\ge s\cdot(2s)^{\ell}-s\cdot(2s)^{\ell-n}+1$; $\ell\ge n$ и $p<s\cdot(2s)^{\ell}-s\cdot(2s)^{\ell-n}+1$; $\ell<n$ и $p<s\cdot(2s)^{\ell}-1$; $\ell<n$ и $p=s\cdot(2s)^{\ell}-1$. Рассмотрим каждый из них.

1. Если $\ell\ge n$ и $p\ge s\cdot(2s)^{\ell}-s\cdot(2s)^{\ell-n}+1$, то справедливо равенство $x^*_{s,\ell,p}-1+\frac{1}{(2s)^n}=\frac{m}{s(2s)^{\ell}}$, где $m=p+s(2s)^{\ell-n}-(2s)^{\ell+1}$. Так как $p\ne 0(\mathrm{mod}\ s)$, то $m\ne 0(\mathrm{mod}\ s)$. Поскольку $s\cdot(2s)^{\ell}-s\cdot(2s)^{\ell-n}+1\le$ $\le p\le s(2s)^{\ell}-1$, то можно записать следующее: $-s\cdot(2s)^{\ell}+1\le m\le -s\cdot(2s)^{\ell}+s\cdot(2s)^{\ell-n}-1$. Тогда из свойства 9) функции $\mathrm{mup}_s(x)$ следует, что $\Delta^2_{\frac{1}{s(2s)^{\ell}}}\left(\mathrm{mup}_s^{(\ell)}; x^*_{s,\ell,p}-1+\frac{1}{(2s)^n}\right)=0$.

2. Пусть $\ell\ge n$ и $p<s\cdot(2s)^{\ell}-s\cdot(2s)^{\ell-n}+1$. Так как $p\ne 0(\mathrm{mod}\ s)$, то $p\le s\cdot(2s)^{\ell}-(2s)^{\ell-n}-1$. Тогда $x^*_{s,\ell,p}-1+\frac{1}{(2s)^n}+\frac{1}{s(2s)^{\ell}}\le -1$, из чего с учетом свойства 1) функции $\mathrm{mup}_s(x)$ следует $\Delta^2_{\frac{1}{s(2s)^{\ell}}}\left(\mathrm{mup}_s^{(\ell)}; x^*_{s,\ell,p}-1+\frac{1}{(2s)^n}\right)=0$.

3. Аналогично можно показать, что $\Delta^2_{\frac{1}{s(2s)^{\ell}}}\left(\mathrm{mup}_s^{(\ell)}; x^*_{s,\ell,p}-1+\frac{1}{(2s)^n}\right)=0$, если $\ell<n$ и $p<s\cdot(2s)^{\ell}-1$.

4. Пусть $\ell<n$ и $p=s\cdot(2s)^{\ell}-1$. В этом случае $x^*_{s,l,p}=-\frac{1}{s(2s)^{\ell}}$. Так как $-1-\frac{2}{s(2s)^{\ell}}+\frac{1}{(2s)^n}<$ $<-1-\frac{1}{s(2s)^{\ell}}+\frac{1}{(2s)^n}\le -1$, то из свойства 1) функции $\mathrm{mup}_s(x)$ следует справедливость равенства

$$\Delta^2_{\frac{1}{s(2s)^{\ell}}}\left(\mathrm{mup}_s^{(\ell)}; x^*_{s,\ell,p}-1+\frac{1}{(2s)^n}\right)=\mathrm{mup}_s^{(\ell)}\left(\frac{1}{(2s)^n}-1\right),$$

откуда в силу леммы 1 получаем

$$\Delta^2_{\frac{1}{s(2s)^{\ell}}}\left(\mathrm{mup}_s^{(\ell)}; x^*_{s,\ell,p}-1+\frac{1}{(2s)^n}\right)=2^{\ell}\cdot(2s)^{\frac{\ell(\ell-1)}{2}}\times$$

$$\times\mathrm{mup}_s\left(-1+\frac{1}{(2s)^{n-\ell}}\right),$$ что и требовалось доказать.

Лемма доказана.

Аналогично можно установить справедливость следующего утверждения:

Лемма 6. Для любых $j=0,1,2,...$, $l=0,1,2,...$ и $p\in\left\{q\in D_{s,l} : q\le s\cdot(2s)^{l}-1\right\}$ имеет место равенство

$$\Delta^2_{\frac{1}{s\cdot(2s)^{l}}}\left(\mathrm{mup}_s^{(l)}; x^*_{s,l,p}-1+\frac{1}{s\cdot(2s)^j}\right)=$$

$$=\begin{cases}2^{l}(2s)^{\frac{l(l-1)}{2}}\mathrm{mup}_s\left(-1+\frac{1}{s(2s)^{j-l}}\right), l\le j \text{ и } p=s(2s)^{l}-1,\\ 0, \text{ во всех остальных случаях.}\end{cases}$$

Лемма 7. Для любых $n=0,1,2,...$, $\ell=0,1,2,...$ и $p\in D_{s,\ell}$ справедливо $\Delta^2_{\frac{1}{s(2s)^{\ell}}}\left(\hat{\varphi}^{(\ell)}_{s,n,0}; x^*_{s,\ell,p}\right)=0$.

Доказательство. В случае, когда $n=0$, по построению $\hat{\varphi}_{s,0,0}(x)=\mathrm{mup}_s(x)$. В силу свойства 9) функции $\mathrm{mup}_s(x)$ имеет место равенство $\Delta^2_{\frac{1}{s(2s)^{\ell}}}\left(\hat{\varphi}_{s,0,0}; x^*_{s,\ell,p}\right)=0$ при $\ell=0,1,2,...$ и $p\in D_{s,\ell}$.

Пусть теперь $n>0$. Рассмотрим сначала случай $x^*_{s,\ell,p}\le 0$. Тогда $p\le s\cdot(2s)^{\ell}$. Поскольку $p\ne 0(\mathrm{mod}\ s)$, то $p\le s\cdot(2s)^{\ell}-1$, из чего следует, что $x^*_{s,\ell,p}+\frac{1}{s\cdot(2s)^{\ell}}\le 0$. Значит, справедливо равенство:

$$\Delta^2_{\frac{1}{s(2s)^{\ell}}}\left(\hat{\varphi}^{(\ell)}_{s,n,0}; x^*_{s,\ell,p}\right)=\Delta^2_{\frac{1}{s(2s)^{\ell}}}\left(\mathrm{mup}_s^{(\ell)}; x^*_{s,\ell,p}-1+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(2s)^n}\right)+\sum_{j=1}^{n-1}x_{s,n-j-1}\Delta^2_{\frac{1}{s(2s)^{l}}}\left(\mathrm{mup}_s^{(\ell)}; x^*_{s,\ell,p}-1+\frac{1}{s(2s)^j}\right).$$

Из лемм 5 и 6 следует $\Delta^2_{\frac{1}{s\cdot(2s)^{\ell}}}\left(\hat{\varphi}^{(\ell)}_{s,n,0}; x^*_{s,\ell,p}\right)=$

$$=2^{\ell}\cdot(2s)^{\frac{\ell(\ell-1)}{2}}\cdot\left(\mathrm{mup}_s\left(-1+\frac{1}{(2s)^{n-\ell}}\right)+\sum_{j=\ell}^{n-1}x_{s,n-s-1}\times\right.$$

$$\left.\times\mathrm{mup}_s\left(-1+\frac{1}{s\cdot(2s)^{j-\ell}}\right)\right),$$ если $\ell<n$ и $p=s\cdot(2s)^{\ell}-1$;

и $\Delta^2_{\frac{1}{s\cdot(2s)^{\ell}}}\left(\hat{\varphi}^{(\ell)}_{s,n,0}; x^*_{s,\ell,p}\right)=0$ во всех остальных случаях. Так как коэффициенты $\{x_{s,j}\}$ являются решением системы уравнений (8), то при $\ell<n$ и $p=s\cdot(2s)^{\ell}-1$ справедливо следующее равенство:

$$\Delta^2_{\frac{1}{s\cdot(2s)^\ell}}\left(\hat\varphi^{(\ell)}_{s,n,0};x^*_{s,\ell,p}\right)=0.$$

Пусть теперь $x^*_{s,\ell,p}\geq 0$. Тогда $p\geq s(2s)^\ell$. Так как $p\neq 0(\mathrm{mod}\ s)$, то $p\geq s(2s)^\ell+1$. Из чего следует, что $x^*_{s,\ell,p}-\frac{1}{s(2s)^\ell}\geq 0$. По построению $\hat\varphi_{s,2m,0}$ являются четными, а $\hat\varphi_{s,2m-1,0}$ – нечетными. Тогда $\left|\Delta^2_{\frac{1}{s(2s)^\ell}}\left(\hat\varphi^{(\ell)}_{s,n,0};x^*_{s,\ell,p}\right)\right|=\left|\Delta^2_{\frac{1}{s(2s)^\ell}}\left(\hat\varphi^{(\ell)}_{s,n,0};-x^*_{s,\ell,p}\right)\right|$. Поскольку $-x^*_{s,\ell,p}=x^*_{s,\ell,(2s)^{\ell+1}-1}\leq 0$, то в силу выше полученного $\Delta^2_{\frac{1}{s(2s)^\ell}}\left(\hat\varphi^{(\ell)}_{s,n,0};x^*_{s,\ell,(2s)^{\ell+1}-p}\right)=0$. Следовательно, $\Delta^2_{\frac{1}{s(2s)^\ell}}\left(\hat\varphi^{(\ell)}_{s,n,0};x^*_{s,\ell,p}\right)=0$.

Итак, лемма доказана.

Используя подобные рассуждения, можно доказать следующее вспомогательное утверждение:

Лемма 8. Для всех $n=0,1,2,...$, $\ell=0,1,2,...$ и $p\in D_{s,\ell}$ справедливо $\Delta^2_{\frac{1}{s(2s)^\ell}}\left(\hat\psi^{(\ell)}_{s,n,s(2s)^n-1};x^*_{s,\ell,p}\right)=$ $=2^n\cdot(2s)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot\delta^\ell_n\cdot\delta_p^{s\cdot(2s)^n-1}$.

Лемма 9. Для любых $n=0,1,2,...$, $\ell=0,1,2,...$, $k\in N_{s,n}$, $m\in N_{s,\ell}$, $a\in D_{s,n}$ и $b\in D_{s,\ell}$ выполняются следующие равенства:

$$\hat\varphi^{(\ell)}_{s,n,k}\left(x_{s,\ell,m}\right)=2^n\cdot(2s)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot\delta^\ell_n\cdot\delta^m_k \tag{10}$$

$$\Delta^2_{\frac{1}{s(2s)^\ell}}\left(\hat\varphi^{(\ell)}_{s,n,k};x^*_{s,\ell,b}\right)=0 \tag{11}$$

$$\hat\psi^{(\ell)}_{s,n,a}\left(x_{s,\ell,m}\right)=0 \tag{12}$$

$$\Delta^2_{\frac{1}{s(2s)^\ell}}\left(\hat\psi^{(\ell)}_{s,n,a};x^*_{s,\ell,b}\right)=2^n\cdot(2s)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot\delta^\ell_n\cdot\delta^b_a \tag{13}$$

Доказательство. Проверка справедливости утверждения леммы проводится с использованием метода математической индукции.

Пусть $n=0$. В этом случае равенства (10) – (13) проверяются непосредственно с использованием лемм 3, 4,7 и 8.

Предположим, что для любого $u=0,1,...,n-1$ и всех $v\in N_{s,u}$, $w\in D_{s,u}$ верно следующее:

$$\hat\varphi^{(\ell)}_{s,u,v}\left(x_{s,\ell,m}\right)=2^u\cdot(2s)^{\frac{u(u-1)}{2}}\cdot\delta^\ell_u\cdot\delta^m_v \tag{14}$$

$$\Delta^2_{\frac{1}{s(2s)^\ell}}\left(\hat\varphi^{(\ell)}_{s,u,v};x^*_{s,\ell,b}\right)=0 \tag{15}$$

$$\hat\psi^{(\ell)}_{s,u,w}\left(x_{s,\ell,m}\right)=0 \tag{16}$$

$$\Delta^2_{\frac{1}{s(2s)^\ell}}\left(\hat\psi^{(\ell)}_{s,u,w};x^*_{s,\ell,b}\right)=2^u\cdot(2s)^{\frac{u(u-1)}{2}}\cdot\delta^\ell_u\cdot\delta^b_w \tag{17}$$

где $\ell=0,1,2,...$, $m\in N_{s,\ell}$ и $b\in D_{s,\ell}$.

Из лемм 3 и 7 следует выполнение равенств (10) и (11) для функции $\hat\varphi_{s,n,0}(x)$.

Рассмотрим произвольное $k\in N_{s,n}\setminus\{0\}$. По построению $\hat\varphi^{(\ell)}_{s,n,k}\left(x_{s,\ell,m}\right)=\hat\varphi^{(\ell)}_{s,n,0}\left(x_{s,\ell,m}-x_{s,n,k}\right)-$

$$-\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\sum_{j\in N_{s,i}}\hat\varphi^{(\ell)}_{s,i,j}\left(x_{s,\ell,m}\right)\cdot\hat\varphi^{(i)}_{s,n,0}\left(x_{s,\ell,m}-x_{s,n,k}\right)}{2^i\cdot(2s)^{\frac{i(i-1)}{2}}}-$$

$$-\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\sum_{p\in D_{s,i}}\hat\psi^{(\ell)}_{s,i,p}\left(x_{s,\ell,m}\right)\cdot\Delta^2_{\frac{1}{s(2s)^i}}\left(\hat\varphi^{(i)}_{s,n,0};x^*_{s,i,p}-x_{s,n,k}\right)}{2^i\cdot(2s)^{\frac{i(i-1)}{2}}}.$$

Из (16) следует, что $\hat\psi^{(\ell)}_{s,i,p}\left(x_{s,\ell,m}\right)=0$ для любых $i=0,1,...,n-1$ и $p\in D_{s,i}$. Кроме того, если $\ell\leq n-1$, то с использованием (14) получаем $\hat\varphi^{(\ell)}_{s,n,k}\left(x_{s,\ell,m}\right)=$ $=\hat\varphi^{(\ell)}_{s,n,0}\left(x_{s,\ell,m}-x_{s,n,k}\right)-\hat\varphi^{(\ell)}_{s,n,0}\left(x_{s,\ell,m}-x_{s,n,k}\right)=0$.

Далее, если $\ell\geq n$, то согласно (14) получаем $\hat\varphi^{(\ell)}_{s,i,j}\left(x_{s,\ell,m}\right)=0$ для всех $i=0,1,...,n-1$ и $j\in N_{s,i}$. Значит, $\hat\varphi^{(\ell)}_{s,n,k}\left(x_{s,\ell,m}\right)=\hat\varphi^{(\ell)}_{s,n,0}\left(x_{s,\ell,m}-x_{s,n,k}\right)$. В случае, когда $\left|x_{s,\ell,m}-x_{s,n,k}\right|\geq 1$, справедливо равенство $\hat\varphi^{(\ell)}_{s,n,k}\left(x_{s,\ell,m}\right)=0$, так как вне интервала $(-1,1)$ функция $\hat\varphi_{s,n,0}(x)$ обращается в ноль (это следует непосредственно из свойства 1) функции $\mathrm{mup}_s(x)$). Если $\left|x_{s,\ell,m}-x_{s,n,k}\right|<1$, то из леммы 3 следует $\hat\varphi^{(\ell)}_{s,n,k}\left(x_{s,\ell,m}\right)=2^n\cdot(2s)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot\delta^n_\ell\cdot\delta_0^{k\cdot(2s)^{\ell-n}-m}=2^n\times$ $\times(2s)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot\delta^n_\ell\cdot\delta^m_k$. Справедливость равенства (14) для функции $\hat\varphi_{s,n,k}(x)$ установлена.

Далее, по построению $\Delta^2_{\frac{1}{s\cdot(2s)^\ell}}\left(\hat\varphi^{(\ell)}_{s,n,k};x^*_{s,\ell,b}\right)=$

$$=\Delta^2_{\frac{1}{s\cdot(2s)^\ell}}\left(\hat\varphi^{(\ell)}_{s,n,0};x^*_{s,\ell,b}-x_{s,n,k}\right)-\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{2^i\cdot(2s)^{\frac{i(i-1)}{2}}}\times$$

$$\times\sum_{j\in N_{s,i}}\hat\varphi^{(i)}_{s,n,0}\left(x_{s,i,j}-x_{s,n,k}\right)\cdot\Delta^2_{\frac{1}{s\cdot(2s)^\ell}}\left(\hat\varphi^{(\ell)}_{s,i,j};x^*_{s,\ell,b}\right)-$$

$$-\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{2^i\cdot(2s)^{\frac{i(i-1)}{2}}}\cdot\sum_{p\in D_{s,i}}\Delta^2_{\frac{1}{s(2s)^i}}\left(\hat\varphi^{(i)}_{s,n,0};x^*_{s,i,p}-x_{s,n,k}\right)\times$$

$\times\Delta^2_{\frac{1}{s(2s)^\ell}}\left(\hat{\psi}^{(\ell)}_{s,i,p};x^*_{s,\ell,b}\right)$. Из (15) следует, что для любых $i=0,1,...,n-1$ и $j\in N_{s,i}$ справедливо равенство $\Delta^2_{\frac{1}{s(2s)^\ell}}\left(\hat{\varphi}^{(\ell)}_{s,i,j};x^*_{s,\ell,b}\right)=0$. Если $\ell\le n-1$, то с применением (17) получаем $\Delta^2_{\frac{1}{s\cdot(2s)^\ell}}\left(\hat{\varphi}^{(\ell)}_{s,n,k};x^*_{s,\ell,b}\right)=0$. В случае, когда $\ell\ge n$, имеем следующее: $\Delta^2_{\frac{1}{s(2s)^\ell}}\left(\hat{\varphi}^{(\ell)}_{s,n,k};x^*_{s,\ell,b}\right)=\Delta^2_{\frac{1}{s(2s)^\ell}}\left(\varphi^{(\ell)}_{s,n,0};x^*_{s,\ell,b}-x_{s,n,k}\right)$.

Положим $z_0=x^*_{s,\ell,b}-x_{s,n,k}=-1+\frac{b-k\cdot(2s)^{\ell-n+1}}{s\cdot(2s)^\ell}$. Так как $b\ne 0(\mathrm{mod}\ s)$, то при $|z_0|\ge 1$ получаем неравенство $\left|z_0\pm\frac{1}{s\cdot(2s)^\ell}\right|\ge 1$, что влечет за собой $\Delta^2_{\frac{1}{s\cdot(2s)^\ell}}\left(\hat{\varphi}^{(\ell)}_{s,n,0};z_0\right)=0$ (здесь мы использовали то, что вне интервала $(-1,1)$ функция $\hat{\varphi}_{s,n,0}(x)$ равна нулю). Если $|z_0|<1$, то $z_0=x^*_{s,\ell,b-k(2s)^{\ell-n+1}}$, откуда в силу леммы 7 следует справедливость равенства $\Delta^2_{\frac{1}{s(2s)^\ell}}\left(\hat{\varphi}^{(\ell)}_{s,n,0};z_0\right)=0$. Итак, нами установлено, что $\Delta^2_{\frac{1}{s\cdot(2s)^\ell}}\left(\hat{\varphi}^{(\ell)}_{s,n,k};x^*_{s,\ell,b}\right)=0$.

Путем применения аналогичных рассуждений можно доказать, что $\Delta^2_{\frac{1}{s(2s)^\ell}}\left(\hat{\psi}^{(\ell)}_{s,n,a};x^*_{s,\ell,b}\right)=2^n\times$ $\times(2s)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot\delta^\ell_n\cdot\delta^b_a$ и $\hat{\psi}^{(\ell)}_{s,n,a}\left(x_{s,\ell,m}\right)=0$.

Лемма доказана.

Из леммы 9 и теоремы 2 из [6] следует справедливость утверждения теоремы 1.

Согласно теореме 1, функции $\hat{\varphi}_{s,n,k}(x)$ и $\hat{\psi}_{s,n,p}(x)$ являются базисными функциями обобщенного ряда Тейлора для неквазианалитического класса $H_{\rho,s}$, отличающимися от $\varphi_{s,n,k}(x)$ и $\psi_{s,n,p}(x)$ только нормировкой.

Выводы

Итак, нами получены формулы, с помощью которых базисные функции обобщенного ряда Тейлора для неквазианалитического класса $H_{\rho,s}$ можно вычислять с использованием конечных линейных комбинаций сдвигов атомарной функции $\mathrm{mup}_s(x)$ (тот факт, что базисные функции могут быть представлены в виде линейных комбинаций сдвигов $\mathrm{mup}_s(x)$, отмечен в [6] и [14]). Сделаем некоторые замечания относительно коэффициентов соответствующих линейных разложений.

Решая систему линейных алгебраических уравнений (8), получаем следующие формулы для коэффициентов $x_{s,0},x_{s,1},...,x_{s,n},...$: $x_{s,0}=-\frac{\mathrm{mup}_s\left(-1+\frac{1}{2s}\right)}{\mathrm{mup}_s\left(-1+\frac{1}{s}\right)}$,

$$x_{s,1}=-\frac{\mathrm{mup}_s\left(-1+\frac{1}{(2s)^2}\right)+x_{s,0}\cdot\mathrm{mup}_s\left(-1+\frac{1}{s\cdot(2s)}\right)}{\mathrm{mup}_s\left(-1+\frac{1}{s}\right)},...,$$

$$x_{s,n}=-\frac{\mathrm{mup}_s\left(-1+\frac{1}{(2s)^{n+1}}\right)+\sum_{j=1}^{n}x_{s,n-j}\cdot\mathrm{mup}_s\left(-1+\frac{1}{s\cdot(2s)^j}\right)}{\mathrm{mup}_s\left(-1+\frac{1}{s}\right)},....$$

Аналогичные формулы можно получить из (9) для коэффициентов $y_{s,0},y_{s,1},...,y_{s,n},...$.

Из свойств 7) и 8) следует, что значения функции mup_s в точках вида $-1+\frac{1}{(2s)^n}$ и $-1+\frac{1}{s\cdot(2s)^n}$ можно вычислять точно. Более того, используя подход, который применялся при доказательстве свойства 7), можно получить точные формулы для вычисления значений $\mathrm{mup}_s\left(\frac{m}{s\cdot(2s)^n}\right)$ для всех $n=0,1,2,...$ и $m=-s\cdot(2s)^n,...,s\cdot(2s)^n-1,s\cdot(2s)^n$.

Из всего отмеченного выше следует возможность точного вычисления значений базисных функций в точках вида $\frac{m}{s\cdot(2s)^n}$, что делает полученные результаты удобными в применении.

Литература

1. *Albanese A.A. Ultradifferentiable fundamental kernels of linear partial differential operators on non-quasianalytic classes of Roumieu type / A.A. Albanese, J. Bonet // Publ. RIMS, Kyoto univ. – 2007. – 43. – P. 39-54.*
2. *Albanese A.A. Surjective linear partial differential operators with variable coefficients on non-quasianalytic classes of Roumieu type / A.A. Albanese // Hyperbolic problems and regularity questions / Trends in Math. – Basel, 2006. – P. 7-16.*
3. *Begg R. Cell-population growth modeling and nonlocal differential equations: PhD thesis / Ronald Begg; University of Canterbury, 2007. – 211 p.*
4. *Рвачев В.А. Обобщенные ряды Тейлора для бесконечно дифференцируемых функций / В.А. Рвачев // Матем. методы анализа динамических систем. – 1982. – Вып. 6. – С. 99-102.*
5. *Рвачев В.А. Финитные решения функционально-дифференциальных уравнений и их применения / В.А. Рвачев // УМН. – 1990. – Т. 45, вып. 1 (271). – С. 77-103.*

6. Рвачев В.А. Некоторые атомарные функции и их применение / В.А. Рвачев, Г.А. Старец // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1983. – №11. – С. 22-24.

7. Старец Г.А. Сходимость обобщенных рядов Тейлора для класса $H_\rho(m)$ */ Г.А. Старец // Матем. методы анализа динамических систем. – 1985. – Вып. 9. – С. 37-39.*

8. Кузниченко В.М. Обобщенные ряды Тейлора для класса функций $H(\overline{\rho},\overline{m},r)$ */ В.М. Кузниченко // Матем. заметки. – 1989. – Т. 46, № 4. – С. 120-122.*

9. Томилова Е.П. Применение обобщенных рядов Тейлора для решения некоторых дифференциально-функциональных уравнений / Е.П. Томилова // Матем. методы анализа динамических систем. – 1984. – Вып. 8. – С. 33-35.

10. Малицкий И.И. Применение обобщенных рядов Тейлора в теории дифференциально-функциональных уравнений с отклоняющимся аргументом / И.И. Малицкий // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1985. – №10. – С. 17-18.

11. Сидоренко І.І. Про атомарні функції $up_m(x)$ */ І.І. Сидоренко, Г.О. Старец // Системи управління, навігації та зв'язку. – 2008. – Вип. 2(6). – С. 175-177.*

12. Линник Ю.В. Разложения случайных величин / Ю.В. Линник, И.В. Островский. – М.: Наука, 1972. – 480 с.

13. Рвачев В.А. Неклассические методы теории приближений в краевых задачах / В.А. Рвачев, В.Л. Рвачев. – К.: Наукова думка, 1979. – 196 с.

14. Старец Г.А. Построение базисных функций для обобщенных рядов Тейлора / Г.А. Старец // Матем. методы анализа динамических систем. – 1 984. – Вып. 8. – С. 16-19.

Поступила в редакцию 10.09.2010

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой высшей математики А.Г. Николаев, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков.

ПРО БАЗИСНІ ФУНКЦІЇ УЗАГАЛЬНЕНОГО РЯДУ ТЕЙЛОРА

В.О. Макарічев

Розглянуто узагальнені ряди Тейлора для деяких неквазіаналітичних класів нескінченно диференційованих функцій, що зустрічаються в теорії рівнянь із частинними похідними та математичній біології при дослідженні динаміки клітинних популяцій. Відмічена можливість застосування узагальнених рядів Тейлора для наближеного обчислення функцій, що є функціями верхньої границі інтеграла. Отримано формули для обчислення базисних функцій із використанням скінчених лінійних комбінацій зсувів атомарної функції $mup_s(x)$. Доведено, що коефіцієнти відповідних лінійних розкладів є раціональними та можуть бути знайдені точно. Наведено доведення деяких властивостей функції $mup_s(x)$. Досліджено властивості зсувів функції $mup_s(x)$.

Ключові слова: узагальнені ряди Тейлора, атомарна функція, неквазіаналітичний клас функцій, фінітна функція, базисні функції, нескінченно диференційована функція, функціонально-диференціальне рівняння.

ON BASIC FUNCTIONS OF GENERALIZED TAYLOR SERIES

V.A. Makarichev

Generalized Taylor series for some nonquasianalytic classes of infinitely differentiable functions are considered. Functions of these classes are used in the theory of partial differential equations and in mathematical biology (cell-population growth modeling). It is noted that generalized Taylor series can be used for approximation of functions which argument is an upper bound of the integral. Formulas for calculation of values of basic functions using finite linear combinations of the atomic function $mup_s(x)$ shifts are obtained. It is proved that coefficients of these linear combinations are rational and can be calculated exactly. Some properties of the function $mup_s(x)$ are proved. Some properties of shifts of the function $mup_s(x)$ are investigated.

Key words: generalized Taylor series, atomic function, nonquasianalytic function class, function with compact support, basic functions, infinitely differentiable function, functional differential equation.

Макаричев Виктор Александрович – аспирант кафедры высшей математики Национального аэрокосмического университета им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина, e-mail: victor.makarichev@gmail.com.