УДК 004;519.6

В.С. ДОМНИЧ

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, Россия

КЛАССИФИКАЦИЯ ФУНКЦИЙ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ ПО СВОЙСТВАМ ИХ СПЕКТРОВ

Приводится результат использования спектров динамических характеристик последовательности для построения разбиений подклассов функций алгебры логики. По свойствам Поста выделены некоторые подклассы функций алгебры логики, в которых совпадение сложности минимальных ДНФ пары функций может быть установлено без построения минимальных ДНФ этих функций.

функции алгебры логики, минимальная ДНФ функции, сложность функции, классификация функций

Введение

Функции алгебры логики успешно применяются для математического описания реальных систем [1]. При этом особое место занимает аналитическое представление функций, которое включает использование формул с наименьшим числом вхождений в них знаков переменных. В общей постановке задача нахождения минимальной формулы для заданной функции пока не решена, однако подробно исследована в классе дизъюнктивно-конъюнктивных форм [2].

Определение. Количество вхождений знаков переменных в минимальную ДНФ функции алгебры логики будем называть сложностью этой функции.

Задача сравнения двух произвольных функций алгебры логики по сложности решается построением и последующим сравнением минимальных ДНФ этих функций, что требует большого объема вычислений. В настоящей статье показано, что для некоторых подклассов функций алгебры логики, выделенных по свойствам Поста, совпадение спектров динамических характеристик последовательности, построенных по столбцам значений функций, означает совпадение этих функций по сложности. Данный факт был установлен на основе вычислительного эксперимента, который будет описан ниже.

Для проведения этого вычислительного эксперимента требуется метод представления функции алгебры логики в виде последовательности. Рассмотрим способ, который применялся в данном исследовании. По алгоритму, приведенному в монографии А. Гилла [3], в алфавите $X=\{0,1\}$ построим компактную $n-$последовательность $\xi=\xi_1\xi_2...\xi_k$, то есть такую последовательность, которая содержит все $|X|^n$ возможные подпоследовательности из множества X^n, причем каждый символ, за исключением последних $n-1$ символов, начинает различную подпоследовательность длиной n. По определению, все подпоследовательности $\xi_{i+1}\xi_{i+2}...\xi_{i+n}$, $0\le i\le|\xi|-n$, различны и в совокупности образуют множество X^n. Следовательно, порядок, в котором эти подпоследовательности встречаются в последовательности ξ, можно рассматривать как порядок на множестве X^n:

$$\xi_1\xi_2...\xi_n \prec \xi_2\xi_3...\xi_{n+1} \prec ... \prec \xi_{k-n+1}\xi_{k-n+2}...\xi_k .$$

Введенный порядок на множестве X^n будем рассматривать как порядок на области определения всех функций алгебры логики от n переменных, т.е. как порядок, согласно которому в таблицах истинности этих функций расположены наборы значений аргументов. Тогда рассматриваемые таблицы будут отличаться только столбцами, содержащими значения функций, и представление функции таблицей истинности сведется к представлению функции столбцом значений, т.е. двоичной последовательностью длины 2^n.

Методы построения минимальных ДНФ функций алгебры логики

Существуют различные методы построения минимальных ДНФ функций алгебры логики: метод диаграмм Вейча, метод карт Карно. Однако эти методы не ориентированы на автоматизированные вычисления и рассчитаны на небольшое число переменных. Более интересной является теория согласований, которая представляет собой обобщение метода Блейка-Порецкого [4]. На основе этой теории разработаны алгоритмы поиска простых импликант, а также алгоритмы определения существенных импликант полностью определенных и недоопределенных функций.

В настоящем разделе будут рассмотрены методы построения минимальных ДНФ, которые получили наибольшее распространение: метод Квайна-Мак-Класки и метод Блейка-Порецкого. Поиск минимальных ДНФ включает два этапа: сначала получают сокращенную ДНФ, а затем производят построение всех тупиковых форм и выбор среди них минимальных. Следует отметить, что поиск минимальной ДНФ связан с некоторым перебором решений. Существуют методы уменьшения этого перебора, однако он всегда остается.

Рассматриваемые ниже методы минимизации различаются лишь на первом этапе – этапе получения сокращенной ДНФ.

Метод Квайна-Мак-Класки основывается на применении двух основных соотношений: неполного склеивания и элементарного поглощения.

Неполное склеивание:

$$Ax \vee A\overline{x} \equiv Ax \vee A\overline{x} \vee A,$$

где A – любая элементарная конъюнкция.

Элементарное поглощение:

$$Ax^{\sigma} \vee A \equiv A,$$

где $\sigma \in \{\ 0,1\}$.

Суть метода заключается в последовательном выполнении всех возможных склеиваний в СДНФ функции алгебры логики и затем всех поглощений, что приводит к сокращенной ДНФ. Предложенное Мак-Класки разбиение конституент единицы на группы позволяет уменьшить число попарных сравнений при склеивании.

Метод Блейка-Порецкого позволяет получать сокращенную ДНФ функции алгебры логики из ее произвольной ДНФ. Он базируется на применении формулы обобщенного склеивания:

$$Ax \vee B\overline{x} \equiv Ax \vee B\overline{x} \vee AB,$$

где A, B – любые элементарные конъюнкции.

В основу метода положено следующее утверждение: если в произвольной ДНФ функции алгебры логики произвести все возможные обобщенные склеивания, а затем выполнить все поглощения, то в результате получится сокращенная ДНФ.

Второй этап рассматриваемых методов минимизации использует импликантную матрицу Квайна. Заголовки строк такой матрицы отмечаются простыми импликантами, т.е. членами сокращенной ДНФ, а заголовки столбцов – членами СДНФ функции.

В матрице отмечаются те пересечения строк и столбцов, для которых простая импликанта, стоящая в заголовке строки, входит в элементарную конъюнкцию, стоящую в заголовке столбца.

Минимальные ДНФ строятся по импликантной матрице следующим образом:

1. Ищутся столбцы импликантной матрицы, имеющие только одну отметку. Соответствующие этим отметкам простые импликанты обязательно входят в минимальную ДНФ.

2. Рассматриваются различные варианты выбора совокупности простых импликант, которые накроют отметками остальные столбцы импликант-

ной матрицы, и выбираются варианты с минимальным суммарным числом переменных в такой совокупности импликант.

Спектр динамических характеристик последовательности

Понятие спектра динамических характеристик последовательности было введено и разработано Твердохлебовым В.А. в работах [5-7].

Пусть $U = \{ u_1, u_2, ..., u_k \}$ – конечное множество и $\xi \in U^*$. Спектр $\Omega(\xi)$ динамических характеристик последовательности ξ имеет иерархическую структуру, состоящую из пяти уровней $\Omega(\xi) = (\Omega_0(\xi),\ \Omega_1(\xi),\ \Omega_2(\xi),\ \Omega_3(\xi),\ \Omega_4(\xi))$. В данной статье будут рассматриваться только первые четыре уровня, которые были использованы при исследованиях. Каждый конкретный вариант реализации (представление значениями параметров) любого уровня $\Omega_i(\xi)$ определяет разбиение множества U^* на подмножества по свойствам совпадения характеристик, соответствующих уровню. Подмножества такого разбиения будем рассматривать как классы эквивалентности последовательностей.

<u>Определение.</u> Для любой последовательности $\overline{\xi} \in U^{\vee}$ наименьший порядок рекуррентной формы, определяющей последовательность $\overline{\xi}$, будем обозначать $m_0(\overline{\xi})$.

<u>Определение.</u> Для любой последовательности $\overline{\xi} \in U^{\vee}$ и $m \in N^+$, где $1 \le m \le m_0(\overline{\xi})$, наибольшую длину начального отрезка последовательности $\overline{\xi}$, определяемого рекуррентной формой порядка m, будем обозначать $d^m(\overline{\xi})$.

<u>Определение.</u> Для любой последовательности $\overline{\xi} \in U^{\vee}$ и $m \in N^+$, где $1 \le m \le |\overline{\xi}| - 1$, число смен рекуррентных форм порядка m, требующихся при определении последовательности $\overline{\xi}$, будем обозначать $r^m(\overline{\xi})$.

<u>Определение.</u> Для любой последовательности $\overline{\xi} \in \mathrm{U}^{\vee}$ и $\mathrm{m} \in \mathrm{N}^+$, где $1 \le \mathrm{m} \le \mathrm{m}_0(\overline{\xi})$ и j, где $1 \le j \le r^m(\overline{\xi})$ длину j – го отрезка в определении последовательности $\overline{\xi}$ будем обозначать $d_j^m(\overline{\xi})$.

Используя введенные обозначения, определим спектр параметров, характеризующих последовательность, как следующую структуру:

- $\Omega_0(\overline{\xi}) = \langle m_0(\overline{\xi}) \rangle$;
- $\Omega_1(\overline{\xi}) = \langle d^1(\overline{\xi}), d^2(\overline{\xi}), ..., d^{\alpha}(\overline{\xi}) \rangle$;
- $\Omega_2(\overline{\xi}) = \langle r^1(\overline{\xi}), r^2(\overline{\xi}), ..., r^{\alpha}(\overline{\xi}) \rangle$;
- $\Omega_3(\overline{\xi}) = \langle \Omega_3^1(\overline{\xi}), \Omega_3^2(\overline{\xi}), ..., \Omega_3^{\alpha}(\overline{\xi}) \rangle$,

где $\alpha = m_0(\overline{\xi})$ и $\Omega_3^j(\overline{\xi}) = \left\langle d_1^j(\overline{\xi}), d_2^j(\overline{\xi}), ..., d_{n_j}^j(\overline{\xi}) \right\rangle$ (n_j – номер последнего отрезка в определении последовательности $\overline{\xi}$ как последовательности отрезков, определяемых отдельными рекуррентными формами порядка j).

Вычислительный эксперимент

Пусть задан подкласс $H = \{ f_1, f_2, ..., f_p \}$ функций алгебры логики от n переменных. Проведенный вычислительный эксперимент состоит в реализации следующих этапов.

<u>Этап 1.</u> Методом Блейка-Порецкого строится минимальная ДНФ m_i каждой функции $f_i \in H$, $i = \overline{1, p}$. Число вхождений знаков переменных в форму m_i будем обозначать $|m_i|$.

<u>Этап 2.</u> Каждая функция $f_i \in H$ указанным выше способом представляется двоичной последовательностью ξ_i. Обозначим множество этих последовательностей за Ξ.

Этап 3. По каждой последовательности $\xi_i \in \Xi$, $i = \overline{1, p}$, строится спектр $\Omega(\xi_i)$ динамических характеристик этой последовательности.

Этап 4. Строится разбиение $P_0 = \{ K_1^0, K_2^0, ..., K_{p_0}^0 \}$ множества Ξ по свойству совпадения характеристик, соответствующих нулевому уровню спектра, на классы эквивалентности последовательностей. Эти классы будем обозначать за K_i^0.

Этап 5. Выполняется последовательно для $j = 1, 2, 3$. Каждый построенный класс K_i^{j-1}, $i = \overline{1, p_{j-1}}$, разбивается на классы $K_{r_i+1}^j, K_{r_i+2}^j, ..., K_{r_{i+1}}^j$ эквивалентности последовательностей по свойству совпадения характеристик, соответствующих уровню Ω_j. Совокупность классов K_r^j образует разбиение P_j множества Ξ:

$$P_j = \bigcup_{i=1}^{p_{j-1}} \{ K_{r_i+1}^j, K_{r_i+2}^j, ..., K_{r_{i+1}}^j \} = \{ K_1^j, K_2^j, ..., K_{p_j}^j \}.$$

Этап 6. Выполняется для $j = \overline{0, 3}$. Каждому классу эквивалентности последовательностей K_i^j, $1 \le i \le p_j$, взаимно однозначно соответствует класс функций алгебры логики $\tilde{K}_i^j$, который определяется следующим образом:

$$\tilde{K}_i^j = \{ f_r \in H \mid \xi_r \in K_i^j \}.$$

Совокупность классов $\tilde{K}_i^j$, $i = \overline{1, p_j}$, образует разбиение $\tilde{P}_j$ подкласса H. Для каждого класса $\tilde{K}_i^j$ находится величина ε_i^j, характеризующая расхождение сложности среди функций из класса $\tilde{K}_i^j$:

$$\varepsilon_i^j = \max\{ |m_r| - |m_{r'}| \mid f_r, f_{r'} \in \tilde{K}_i^j \}.$$

Заключительной операцией эксперимента является вычисление максимального расхождения сложности функций во всех классах разбиения $\tilde{P}_j$:

$$\varepsilon_j = \max_{i=1,p_j} \varepsilon_i^j.$$

Выбор подклассов функций алгебры логики, для которых проводился данный вычислительный эксперимент, осуществлялся по свойствам Поста. Для обозначения подклассов, выделяемых этими свойствами, введем расширенные характеристические функции свойств:

- z_1 – свойство сохранять 0.
- z_2 – свойство сохранять 1.
- z_3 – свойство быть самодвойственной.
- z_4 – свойство быть линейной.
- z_5 – свойство быть монотонной.

Введенные характеристические функции свойств определяются следующим образом:

$$z_i = \begin{cases} 0, \textit{ если все функции подкласса} \\ \quad \textit{не обладают свойством;} \\ 1, \textit{ если все функции подкласса} \\ \quad \textit{обладают свойством;} \\ *, \textit{ если свойство не проверяется.} \end{cases}$$

Определение. Под $H^n_{z_1^0 z_2^0 z_3^0 z_4^0 z_5^0}$ будем понимать подкласс функций алгебры логики от n переменных, для которого характеристические функции свойств принимают значения $z_i = z_i^0$, $i = \overline{1, 5}$.

Описанный выше вычислительный эксперимент проводился во всех 15 непустых подклассах, выделяемых свойствами Поста среди функций алгебры логики от 4 переменных: H^4_{00000}, H^4_{00100}, H^4_{00110}, H^4_{01000}, H^4_{01010}, H^4_{01011}, H^4_{10000}, H^4_{10010}, H^4_{10011}, H^4_{11000}, H^4_{11001}, H^4_{11100}, H^4_{11101}, H^4_{11110}, H^4_{11111}. При этом был получен следующий результат: для всех подклассов $H \subset H^4_{**1**}$ расхождение $\varepsilon_3 = 0$, а для подклассов $H \subset H^4_{***1*}$ – $\varepsilon_1 = 0$, в подклассе H^4_{11001} расхождение $\varepsilon_3 = 3$. Данные факты послужили основанием для проведения дополнительного исследования в подклассах самодвойственных, линейных и монотонных функций алгебры логики. В результате этого исследования было установлено, что $\varepsilon_3 = 0$ для подклассов H^4_{**1**}, H^5_{**1**}, а $\varepsilon_1 = 0$ для подклассов H^4_{***1*}, H^5_{***1*}. Т.е. из совпадения спектров пары функций, принадлежащих данным подклассам, следует совпадение сложности этих функций. Более того, проведение расширенного варианта вычислительного эксперимента, позволяющего анализировать конечные подклассы функций алгебры логики, в которые входят функции, зависящие от разного числа переменных, показало, что $\varepsilon_3 = 0$ в подклассе $\bigcup_{n=1}^{5} H^n_{**1**}$, а $\varepsilon_1 = 0$ в подклассе $\bigcup_{n=3}^{5} H^n_{***1*}$.

Исследование монотонных функций показало, что расхождение сложности даже при разбиении по свойствам совпадения характеристик, соответствующих уровню Ω_3, остается ненулевым и составляет $\varepsilon_3 = 4$ в подклассе H^4_{****1} и $\varepsilon_3 = 6$ в подклассе H^5_{****1}. Сужение анализируемых подклассов функций алгебры логики не дало существенного уменьшения расхождения сложности. Так, например, в подклассе H^5_{11001} сохраняется $\varepsilon_3 = 6$, а в подклассе H^4_{11001} получается расхождение $\varepsilon_3 = 3$. Итак, совпадение спектров динамических характеристик последовательностей, представляющих самодвойственные функции, зависящие не более чем от 5 переменных, равно как и совпадение первых уровней спектров динамических характеристик последовательностей, представляющих функции из подкласса $\bigcup_{n=3}^{5} H^n_{***1*}$, означает совпадение сложности этих функций.

Заключение

В статье показана применимость спектров динамических характеристик последовательности для сравнения сложности функций в некоторых подклассах функций алгебры логики, причем это сравнение может осуществляться и для функций, зависящих от разного числа переменных. Кроме того, установлено, что в подклассе $\bigcup_{n=3}^{5} H^n_{***1*}$ совпадение сложности двух функций следует уже из совпадения первых уровней спектров динамических характеристик последовательностей, представляющих данные функции.

Литература

1. Бусленко Н.П., Калашников В.В., Коваленко И.Н. Лекции по теории сложных систем. – М.: Сов. радио, 1973. – С. 18-39.
2. Самофалов К.Г., Романкевич А.М., Валуйский В.Н., Каневский Ю.С., Пиневич М.М. Прикладная теория цифровых автоматов. К.: Вища Школа – 1987. – С. 123-135.
3. Гилл А. Введение в теорию конечных автоматов. – М.:Наука – 1966. – С. 240-243.
4. Булева алгебра и конечные автоматы. Под ред. П.П. Пархоменко. М.: Мир – 1969. – С. 11-29.
5. Твердохлебов В.А. Методы интерполяции в техническом диагностировании // Проблемы управления. – 2007. – № 2. – С. 28-34.
6. Твердохлебов В.А. Рекуррентно-автоматные характеристики динамических систем // Материалы 9-й Междунар. конф. Интеллектуальные системы и компьютерные науки. М., 2006. – Т.1, ч. 2. – С. 168-171.
7. Твердохлебов В.А. Интерполяция и рекуррентные модели в техническом диагностировании больших систем. // В кн.: Проблемы и перспективы прецизионной механики и управления в машиностроении. Сарат. – 2006. – С. 68-80.

Поступила в редакцию 19.02.2008

Рецензент: канд. техн. наук, доц. Н.Г. Коробков, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков.