УДК 519.873

С.М. БАБИЙ[1], Л.А. МИНЯЙЛЕНКО[2], МОХАММЕД САИД ГАЗАЛ[1]

[1]***Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Украина***
[2]***Национальный технический университет «ХПИ», Украина***

АЛГОРИТМ МОДЕЛИРОВАНИЯ УПРАВЛЯЕМОЙ МАРКОВСКОЙ ЦЕПИ

Рассматривается алгоритм моделирования марковской цепи с управляемыми вероятностями состояний и числом состояний. На примере показаны возможности алгоритма. Предлагается использование алгоритма для прогнозирования надежности цифровых устройств методом Монте-Карло. С этой целью используется понятие эквивалентности вероятностного автомата детерминированному, которая является мерой надежности.

Ключевые слова: *матрица смены состояний, псевдослучайные числа, функции алгоритма.*

Введение

В задачах имитационного моделирования методом Монте-Карло экспериментатор стремится наиболее полно учесть влияние внешней среды и внутренних дестабилизирующих факторов на качество функционирования системы. Как правило, это влияние носит случайный фактор. При этом следует учитывать, что степень случайности влияния того или иного фактора на процесс функционирования является важной информационной мерой, знание и учет которой приближают условия моделирования к условиям эксплуатации. Одной из возможностей управления характером и степенью случайности внешних (внутренних) факторов влияющих на работу системы, является использование марковских моделей случайных воздействий, допускающих управление параметрами цепи:

- числом и типом возможных состояний (регулярные, невозвратные, периодические, поглощающие);
- вероятностями смены состояний;
- степенью «марковости» (глубина памяти);

В данной работе под «управляемой» понимается марковская цепь, задаваемая матрицей вероятностей смены состояний размерности $m \times m$, допускающая назначение требуемых вероятностей переходов в интервале $0 \le \rho_{ij} \le 1$ и вариацию числа состояний m.

1.Функции алгоритма

Результатом выполнения алгоритма должна явиться случайная последовательность состояний системы (например, в виде ВАССАВСВ ля 3-х состояний), смена которых осуществляется согласно заданной матрице вероятностей переходов на одном такте:

$$P_T(1) = \left\| \rho_{ij} \right\|, \quad i, j = 1, 2, 3$$

Так как случайная последовательность является конечной, то алгоритм ее реализации дает экспериментальные оценки вероятностей переходов ρ_{ij} в виде относительных частот переходов, а совокупность этих частот, размещенная в определенном порядке, дает экспериментальную матрицу частот переходов:

$$P_{\acute{Y}}(1) = \left\| \rho_{ij} \right\|, \quad j=1,2\ldots m.$$

По степени близости матриц друг другу

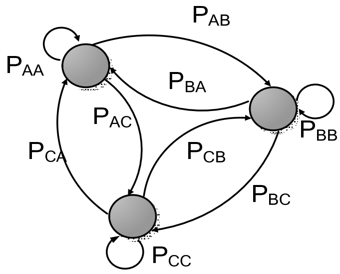
$$\left| P_T(1) - P_{\acute{Y}}(1) \right| \le \varepsilon .$$

можно оценить пригодность и эффективность алгоритма моделирования. Основными операциями (шагами) алгоритма являются: организация смены состояний с заданными вероятностями переходов ρ_{ij}; накопления числа переходов u_{ij} и расчет относительных частот смены состояний ρ_{ij} ; оценка степени близости экспериментальной матрицы переходов к теоретической по критерию согласия χ^2.

Поясним операции алгоритма на примере реализации стохастической матрицы 3×3 (рис. 1, а). Учитывая тот факт, что каждая строка матрицы соответствует своему i-му состоянию, которое процесс покидает в момент времени t, а каждый столбец ставится в соответствии состоянию j, куда процесс приходит в момент времени $t+1$, для организации переходов достаточно построить полно связный ориентированный граф, реализующий команды смены состояний.

$$P_T(1) = \begin{array}{c|ccc} t \backslash t+1 & A & B & C \\ \hline A & 0.2; & 0.5; & 0.3; \\ B & 0.4; & 0.2; & 0.4; \\ C & 0.6; & 0.3; & 0.1; \end{array}$$

а



б

Рис. 1. Переходы на одном такте: а – матрица; б - граф управления сменой состояния

Итак, логика смены состояний, задаваемая матрицей, тривиальна и реализуется командным графом (рис 1, б). Ключевым является вопрос обеспечения заданных вероятностей ρ_{ij} смены состояний. Для его решения конкретизируем понятие состояния. Под состоянием в счетный момент времени t будем понимать множество случайных чисел RANDOM замкнутого интервала $0 \le R_{ij} \le 1$, определенным способом разделенное на ℓ подмножеств, мощность каждого из которых пропорциональна соответствующей заданной вероятности перехода ρ_{ij}.

2. Назначение границ подмножеств для чисел RANDOM и их случайный розыгрыш

Необходимость такого назначения вызвана тем, что в распоряжении экспериментатора находится единственный источник псевдослучайной последовательности (функция RANDOM), реализующий массив чисел, равномерно распределенных в интервале $0 \le R_i \le 1$. С помощью этого источника необходимо создавать в последовательные такты времени m различных дискретных распределений, каждое из которых является соответствующей строкой условных вероятностей переходов. С этой целью каждую строку вероятностей переходов можно создавать назначением m-1 границ, разделяющих интервал возможных чисел [0,1] на m подмножеств. Каждое подмножество задается парой неравенств, которым должна удовлетворять требуемая частота смены состояний $\overline{\rho_{ij}}$, расположив элементы которой в соответствии с элементами вероятностей переходов ρ_{ij} теоретической (заданной) матрицы, приведенной выше, получим контрольную матрицу граничных условий, которой должна удовлетворять экспериментальная матрица:

$$P_K(1) = \begin{array}{c|ccc} t \backslash t+1 & A & B & C \\ \hline A & 0 \le P_{AA} < 0.2; & 0.2 \le P_{AB} < 0.7; & 0.7 \le P_{AC} \le 1; \\ B & 0 \le P_{BA} < 0.4; & 0.4 \le P_{BB} < 0.6; & 0.6 \le P_{CB} \le 1; \\ C & 0 \le P_{CA} < 0.6; & 0.6 \le P_{CB} < 0.9; & 0.9 \le P\ _{C} \le 1; \end{array}$$

Рис. 2. Контрольная матрица

Отметим важную особенность матрицы граничных условий, позволяющую контролировать правильность выполнения алгоритма в процессе его выполнения. Так как пара неравенств связывает значение относительной частоты $\overline{\rho_{ij}}$ с заданной вероятностью ρ_{ij}, то выполнение этой пары неравенств для появившегося числа R_i является индикатором правильного перехода из одного состояния в другое.

Справедливость использования индикатора в таком виде доказывается известной теоремой [2] формулируемой следующим образом.

Если (ℓ, m) – любой промежуток из отрезка [0,1], на котором равномерно распределена случайная последовательность чисел $0 \le x_i \le 1$ и $\gamma_n = \gamma_n(\ell, m)$ – число элементов конечной под- последовательности $x_1, x_2 ... x_n$, принадлежащих промежутку (ℓ, m), то для равномерно распределенной последовательности $\{x_n\}$ имеет место предельное соотношение

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\gamma_n(\ell, m)}{n} = \ell - m \text{ ; т.е.}$$

предельная относительная частота $\overline{\rho_{ij}}$ равномерно распределенной на [0;1] последовательности $\{x_n\}$ для каждого частичного промежутка (ℓ, m) равна длине этого промежутка.

3. Получение статистических оценок

Для получения относительных частот $\overline{\rho_{ij}}$ смены состояний с целью сравнения с теоретическими значениями ρ_{ij} алгоритм выполняет статическую обработку полученной последовательности ACACABABACABC…. (рис. 2). Обработка выполняется на объеме наблюдений N в следующем порядке: [1]

– подсчитывается числа пребывания процесса в каждом из состояний n_i, i=1,2,3, и выполняется проверка равенства:

$$N = \sum_{i=1}^{3} n_i \text{ ;}$$

– подсчитывается для всех i число переходов n_i из i-го состояния в каждое j-е, при этом:

$$\sum_{j=1}^{3} n_{ij} = n_i \text{ ;}$$

и вычисляются относительные частоты:

$$\overline{\rho_{ij}} = n_{ij} / n_i \text{ ;}$$

– вычисляются абсолютные частоты пребывания процесса в i-м состоянии

$$\overline{\rho_{ij}} = n_i / N \text{ .}$$

Следующим шагом алгоритма является вычисление меры близости и найденной экспериментальной матрицы $\overline{P_Y}(1)$ к теоретической $\overline{P_O}(1)$.

Используется критерий согласия Пирсона:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{3} \sum_{J=1}^{3} n_i \frac{(\overline{\rho_{ij}} - \rho_{ij})}{P_{ij}} = 7.756$$

Численное значение χ^2 получено для исходных данных, приведенных на рис. 3. В выражении для χ^2 $\overline{P_{ij}}$ и P_{ij} – элементы экспериментальной и теоретической матрицы соответственно, а n_1=N_A=390; n_2=N_B=358; n_3=N_C=252 - числа пребывания процесса в каждом из состояний (рис. 3).

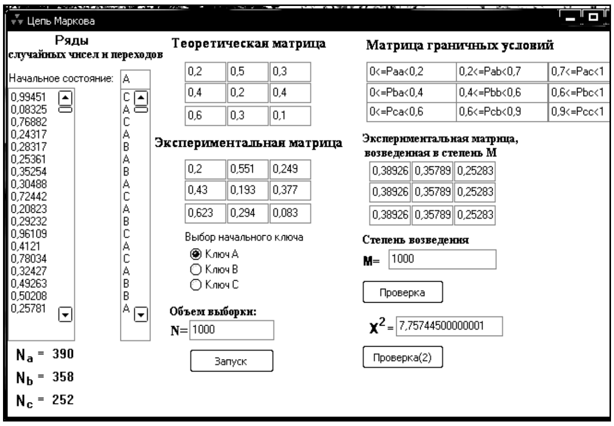


Рис. 3. Информационное окно программы

Так как матрица $P_{Ý}(1)$ содержит единственное эргодическое множество и является неразложимой, ее строки смены состояний через множество шагов M (в окне степень матрицы M = 1000) становятся одинаковыми, т.е частоты пребывания процесса в каждом из состояний не зависят от исходного состояния (рис. 3).

4. Программная реализация алгоритма

Для запуска и управления работой программы «Цепь Маркова» используется окно (рис 3), с помощью которого выполняются следующие функции: задание и визуализация теоретической матрицы смены состояний $P_{Ò}(1)$ за один такт; ввод и визуализация объема выборки N; регистрация и визуализация экспериментальной матрицы смена состояний $P_{Ý}(1)$ за один такт; регистрация последовательности смены состояний цепи в порядке их появления: ABA CBB…; визуализация случайных чисел, генерируемых функцией RANDOM; получение и визуализация экспериментальной матрицы смены состояний за M тактов; оценка степени близости экспериментальной матрицы к теоретической с помощью критерия Пирсона χ^2.

Для оперативного контроля правильности работы программы в окне выводится два столбца данных: столбец случайных чисел RANDOM и соответствующий ему столбец состояний ACA… (рис. 3).

Поясним, какую информацию доставляет каждый столбец. Процесс начинается с начального состояния A, и на первом шаге t=1 реализуется случайный розыгрыш смены состояния A, задаваемого первой строкой матрицы граничных условий $P_{Ê}(1)$. Появившееся первое число 0,99451 есть индикатор перехода из A в состояние C. Этот факт подтверждается выполнением условия:

$$0,7 \le P_{AC} \le 1 .$$

задаваемого матрицей граничных условий (верхний правый угол окна).

5. Возможный вариант использования алгоритма

Стохастическая матрица, реализуемая с помощью рассмотренного алгоритма, является удобной моделью автономного вероятностного автомата (ВА) и может быть использована для изучения надежностных свойств детерминированных конечных автоматов (ДА). Простыми примерами ДА являются триггеры, счётчики, регистры, смена состояний в которых задается булевыми матрицами. Например, автоматы ДА и ВА с двумя состояниями задаются следующими матрицами переходов:

$$P_{DA}(1) = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}; \quad P_{BA}(1) = \begin{Vmatrix} \delta & 1-\delta \\ 1-\delta & \delta \end{Vmatrix}. \qquad (1)$$

Как видно, ВА допускает возможность неверного перехода с вероятностью δ.

С целью исследования поведения обоих автоматов во времени возведем обе матрицы в степень t.

Если P^{t}_{BA} – матрица переходных вероятностей на t-м шаге работы автомата, то для марковской цепи можно записать:

$$P^{t+1}_{BA} = P^{t}_{BA} \times P_{BA}(1) \qquad (2)$$

Выражение (2) в развернутой форме имеет вид

$$\begin{Vmatrix} \rho^{t+1}_{11} & \rho^{t+1}_{12} \\ \rho^{t+1}_{21} & \rho^{t+1}_{22} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \rho^{t}_{11} & \rho^{t}_{12} \\ \rho^{t}_{21} & \rho^{t}_{22} \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} \delta & 1-\delta \\ 1-\delta & \delta \end{Vmatrix}$$

Используя замену $\rho^{t}_{21} = 1-\rho^{t}_{11}$ и выполнив умножение, получим:

$$P^{t+1}_{BA} = \begin{Vmatrix} 1-\delta+(2\delta-1)\rho^{t}_{11}; & 1-\delta+(2\delta-1)\rho^{t}_{12}; \\ 1-\delta+(2\delta-1)\rho^{t}_{21}; & 1-\delta+(2\delta-1)\rho^{t}_{22}; \end{Vmatrix}$$

Для элементов матрицы, получающихся при изменении t, можно записать рекуррентное выражение:

$$\rho^{t+1}_{ij} = 1-\delta+(2\delta-1)\rho^{t}_{ij},$$

из которого следует:

$$\rho^{t+1}_{ij} = c + cq + cq^{2} + ... + cq^{t-1} + q^{t}\rho_{ij},$$

где $c = 1-\delta$; $q = 2\delta-1$

Выполняя суммирование методом геометрической прогрессии, получим:

$$\rho^{t+1}_{ij} = \left(1-(2\delta-1)^{t}\right)\Big/2 + (2\delta-1)^{t}\rho_{ij}. \qquad (3)$$

Подставляя в выражение (3) значения ρ_{ij} матрицы P_{BA} из (1) и выполняя необходимые преобразования, получим матрицу переходов ρ^{t+1}_{BA} вероятностного автомата за t+1 тактов (4):

$$P^{t+1}_{BA} = \begin{Vmatrix} \dfrac{1+(2\delta-1)^{t+1}}{2}; & \dfrac{1-(2\delta-1)^{t+1}}{2}; \\ \dfrac{1-(2\delta-1)^{t+1}}{2}; & \dfrac{1+(2\delta-1)^{t+1}}{2}; \end{Vmatrix}. \qquad (4)$$

Для детерминированного автомата при $\delta = 0$:

$$P_{DA}^{t+1}=\left\|\begin{matrix}\frac{1+(-1)^{t+1}}{2}; & \frac{1-(-1)^{t+1}}{2};\\ \frac{1-(-1)^{t+1}}{2}; & \frac{1+(-1)^{t+1}}{2};\end{matrix}\right\|. \qquad (5)$$

Из анализа матрицы (4) видно, что с ростом t вероятности неправильных переходов растут и сходятся к финальным вероятностям равным 0.5. Для обеспечения заданного уровня близости матриц необходимо потребовать выполнения следующих неравенств: для четных t – $0.5\cdot[1+(2\cdot\delta-1)^{t+1}]\le\varepsilon$; для нечетных t – $0.5\cdot[1-(2\cdot\delta-1)^{t+1}]\le\varepsilon$. Объединяя их, получим:

$$1-(1-2\cdot\delta)^{t+1}\le 2\cdot\varepsilon,$$

откуда $$\delta\le 0,5\cdot\left[1-(1-2\cdot\varepsilon)^{1/(t+1)}\right],$$

где $\varepsilon=1-\mu$; а величина μ – есть мера эквивалентности вероятностного автомата детерминированному автомату, которою также называют уровнем надежности вероятностного автомата на интервале времени t+1 тактов его работы. [4].

Задача синтеза автомата может быть сформулирована следующим образом: синтезировать вероятностный автомат, выбрав элементы из условия минимизации стоимости автомата и обеспечив заданное значение уровня надежности μ.

Выводы

Сложность алгоритма определяется числом возможных состояний цепи m. При линейном нарастании числа состояний m число разыгрываемых относительных частот перехода $\overline{\rho_{ij}}$ растет по квадратичной зависимости. При этом интервалы для $\overline{\rho_{ij}}$, задаваемые неравенствами матрицы $P_K(1)$ граничных условий, уменьшаются. Поэтому для сохранения достоверности оценок $\overline{\rho_{ij}}$ объем выборки N при моделировании следует увеличивать.

Пример работы алгоритма приведен для неразложимой регулярной марковской цепи, содержащей единственное эргодическое множество. Для реализации более сложных цепей, допускающих разложение множества состояний на эквивалентные подмножества, алгоритм можно применять поочередно к каждому подмножеству, задаваемому своей контрольной матрицей граничных условий.

Литература

1. *Венцель Е.С. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения / Е.С. Вентцель. - М.: Наука. - 1991.*
2. *Демидович Б.П. Основы вычислительной математики. / Б.П. Демидович, И.А Марон. - М.: Наука,1970. - 658 с.*
3. *Машиностроение. Энциклопедия. Математика. Т I-1 / Под ред. У.Г. Пирумова, В.С Зарубина. - М.: Энциклопедия, 2003. - 992 с.*
4. *Поспелов Д.А. Вероятностные автоматы / Д.А. Поспелов. - М.: Энергия. – 1970. – 87 с.*

Поступила в редакцию 12.02.2009

Рецензент: д-р техн. наук, проф., проф. кафедры В.А Краснобаев, Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства им. П. Василенко, Харьков, Украина.

АЛГОРИТМ МОДЕЛЮВАННЯ КЕРУЄМОГО МАРКОВСЬКОГО ЛАНЦЮГА

С.М. Бабій, Л.О. Міняйленко, Мохаммед Саід Газал

Розглядається алгоритм моделювання марковської послідовності з керуємою імовірністю перебування ланцюга у заданому стані. На прикладі доведені можливості алгоритму. Пропонується використання алгоритму для прогнозування надійності цифрових приладів методом Монте-Карло. С цією метою використовується поняття еквівалентності стохастичного автомата детермінірованому, яка є мірою надійності.

Ключові слова: матриця зміни стану, псевдовипадкові числа, функції алгоритму.

MODELING ALGORITHM OF THE CONTROLLED MARKOV CHAIN

S.M. Babiy , L.A. Minajlenko , Mohammed Said Gazal

Modeling algorithm for the Markov chain is presented. The algorithm is controlling the probability of changing different states and their number. The algorithm may be used for prognostication the reliability of the digital system by method Monte-Carlo. To that end the concept of equivalence of probabilistic automat is used to determined, which is the measure of reliability.

Key words: matrix of state changing changing states, nrandom numbers, function of algorithm.

Бабий Сергей Михайлович – канд. техн. наук, доцент, доцент кафедры компьютерных систем и сетей Национального аэрокосмического университета им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина.

Миняйленко Любовь Александровна – канд. техн. наук, доцент кафедры интеллектуальных компьютерных систем Национального технического университета «ХПИ», Харьков, Украина.

Мохаммед Саид Газал – аспирант кафедры компьютерных систем и сетей Национального аэрокосмического университета им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина.