УДК 519.718

**А.М. РОМАНКЕВИЧ, И.В. МАЙДАНЮК, Е.Р. ПОТАПОВА**

***Национальный технический университет Украины «КПИ», Украина***

# О СЛОЖНОСТИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ *GL*-МОДЕЛЕЙ НА РАННИХ ЭТАПАХ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ОТКАЗОУСТОЙЧИВЫХ МНОГОПРОЦЕССОРНЫХ СИСТЕМ

*Работа посвящена вопросам оценки сложности графо-логических моделей (GL-моделей) поведения отказоустойчивых многопроцессорных системы (ОМС) в потоке отказов. Формулируется и доказывается ряд утверждений, которые помогают разработчикам ОМС оценить на этапе проектирования сложность преобразования GL-модели циклического типа, проводимого путём добавления дополнительных ребер и, тем самым, сделать обоснованный выбор типа базовой GL-модели. Для доказательства утверждений используется математический аппарат теории графов.*

***Ключевые слова:*** *отказоустойчивые многомодульные системы, графо-логические модели, раскраска графа, элементарный цикл.*

## Введение

В наше время широкое распространение получили отказоустойчивые реконфигурируемые многопроцессорные системы, основным достоинством которых является высокая надёжность. Такая система продолжает функционировать при отказе одного множества модулей и теряет работоспособность при отказе другого, причем эти множества могут пересекаться. Однако, в некоторых случаях, можно сравнительно просто описать логику отказоустойчивости системы, например в работах [1] рассматриваются k-out-of-n системы, в [2] последовательные k-out-of-n системы, но в общем случае это сделать достаточно сложно.

Для решения задачи отображения реакции ОМС на отказы своих модулей используются различные математические модели. К таким моделям относится и рассматриваемая в данной работе GL-модель [3].

GL-модель представляет собой неориентированный циклический граф, ребрам которого приписаны определенные булевы функции, аргументами которых являются двоичные индикаторные переменные $x_i$ (i=1,2,…,n), отображающие работоспособность соответствующего компонента системы (“0” – отказ, “1” – исправен). Последовательность значений переменных назовем вектором состояния системы. Если функция, приписываемая тому или иному ребру, принимает нулевое значение, то это ребро исключается из графа модели. Связность графа соответствует работоспособности системы в целом. ОМС, состоящую из n модулей и сохраняющую работоспособность при отказе не более чем m ее компонентов, будем называть базовой и обозначать как K(m,n).

На этапе проектирования ОМС, кроме обеспечения выполнения заданных функций, разработчик должен выдержать требования по надежности проектируемой системы. Понятно, что чем сложнее система, тем сложнее ее модель, что в свою очередь приводит к большим временным и ресурсным затратам для расчета значений показателей надежности. Более того, перед проектировщиком может стоять ряд других задач, решение которых весьма не тривиально. В связи с этим важна проблема выбора GL-модели, наиболее приспособленной к решению поставленных задач. В частности, данная работа дает возможность оценить сложность GL-модели, теряющей минимальное количество ребер при появлении вектора с m+1 нулем [3]. Далее для простоты будем называть такую модель минимизированной GL-моделью.

## Блокирование множества векторов

Практический интерес вызывают модели для так называемых небазовых ОМС, то есть таких ОМС, поведение которых отличается от поведение базовых. Модели для небазовых ОМС могут быть построены путем преобразования базовых моделей (см. [4]). Один из способов такого преобразования – введение дополнительных ребер со своими функциями, которые блокируют потерю связности графа GL-модели при появлении соответствующих векторов состояния системы. Мы будем рассматривать случай повышения отказоустойчивости и определим $W=\{w_1,w_2,w_3,...,w_z\}$ как множество определенных векторов состояния системы, вес которых равен n-(m+1) и при появлении которых система сохраняет работоспособность.

Понятно, что для блокирования потери связности графа модели при появлении одного из таких векторов (далее для простоты будем в таких случаях употреблять термин «блокирование вектора»), вызывающего пропадание в модели только двух ребер, достаточно проведение одного дополнительного ребра со своей функцией, которая формируется в соответствии с [4]. Если же возникает необходимость блокирования некоторого множества векторов, то во многих случаях также достаточно одного дополнительного ребра (напомним, что ребра в модели можно переставлять как угодно). Однако так бывает не всегда, в частности, тогда, когда некоторые векторы состояния образуют так называемые «попарные реберные циклы» (ПРЦ) [5] или более сложные конструкции.

Сделаем ряд предварительных определений. Обозначим множество ребер базовой модели как A. При появлении $w_i \in W$, как показано в [3], из графа модели исключаются два ребра. Множество таких пар ребер обозначим через L, а его мощность – через l. Здесь заметим, что одному и тому же элементу из L может соответствовать множество различных векторов из W. Исходя из вышеизложенного, введение дополнительных ребер для сохранения связности графа при исчезновении пар ребер из множества L будем называть «блокированием множества L», или просто блокированием.

В [4] решается задача блокирования и приводится алгоритм, согласно которому количество и размещение дополнительных ребер определяется разбиением множества ребер модели на S-подмножества: в одном S-подмножестве присутствуют только такие ребра, выборка по два которых из этого S-подмножества не совпадает ни с одним элементом из множества L. Определим через p количество S-подмножеств.

Также вслед за [4] используем понятие V-графа. V-графом называется неограф, в котором вершины соответствуют элементам множества A, а ребра проводятся в соответствии с элементами множества L. Оптимальная раскраска вершин V-графа определяет разбиение множества A на S-подмножества, причем ребра (вершины V-графа), имеющие один цвет, входят в одно S-подмножество. Заметим, что p также является хроматическим числом V-графа, и для блокирования заданного множества L достаточно и необходимо ]p/2[ дополнительных ребер, где ]x[ - округление до ближайшего большего целого [4].

Напомним, что пары ребер (элементы) из множества L могут образовывать различные структуры, примером этому служат попарные реберные циклы. Вопрос блокирования ПРЦ для моделей, построенных на базе моделей K(3,n), рассмотрен в [5]. С учетом приведенных выше определений ПРЦ можно представить как совокупность элементов из A, которые в V-графе образуют элементарный цикл – последовательность, состоящую из попарно различных вершин, кроме последней, которая совпадает с первой вершиной в последовательности. Поскольку в V-графе нет кратных ребер то, в общем случае ПРЦ может содержать 3 и более вершин. Далее, если это не будет оговорено отдельно, употребляя слово «цикл» будем иметь ввиду элементарный цикл.

Обозначим через Q множество всех ПРЦ модели. Каждый элемент этого множества представляет собой последовательность ребер, образующих цикл: $q_i=a_s a_j \ldots a_k$, где $a_s, a_j, \ldots, a_k \in A$, причем последнее ребро, совпадающее с первым, в эту последовательность не включается. Также определим множество μ как множество ребер либо одного цикла, либо множества циклов: $\mu(q_i)=\{a|\ a \in q_i,\ q_i \in Q\}$, либо $\mu(Q)= \bigcup_{\forall q_i \in Q} \mu(q_i)$.

## Сложность модели

Преобразование модели путем введения дополнительных ребер увеличивает сложность модели и усложняет процедуру определения связности графа. Поэтому при выборе той или иной модели поведения для проектируемой системы одним из критериев становится наличие ПРЦ, их количество и длина. Приведенные ниже утверждения позволяют оценить сложность модели после преобразования.

Обозначим V'-граф, как подграф V-графа, множество вершин которого образуется на базе μ(Q'), где Q' – некое подмножество множества Q, p' – хроматическое число V'. В каждом из последующих утверждений подмножество Q' будет определяться отдельно, причем в утверждениях 1 – 6 на Q' накладывается дополнительное ограничение: $\mu(q_i) \not\subset \mu(Q')$ $\forall\ q_i \in Q \backslash Q'$.

Рассмотрим случай $Q' \subseteq Q$.

Пусть $q_{max} = \max(|q_i|)\ \forall\ q_i \in Q'$.

Утверждение 1: Для блокирования Q' достаточно $]q_{max}/2[$ дополнительных ребер.

Доказательство. Как было сказано, ПРЦ представляет собой элементарный цикл в V-графе. Если в V'-графе выделить цикл наибольшей длины, то понятно, что хроматическое число будет не больше, чем количество вершин этого цикла. Отметим, что эти величины достигают равенства, если V'-граф полный. Другими словами $p' \leq q_{max}$, и, следовательно, достаточно $]q_{max}/2[$ дополнительных ребер для блокирования всего заданного подмножества ПРЦ. Утверждение доказано.

Рассмотрим $\varnothing \subset Q' \subseteq Q$, пусть Q' содержит ПРЦ только четной длины.

Утверждение 2: Для блокирования Q' необходимо и достаточно одного дополнительного ребра.

Данное утверждение, если перейти к V'-графу, является следствием теоремы Кёнига о 2-раскрашиваемости графа: «Граф является двудольным тогда и только тогда, когда в нем нет простых циклов нечетной длины». Другими словами: граф можно раскрасить двумя цветами, если все циклы четные (рис. 2, а). Следовательно, достаточно только одного дополнительного ребра для блокирования всего Q'. С другой стороны, поскольку Q' – не пустое значит, одно дополнительное ребро необходимо. Утверждение доказано.

Рассмотрим $\varnothing \subset Q' \subseteq Q$, причём пусть Q' содержит ПРЦ только нечетной длины.

Утверждение 3: Для блокирования Q' достаточно двух дополнительных рёбер.

Приведем почти очевидное доказательство. Покажем, что простой граф, содержащий циклы только нечетной длины, есть 3-раскрашиваемый. Для такого графа пересечение двух циклов содержит не более одной вершины, иначе можно было бы выделить цикл четной длины. Поскольку каждый цикл в отдельности можно раскрасить тремя цветами, то, очевидно, что и граф такой структуры можно раскрасить в три цвета (рис. 1, б).

V'-граф с такой структурой имеет p'=3. Следовательно, достаточно ]3/2[=2 ребра для блокирования Q'. Утверждение доказано.

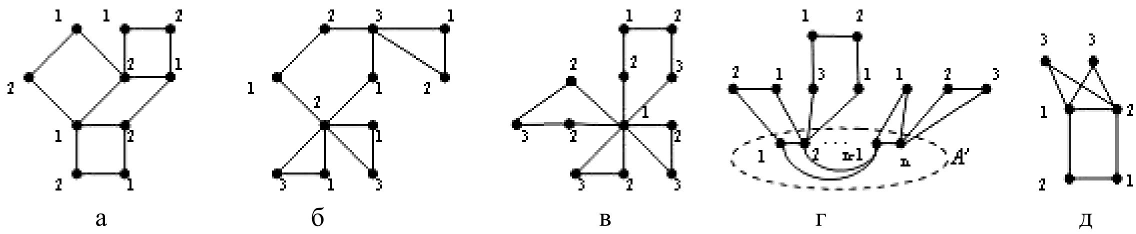


Рис. 1. Раскраска V-графа

Пусть существует только одно ребро $a_x = \cup(\mu(q_i) \cap \mu(q_j))$ для $\forall\ q_i,q_j \in Q'$, $i \neq j$, $Q' \subseteq Q$, т.е. есть только одно и тоже общее ребро $a_x$ для всех ПРЦ.

Утверждение 4: Для блокирования Q' достаточно одного дополнительного ребра, если все циклы четной длины, и два ребра, если есть хотя бы один цикл нечетной длины.

Доказательство. Это утверждение для V′-графа означает, что существует только одна вершина, которая принадлежит всем циклам. Больше общих вершин у любых пар циклов нет. Следовательно, для раскраски графа не понадобится цветов больше, чем для раскраски каждого цикла в отдельности. Если все циклы четной длины, то достаточно 2 цвета, если есть хоть один цикл нечетной, необходимо и достаточно 3 цвета (рис. 1, в), что и определяет достаточное количество дополнительных ребер для блокирования Q'.

Пусть задано такое $A' \subseteq A$ и $|A'| \geq 3$, что для $\forall\ q_i,q_i \in Q'$, $i \neq j$, $Q' \subseteq Q$, выполняется $A' \supseteq \mu(q_i) \cap \mu(q_i)$.

Утверждение 5: Для блокирования Q' достаточно ]|A'|/2[ дополнительных ребер.

Доказательство. Утверждение можно переформулировать: если попарное пересечение всех циклов входит в некое подмножество A' вершин V'-графа, то хроматическое число не больше, чем мощность множества A', при условии, что мощность этого множества не менее 3. Попарное пересечение всех циклов входит в одно множество и на раскраску этого множества понадобится цветов не больше чем его мощность, а для раскраски остальных вершин очевидно понадобится не большее количество цветов (рис. 1, г). Следовательно, количество дополнительных ребер для блокирования Q' не превышает величины ]|A'|/2[. Утверждение доказано.

Пусть существует только одна пара рёбер $\{a_x,a_y\} = \cup(\mu(q_i) \cap \mu(q_i))$ для $\forall\ q_i,q_i \in Q'$, $i \neq j$, $Q' \subseteq Q$.

Утверждение 6: Для блокирования Q' достаточно двух рёбер, если есть хотя бы один цикл нечетной длины.

Доказательство этого утверждения сходно с доказательством утверждения 4. Понятно, что при сформулированных условиях на раскраску всего V′-графа не понадобится цветов больше, чем для раскраски каждого цикла в отдельности, т.е. не больше, чем три цвета (рис. 1, д), что и определяет достаточное количество дополнительных ребер для блокирования Q', равное двум. Утверждение доказано.

## Заключение

В работе проанализированы особенности циклической GL-модели ОМС, теряющей минимальное количество ребер при появлении вектора состоянии системы с m+1 нулем. Сформулирован и доказан ряд утверждений, результаты которых позволяют выбрать GL-модель, чья сложность после преобразования (проведение внутренних рёбер) позволит провести большее количество статистических экспериментов за заданное время и, тем самым, получить более точную оценку надёжности ОМС.

## Литература

*1. Behr A. Two Formulas for Computing the Reliability of Incomplete k-out-of-n:G Systems / A. Behr, L. Camarinopoulos // IEEE Transactions on Reliability. - 1997. – Vol. 46, №3. –P. 421-428.*

*2. Gera A.E. Combined k-out-of-n:G, and Consecutive $k_c$-out-of-n:G systems / A.E. Gera // IEEE Transactions on Reliabilityю - 2004. – Vol. R–53. – P. 523-531.*

*3. Романкевич В.А. GL-модель поведения отказоустойчивых многопроцессорных систем с минимальным числом теряемых рёбер / В.А. Романкевич, Е.Р. Потапова, Хедаятоллах Бахтари, В.В. Назаренко // Вісник НТУУ “КПІ”.– Інформатика, управління та ОТ. – 2006. – №45. – С. 93-100.*

*4. Романкевич А.М. Анализ отказоустойчивых многомодульных систем со сложным распределением отказов на основе циклических GL-моделей / А.М. Романкевич, В.В. Иванов, В.А Романкевич // Электронное моделирование. - 2004. – №5. – С. 67- 81.*

*5. Романкевич В.А. Условие существования попарных реберных циклов в GL-моделях K(3,n) / В.А. Романкевич, А.А. Кононова, Хедаятоллах Бахтари // Вісник НТУУ “КПІ” Інформатика, управління та обчислювальна техніка. – 2007. – №46. – С. 54-61.*

*Поступила в редакцию 30.01.2009*

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. кафедры специализированных компьютерных систем В.В. Гроль, Национальный технический университет "КПИ", Киев, Украина.

### ПРО СКЛАДНІСТЬ ПЕРЕТВОРЕННЯ *GL*-МОДЕЛЕЙ НА РАННІХ ЕТАПАХ ПРОЕКТУВАННЯ ВІДМОВОСТІЙКИХ БАГАТОПРОЦЕСОРНИХ СИСТЕМ

***О.М. Романкевич, І.В. Майданюк, К.Р. Потапова***

Робота присвячена питанням оцінки складності графо-логічних моделей (*GL*-моделей) поведінки відмовостійких багатопроцесорних систем (ВБС) у потоці відмов. Формулюється й доводиться ряд тверджень, які допомагають розробникам ВБС оцінити на етапі проектування складність перетворення *GL*-моделі циклічного типу, яке проводиться шляхом проведення додаткових ребер і, тим самим, зробити обґрунтований вибір типу базової *GL*-моделі. Для доведення тверджень використається математичний апарат теорії графів.

**Ключові слова:** відмовостійкі багатомодульні системи, графо-логічні моделі, розфарбування графа, елементарний цикл.

### ABOUT THE *GL*-MODELS TRANSFORMATION COMPLEXITY ON THE BEGINNING OF FAULT-TOLERANT MULTIPROCESSOR SYSTEMS DESIGN

***A.M. Romankevich, I.V. Maidanyuk, E.R. Potapova***

The work is dedicated to the subject of evaluations of graph-logical models (*GL*-models) complexity, behavior of fault-tolerant multiprocessor systems (FMS) in the faults thread. Sequence of statements are formulated and established, that help developers of FMS to evaluate the complexity of transformation of *GL*-model of cyclic type on the design stage, carried out by adding extra ribs and, thereby, to make justified choice of base *GL*-model type. For evidence of statements graph theory mathematical tool is used.

**Key words:** Fault-tolerant multimodule systems, graph-logical models, graph coloration, elementary cycle.

**Романкевич Алексей Михайлович** – д-р техн. наук, проф., проф. кафедры специализированных компьютерных систем Национального технического университета "КПИ", Киев, Украина, e-mail: romankev@scs.ntu-kpi.kiev.ua.

**Майданюк Иван Викторович** – аспирант кафедры специализированных компьютерных систем Национального технического университета "КПИ", Киев, Украина, e-mail: maidanyuk_vanya@ukr.net.

**Потапова Екатерина Романовна** – канд. техн. наук, старший преподаватель кафедры специализированных компьютерных систем Национального технического университета "КПИ", Киев, Украина, e-mail: romankev@scs.ntu-kpi.kiev.ua.