УДК 519.718

А.М. РОМАНКЕВИЧ, В.А. РОМАНКЕВИЧ, БАХТАРИ ХЕДАЯТОЛЛАХ

Национальный технический университет Украины «КПИ», Украина

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ОПТИМИЗАЦИИ МОДЕЛЕЙ ПОВЕДЕНИЯ ОТКАЗОУСТОЙЧИВЫХ МНОГОПРОЦЕССОРНЫХ СИСТЕМ

В работе рассматривается возможность использования для оптимизации GL-моделей двух таблиц, подобных таким, которые используются при минимизации булевых функций методом Квайна.

отказоустойчивые многопроцессорные системы, графо-логические модели, булевы функции, надёжность

Введение

Одним из активно развиваемых направлений повышения производительности средств вычислительной техники в настоящее время является использование многопроцессорных систем. При этом повышение надежности очень часто достигается путем введения избыточности и организации режима обнаружения отказавших процессоров и исключения их из вычислительного процесса путем реконфигурации системы.

Реконфигурируемые отказоустойчивые многопроцессорные системы (ОМС) и их свойства анализируются во многих работах (например, [1 – 3]). Среди них для нас представляют интерес исследования, в которых рассматривается проблема расчета надежности отказоустойчивых систем (см., например, [4, 5]), в частности, расчета надежности ОМС, основанном на выполнении статистических экспериментов [6] над моделями поведения ОМС в потоке отказов.

Одна из таких моделей предложена в [7]. Понятно, что, чем проще модель, тем больше можно выполнить экспериментов с ней и тем точнее расчет надежности системы.

Поэтому задача оптимизации моделей, поставленная в заголовке, весьма актуальна.

Модель поведения ОМС в потоке отказов фактически отражает ее реакцию на появление отказов. Графологическая модель [7] (далее *GL*-модель) отказоустойчивой многопроцессорной системы, состоящей из n элементов, представляет собой неориентированный граф G, каждому ребру которого соответствует булева функция. Аргументами рёберных функций являются индикаторные переменные x_i ($i = 1 , \dots , n$), равные 1 (i-й элемент системы работоспособен) или 0 (i-й элемент системы вышел из строя). Ребро удаляется из графа определённой *GL*-модели, если соответствующая ему рёберная функция принимает значение 0. Связность графа моделирует работоспособность системы.

ОМС, состоящую из n элементов и сохраняющую работоспособность в случае отказа не более, чем m её любых модулей ($0 \le m < n$), будем обозначать $K(m,n)$ и назовём базовой ОМС.

В [8] описан метод минимизации таких моделей, основой которого является операция склеивания:

$$\left.\begin{aligned} F_1 = A \vee \varphi_1 \\ F_2 = A \vee \varphi_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow F_3 = A \vee \varphi_1 \cdot \varphi_2 \ . \qquad (1)$$

Здесь A, φ_1, φ_2 - определенные булевы выражения, из которых состоят реберные функции F_1, F_2 и F_3 *GL*-модели. Из (1) становится ясным, что условием склеивания является наличие одного и того же выражения A в каждой из склеиваемых функций, отделенного от остальной части функции знаком дизъюнкции. Функции F_1 и F_2 являются реберными функциями исходной модели, построенной согласно [7], которую будем далее называть канонической. В [8] доказана справедливость преобразования (1) в общем случае и приводится алгоритм минимизации исходной *GL*-модели к *GL*-модели, теряющей минимальное число (ровно два) ребер при появлении вектора состояния ОМС, имеющей m+1 неисправных процессоров, что упрощает дальнейшие преобразования модели.

1. Оптимизация выбора результрующей модели

В [8] не анализируется возможность получения моделей, оптимальных по другим критериям, например, по критерию минимальной общей сложности модели или минимума числа ребер графа модели. Ниже предлагается методика, обеспечивающая такую возможность путем использования таблиц, подобных импликантной матрице Квайна, которые могут уменьшить перебор при выборе оптимальной модели.

Суть методики заключается в следующем. В отличие от алгоритма, предложенного в [8], следует выполнить все возможные склеивания. Затем надо составить две таблицы, строки которых обозначаются реберными функциями как канонической модели, так и теми, которые получены в результате склеивания. Столбцы первой таблицы обозначаются двоичными векторами, содержащими m нулей, а второй m+1 нулей.

В ячейке таблицы будем ставить отметку, если соответствующая функция примет значение 0 на соответствующем наборе (двоичном векторе, обозначающем столбец).

Заключительный этап – выбор такой совокупности функций, которая в первой таблице имеет не более одной звездочки в столбце, а во второй – не менее двух, и при этом соответствует заданному критерию. Это и будут реберные функции искомой *GL*-модели циклического типа.

Поясним сказанное на примере ОМС $K(3,7)$.

Разобьем множество переменных (т. е. процессоров) на два подмножества: $\{x_1,x_2,x_3\}$ и $\{x_4,x_5,x_6,x_7\}$ и построим каноническую *GL*-модель по [9]. Она включает функции f_1 - f_8 (табл. 1, 2).

Далее выполняем все возможные склеивания и находим функции f_9 - f_{16}. Функция f_9 была получена путем склеивания по (1) функций f_1 и f_2, функция f_{10} путем склеивания функций f_1 и f_3, функция f_{11} – склеиванием f_2 и f_3, функция f_{12} – склеиванием f_4, f_5 и f_6 и т.д.

Строим таблицы и производим отметки в ячейках таблиц (табл. 1, 2).

Отметим, что, если выполнить минимизацию согласно алгоритму, приведенному в [8], получим функции f_1, f_7, f_8, f_{11} и f_{12}.

Произведя анализ построенных таблиц, приходим к выводу, что *GL*-модель с этими функциями (выделены цветом) отвечает всем указанным выше критериям.

Однако так бывает не всегда.

Остановимся на случае K (3,8), рассмотренном в [8], где получена каноническая форма, включающая 10 реберных функций, и минимальная, содержащая 6 функций. В то же время, если первоначально произвести разбиение переменных не на 2, а на 3 подмножества:

$$\{x_1,x_2,x_3\};$$

$$\{x_4,x_5,x_6\};$$

$$\{x_7,x_8\},$$

получим каноническую *GL*-модель со следующими реберными функциями:

$$f_1 = x_1x_2x_3 \vee x_4x_5x_6 \vee x_7x_8\,;$$

$$f_2 = x_1 \vee x_2 \vee x_4x_5x_6\,;$$

$$f_3 = x_1x_2 \vee x_3 \vee x_4x_5x_6\,;$$

$$f_4 = x_1 \vee x_2 \vee x_7x_8\,;$$

$$f_5 = x_1x_2 \vee x_3 \vee x_7x_8\,;$$

$$f_6 = x_1x_2x_3 \vee x_4 \vee x_5\,;$$

$$f_7 = x_1x_2x_3 \vee x_4x_5 \vee x_6\,;$$

Таблиця 1

$K(3,7)$	$x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7$	0001111	0010111	0100111	1000111	0011011	0101011	1001011	0110011	1010011	1100011	0011101	0101101	1001101	0110101	1010101	1100101	0111001	1011001	1101001	1110001	0011110	0101110	1001110	0110110	1010110	1100110	0111010	1011010	1101010	1110010	0111100	1011100	1101100	1110100	1111000
f_1	$x_1 \vee x_2 \vee x_3$	+																																		
f_2	$x_1x_2 \vee x_3 \vee x_4x_5x_6x_7$			+	+		+	+					+	+									+	+												
f_3	$x_1 \vee x_2 \vee x_4x_5x_6x_7$		+			+						+										+														
f_4	$x_1x_2x_3 \vee x_4 \vee x_5$								+	+	+																									
f_5	$x_1x_2x_3 \vee x_6 \vee x_7$																															+	+	+		
f_6	$x_1x_2x_3 \vee x_4x_5 \vee x_6x_7$														+	+	+	+	+	+					+	+	+	+	+	+						
f_7	$x_4 \vee x_5 \vee x_6x_7$																				+										+					
f_8	$x_4x_5 \vee x_6 \vee x_7$																																		+	+
f_9	$x_3 \vee (x_1 \vee x_2)(x_1x_2 \vee x_4x_5x_6x_7)$	+		+	+		+	+					+	+									+	+												
f_{10}	$x_1 \vee x_2 \vee x_3x_4x_5x_6x_7$	+	+			+						+										+														
f_{11}	$x_4x_5x_6x_7 \vee (x_1 \vee x_2)(x_1x_2 \vee x_3)$		+	+	+	+	+	+				+	+	+								+	+	+												
f_{12}	$x_1x_2x_3 \vee (x_4 \vee x_5)(x_6 \vee x_7)(x_4x_5 \vee x_6x_7)$								+	+	+				+	+	+	+	+	+					+	+	+	+	+	+		+	+	+		
f_{13}	$x_4 \vee x_5 \vee x_1x_2x_3x_6x_7$								+	+	+										+										+					
f_{14}	$x_6 \vee x_7 \vee x_1x_2x_3x_4x_5$																															+	+	+	+	+
f_{15}	$x_6x_7 \vee (x_1x_2x_3 \vee x_4x_5)(x_4 \vee x_5)$														+	+	+	+	+	+	+				+	+	+	+	+	+	+					
f_{16}	$x_4x_5 \vee (x_1x_2x_3 \vee x_6x_7)(x_6 \vee x_7)$														+	+	+	+	+	+					+	+	+	+	+	+					+	+
f_{17}	$x_1x_2x_3 \vee (x_4 \vee x_5)(x_6 \vee x_7)$								+	+	+																					+	+	+		

Таблиця 2

$K(3,7)$	$x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7$	0000111	0001011	0010011	0100011	1000011	0001101	0010101	0100101	1000101	0011001	0101001	1001001	0110001	1010001	1100001	0001110	0010110	0100110	1000110	0011010	0101010	1001010	0110010	1010010	1100010	0011100	0101100	1001100	0110100	1010100	1100100	0111000	1011000	1101000	1110000
f_1	$x_1 \vee x_2 \vee x_3$	+	+				+										+																			
f_2	$x_1x_2 \vee x_3 \vee x_4x_5x_6x_7$	+	+		+	+	+		+	+		+	+				+		+	+		+	+					+	+							
f_3	$x_1 \vee x_2 \vee x_4x_5x_6x_7$	+	+	+			+	+			+						+	+			+						+									
f_4	$x_1x_2x_3 \vee x_4 \vee x_5$			+	+	+								+	+	+								+	+	+										
f_5	$x_1x_2x_3 \vee x_6 \vee x_7$																										+	+	+	+	+	+	+	+	+	
f_6	$x_1x_2x_3 \vee x_4x_5 \vee x_6x_7$							+	+	+	+	+	+	+	+	+		+	+	+	+	+	+	+	+	+				+	+	+	+	+	+	
f_7	$x_4 \vee x_5 \vee x_6x_7$													+	+	+								+	+	+										+
f_8	$x_4x_5 \vee x_6 \vee x_7$																													+	+	+	+	+	+	+
f_9	$x_3 \vee (x_1 \vee x_2)(x_1x_2 \vee x_4x_5x_6x_7)$	+	+		+	+	+		+	+		+	+				+		+	+		+	+					+	+							
f_{10}	$x_1 \vee x_2 \vee x_3x_4x_5x_6x_7$	+	+	+			+	+			+						+	+			+						+									
f_{11}	$x_4x_5x_6x_7 \vee (x_1 \vee x_2)(x_1x_2 \vee x_3)$	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+				+	+	+	+	+	+	+				+	+	+							
f_{12}	$x_1x_2x_3 \vee (x_4 \vee x_5)(x_6 \vee x_7)(x_4x_5 \vee x_6x_7)$			+	+	+		+	+	+	+	+	+	+	+	+		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
f_{13}	$x_4 \vee x_5 \vee x_1x_2x_3x_6x_7$			+	+	+								+	+	+								+	+	+										+
f_{14}	$x_6 \vee x_7 \vee x_1x_2x_3x_4x_5$																										+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
f_{15}	$x_6x_7 \vee (x_1x_2x_3 \vee x_4x_5)(x_4 \vee x_5)$							+	+	+	+	+	+	+	+	+		+	+	+	+	+	+	+	+	+				+	+	+	+	+	+	+
f_{16}	$x_4x_5 \vee (x_1x_2x_3 \vee x_6x_7)(x_6 \vee x_7)$							+	+	+	+	+	+	+	+	+		+	+	+	+	+	+	+	+	+				+	+	+	+	+	+	+
f_{17}	$x_1x_2x_3 \vee (x_4 \vee x_5)(x_6 \vee x_7)$			+	+	+								+	+	+								+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	

$$f_8=x_1x_2x_3\vee x_7\vee x_8;$$

$$f_9=x_4\vee x_5\vee x_7x_8;$$

$$f_{10}=x_4x_5\vee x_6\vee x_7x_8;$$

$$f_{11}=x_4x_5x_6\vee x_7\vee x_8;$$

$$f_{12}=x_1\vee x_2\vee x_3;$$

$$f_{13}=x_4\vee x_5\vee x_6;$$

Выполнив все возможные склеивания и построив таблицы, найдем модель с 5-ю следующими функциями (таблицы не приводим для экономии места).

$$f_1=x_4x_5x_6\vee(x_1x_2x_3\vee x_7x_8)(x_1\vee x_2)(x_1x_2\vee x_3)(x_7\vee x_8);$$

$$f_2=x_7x_8\vee(x_1\vee x_2)(x_1x_2\vee x_3)(x_4\vee x_5)(x_4x_5\vee x_6);$$

$$f_3=x_1x_2x_3\vee(x_4\vee x_5)(x_4x_5\vee x_6)(x_7\vee x_8);$$

$$f_4=x_1\vee x_2\vee x_3;$$

$$f_5=x_4\vee x_5\vee x_6;$$

Однако на некоторых векторах состояния ОМС с 4-мя нулевыми компонентами (например, компоненты x_1, x_4, x_5, x_7) модель теряет три ребра, т. е. критерию минимума теряемых ребер она не соответствует.

Заключение

Приведенная методика дает возможность выполнять сравнительный анализ различных *GL*-моделей, которые могут быть получены в результате преобразований, в том числе не только при минимизации с применением соотношения склеивания. В частности подобные таблицы можно использовать при оптимизации преобразования базовых моделей в небазовые. Однако понятно, что это всегда связано с определенным перебором вариантов, сложность которого существенно зависит от величин m и n.

Литература

1. Многоверсионные системы, технологии, проекты / В.С. Харченко, В.Я. Жихарев, В.М. Илюшко, Н.В. Нечипорук. – Х. Нац. аэрокосм. ун-т «Харьк. авиац. ин-т», 2003. – 486 с.

2. Behr A., Camarinopoulos L. Two Formulas for Computing the Reliability of Incomplete k-out-of-n:G Systems // IEEE Transactions on Reliability. – 1997. – Vol. 46, №3. – P. 421-428.

3. Каравай М. Ф. Инвариантно-групповой подход к исследованию К-отказоустойчивых структур // Автоматика и телемеханика. – 2000. – № 1. – С. 144-156.

4. Kuo W., Zuo Ming J. Optimal Reliability Modeling. – John Willey & Sons, 2002 – 560 p.

5. H. Lui. Reliability of a load-sharing k-out-of-n:G system: Non-id components with arbitrary distributions //IEEE Trans. on Reliability. – 1998. – Vol. 47, № 3. – P. 279-294.

6. Романкевич А.М., Гроль В.В., Карачун Л.Ф., Орлова М.Н., Романкевич В.А. Об одном подходе к расчету надежности отказоустойчивых многопроцессорных систем // Автоматизированные системы управления и приборы автоматики. – Х.: 2002. – Вып. 119. – С. 54-58.

7. Романкевич А.М., Карачун Л.Ф., Романкевич В.А. Графо-логические модели для анализа сложных отказоустойчивых вычислительных систем // Электронное моделирование. – 2001. – Т. 23, № 1.– С. 102-111.

8. Романкевич В.А., Потапова Е.Р., Бахтари Хедаятоллах, Назаренко В.В. GL-модель поведения отказоустойчивых многопроцессорных систем с минимальным числом теряемых рёбер // Вісник НТУУ "КПІ". Інформатика, управління та ОТ. – 2006. – № 45. – С. 93-100.

9. Романкевич В.А. Об одном способе построения GL-моделей отказоустойчивых многопроцессорных систем // Радіоелектронні і комп'ютерні системи. – 2006. – № 7. – С. 47-51.

Поступила в редакцию 22.01.2008

Рецензент: д-р техн. наук, проф. В.С. Харченко, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского "ХАИ", Харьков.