

УДК 621.371.322

И.П. ЗАЙКИН, А.А. ТКАЧЕНКО

*Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского "ХАИ", Украина***РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА СИММЕТРИЧНОМ СОЕДИНЕНИИ КОАКСИАЛЬНОЙ ЛИНИИ И КРУГЛОГО ВОЛНОВОДА С ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ РЕЗОНАТОРОМ. ТМ(e)-ВОЛНЫ**

Рассмотрена задача рассеяния H_φ -поляризованных электромагнитных волн на симметричном стыке коаксиальной линии и круглого волновода с цилиндрическим резонатором. Для строгого решения внутренней краевой задачи использован метод частичных областей. Решение получено в виде бесконечной системы линейных алгебраических уравнений второго рода относительно коэффициентов преобразования на структуре. Задача решена без ограничений на параметры структуры. Для двух предельных случаев – приближений "узкие щели" и геометрической оптики решение системы уравнений получено в явном виде.

Ключевые слова: *рассеяние, поляризация, коаксиальная линия, круглый волновод, коэффициенты преобразования.*

Введение

Высокая динамика развития средств телекоммуникаций тесно связана с применением технологий сантиметровых и миллиметровых длин волн, которым соответствуют частоты от 3 до 300 ГГц. Переход многих радиосистем к микроволновому диапазону обусловлен его большой информационной емкостью. В системах телекоммуникаций это позволяет увеличить число передаваемых каналов телефонной связи, организовать многоканальную передачу широкополосных телевизионных сигналов с одновременным повышением качества связи.

Важное значение для многоканальной передачи сигналов имеют фидерные тракты, осуществляющие канализацию электромагнитных волн, обеспечивающие правильный режим работы выходных и входных цепей передатчика и приемника, выполняющие предварительную частотную фильтрацию сигналов. Костяк фидерного тракта составляют отрезки линий передачи СВЧ- и КВЧ-диапазонов и частотно-избирательные устройства на их основе.

Линии передачи являются теми элементами, из которых строятся различные узлы фидерного тракта и приемно-передающих устройств. Они должны быть просты в изготовлении, пригодны для работы в широком диапазоне частот, обладать достаточной электрической прочностью, минимальными габаритными размерами и массой, устойчивостью к механическим и климатическим воздействиям и не приводить к недопустимым потерям и искажениям сигналов. Но не существует универсальных линий передачи, удовлетворяющих поставленным требованиям во всех диапазонах частот. Наоборот, освое-

ние нового участка частотного спектра неизменно сопровождается созданием новых типов направляющих систем [1].

Целью работы является строгое решение задачи рассеяния электромагнитных волн на симметричном соединении коаксиальной линии и круглого волновода с цилиндрическим резонатором для определения коэффициентов преобразования волн на такой структуре.

Формулирование проблемы. Коаксиальные линии на сегодня – одна из наиболее распространенных и применяемых линий передачи. Области ее применения чрезвычайно разнообразны: от телевизионного кабеля до микроминиатюрных соединительных линий КВЧ-диапазона. Она широко используется при вводе и выводе энергии из колебательных систем, хотя ее свойства на стыке с резонатором требуют более тщательного исследования.

Рассмотрим структуру, показанную на рис. 1.

Положим, что внешняя оболочка коаксиальной линии, круглый волновод и отверстия связи имеют единичные радиусы ($R = 1$), тогда их периметры будут равны $\ell = 2\pi R = 2\pi$. Внутренний радиус коаксиальной линии обозначим через t .

Радиус цилиндрического резонатора обозначим через θ , а его высоту h – через $2\pi r$, где r – некоторый малый параметр, равный $r = h / \ell$.

Области 1 и 5 на рис. 1 представляют собой регулярные участки коаксиальной линии и круглого волновода соответственно, область 2 – цилиндрический резонатор, область 3 – нерегулярный участок, общий для коаксиальной линии, волновода и резонатора и область 4 – нерегулярный, общий для волновода и коаксиальной линии участок.

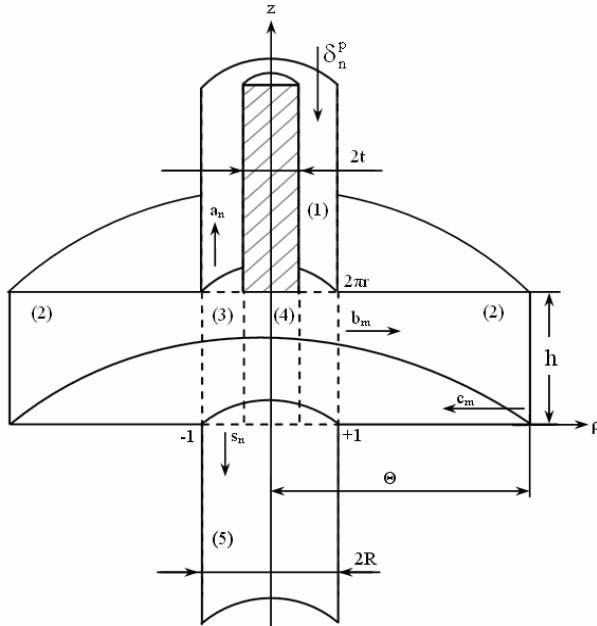


Рис. 1. Цилиндрический резонатор и связанные с ним через отверстия связи коаксиальная линия и круглый волновод

Пусть на соединение (рис. 1) со стороны области 1 ($z > 0$) набегают поперечные магнитные ТМ-волны (или e -волны) или поперечные электрические ТЕ-волны (или h -волны) порядка p единичной амплитуды δ_n^p , где δ_n^p – символ Кронекера:

$$\delta_n^p = \begin{cases} 1, & n = p, \\ 0, & n \neq p. \end{cases}$$

Тогда дифрагированное на соединении поле будет иметь вид набора волн, отраженных в область 1 и проникающих в область 3, а через нее – в области 2, 4 и 5. Коэффициенты преобразования на структуре обозначим как: a_n – коэффициенты отражения от границы 1-3 в область 1; b_m – коэффициенты прохождения из области 3 в область 2; c_m – коэффициенты отражения от вертикальных стенок резонатора в сторону области 2; d_n – коэффициенты отражения от границ 1-3 и 3-5 в область 3; f_m – коэффициенты отражения от границы областей 2-3 в область 3; g_n – коэффициенты отражения от торца центрального проводника коаксиальной линии и границы областей 4-5 в область 4; k_m – коэффициенты отражения от границы областей 3-4 в область 4; s_n – коэффициенты прохождения из области 3 в область 5.

Зависимость от координаты z для волн, распространяющихся в коаксиальной линии и круглом волноводе в направлениях $\pm z$, будем представлять в виде

$$\exp(\pm i g_n z) \text{ и } \exp(\pm i \gamma_n z),$$

а зависимость от координаты ρ для цилиндрического резонатора в направлениях $\pm \rho$ – в виде

$H_0^{(1)}(\tilde{A}_m \rho)$, $H_0^{(2)}(\tilde{A}_m \rho)$, $H_1^{(1)}(\tilde{A}_m \rho)$, $H_1^{(2)}(\tilde{A}_m \rho)$ силу поведения функций Ханкеля при больших $\tilde{A}_m \rho$ [2].

Продольные постоянные распространения вдоль z в областях 1 и 3 запишем как

$$g_n = \sqrt{\alpha^2 - h_{ne}^2} \text{ или } g_n = \sqrt{\alpha^2 - h_{nh}^2}, \quad (1)$$

где h_{ne} – корни уравнения

$$\frac{J_0(h_{ne})}{J_0(h_{ne}t)} - \frac{N_0(h_{ne})}{N_0(h_{ne}t)} = 0, \quad (2)$$

h_{nh} – корни уравнения

$$\frac{J_1(h_{nh})}{J_1(h_{nh}t)} - \frac{N_1(h_{nh})}{N_1(h_{nh}t)} = 0, \quad (3)$$

а $J_0(x)$, $J_1(x)$ и $N_0(x)$, $N_1(x)$ – функции Бесселя и Неймана нулевого и первого порядков.

Продольные постоянные распространения вдоль z в областях 4,5 и вдоль ρ в областях 2,3,4 запишем в виде

$$\gamma_{n4} = \sqrt{\alpha^2 - (j_{0n}/t)^2}$$

или

$$\gamma_{n4} = \sqrt{\alpha^2 - (j_{1n}/t)^2}; \quad (4)$$

$$\gamma_{n5} = \sqrt{\alpha^2 - j_{0n}^2} \text{ или } \gamma_{n5} = \sqrt{\alpha^2 - j_{1n}^2}; \quad (5)$$

$$\tilde{A}_m = \sqrt{\alpha^2 - (m/2r)^2}, \quad (6)$$

где $m = 0, 1, 2, \dots$ – для поперечно-магнитных волн ТМ и $m = 1, 2, 3, \dots$ – для поперечно-электрических волн ТЕ; $\alpha = kR = 2\pi/\lambda$ – безразмерное волновое число; j_{0n}, j_{1n} – поперечные волновые числа в круглом волноводе для волн E_{0n} и H_{0n} соответственно – корни уравнений $J_0(j_{0n}) = 0$ и $J_1(j_{1n}) = 0$; $m/2r$ – поперечные волновые числа в цилиндрическом резонаторе; $H_0^{(1)}(x)$, $H_0^{(2)}(x)$, $H_1^{(1)}(x)$, $H_1^{(2)}(x)$ – функции Ханкеля первого и второго рода нулевого и первого порядков.

Искомые поля должны удовлетворять следующим условиям:

- 1) уравнениям Максвелла;
- 2) условиям непрерывности тангенциальных составляющих поля на границах частичных областей;
- 3) граничным условиям на металле;
- 4) условиям излучения, заключающимся в требовании отсутствия волн, приходящих из бесконечности, кроме p -й волны в коаксиальной линии:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} - ik\psi \right) = 0,$$

где ψ – любая поперечная (относительно направления z) составляющая поля [3];

5) условиям конечности интеграла энергии

$$\int_v (\varepsilon |\vec{E}|^2 + \mu |\vec{H}|^2) dv < \infty$$

для любого конечного объема v , фактически определяющим характер особенностей поведения поля вблизи изломов границ (условиям на ребре [3]).

Основным типом волны в коаксиальной линии является волна ТЕМ. Если же средний периметр линии $\pi(t+1)$ становится равным длине волны λ , в линии возникают волны высших типов, которые разделяются на поперечные магнитные ТМ-волны (или е-волны) и поперечные электрические ТЕ-волны (или h-волны).

Решение проблемы. ТМ_{0n}(e_{0n})-волны

При больших аргументах функции Бесселя и Неймана в (2) могут быть заменены их асимптотическими представлениями, позволяющими привести уравнение (2) к виду [4]:

$$\sin[(R-t)h_{ne}] = 0 \Rightarrow h_{ne} = \frac{n\pi}{R-t} \Rightarrow \lambda_{\hat{e}\delta} = \frac{2(R-t)}{n}$$

Простейшей ТМ-волной в коаксиальной линии является волна ТМ₀₁(e₀₁), обладающая наименьшей критической частотой (наибольшей критической длиной волны) из всех волн типа ТМ:

$$(\lambda_{\hat{e}\delta})_{\hat{a}_{01}} = 2,029(R-t),$$

для круглого волновода критической длиной простейшей волны E_{01} является

$$(\lambda_{\hat{e}\delta})_{\hat{A}_{01}} = 2,613R.$$

Класс частных решений уравнений Максвелла будем искать с помощью скалярных собственных функций для коаксиального и круглого волноводов, выражения для которых в областях 1 – 5 структуры рис. 1 запишем в виде [5]:

$$\begin{aligned} \psi_e^{(1)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \delta_n^p e^{-ig_n(z-2\pi r)} + a_n e^{ig_n(z-2\pi r)} \right\} \times \\ &\quad \times \left\{ \frac{J_0(h_{ne}\rho)}{J_0(h_{ne}t)} - \frac{N_0(h_{ne}\rho)}{N_0(h_{ne}t)} \right\}; \\ \psi_e^{(2)} &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ b_m \frac{H_0^{(1)}(\tilde{A}_m\rho)}{H_0^{(1)}(\tilde{A}_m)} + \right. \\ &\quad \left. + c_m \frac{H_0^{(2)}(\tilde{A}_m\rho)}{H_0^{(2)}(\tilde{A}_m)} \right\} e^{im\left(\frac{z}{2r}-\pi\right)}; \\ \psi_e^{(3)} &= \sum_{n=1}^{\infty} d_n \left\{ e^{ig_n(2\pi r+z)} + e^{ig_n(2\pi r-z)} \right\} \times \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} &\times \left\{ \frac{J_0(h_{ne}\rho)}{J_0(h_{ne}t)} - \frac{N_0(h_{ne}\rho)}{N_0(h_{ne}t)} \right\} + \\ &+ \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m H_0^{(1)}(\tilde{A}_m) J_0(\tilde{A}_m\rho) e^{im\left(\frac{z}{2r}-\pi\right)}; \\ \psi_e^{(4)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \ell_n H_0^{(1)}(j_{0n}) J_0\left(\frac{j_{0n}}{t}\rho\right) \times \\ &\quad \times \left\{ e^{iy_{n4}(2\pi r+z)} + e^{iy_{n4}(2\pi r-z)} \right\} + \\ &+ \sum_{m=-\infty}^{\infty} k_m H_0^{(1)}(\tilde{A}_m) J_0\left(\frac{\tilde{A}_m}{t}\rho\right) e^{im\left(\frac{z}{2r}-\pi\right)}; \\ \psi_e^{(5)} &= \sum_{n=1}^{\infty} s_n e^{-iy_{n5}z} H_0^{(1)}(j_{0n}) J_0(j_{0n}\rho), \end{aligned}$$

где $a_n, d_n, \ell_n, s_n \sim E_n^{(p)}$, $b_m, c_m, f_m, k_m \sim F_m^{(p)}$ – искомые элементы p -го столбца матрицы рассеяния на стыке.

Отличные от нуля составляющие поля определяются из уравнений Максвелла по формулам:

$$E_z = \left(\alpha^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi_e; \quad \dot{A}_p = \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial z} \psi_e; \quad H_\phi = i \alpha \frac{\partial}{\partial \rho} \psi_e \quad (8)$$

и имеют вид:

– в области 1:

$$\begin{aligned} E_z^{(1)} &= \sum_{n=1}^{\infty} h_{ne}^2 \left\{ \delta_n^p e^{-ig_n(z-2\pi r)} + a_n e^{ig_n(z-2\pi r)} \right\} \times \\ &\quad \times \left\{ \frac{J_0(h_{ne}\rho)}{J_0(h_{ne}t)} - \frac{N_0(h_{ne}\rho)}{N_0(h_{ne}t)} \right\}; \\ E_\rho^{(1)} &= i \sum_{n=1}^{\infty} h_{ne} g_n \left\{ \delta_n^p e^{-ig_n(z-2\pi r)} - b_n e^{ig_n(z-2\pi r)} \right\} \times \\ &\quad \times \left\{ \frac{J_1(h_{ne}\rho)}{J_0(h_{ne}t)} - \frac{N_1(h_{ne}\rho)}{N_0(h_{ne}t)} \right\}; \end{aligned} \quad (9)$$

$$H_\phi^{(1)} = -i \alpha \sum_{n=1}^{\infty} h_{ne} \left\{ \delta_n^p e^{-ig_n(z-2\pi r)} + a_n e^{ig_n(z-2\pi r)} \right\} \times$$

$$\times \left\{ \frac{J_1(h_{ne}\rho)}{J_0(h_{ne}t)} - \frac{N_1(h_{ne}\rho)}{N_0(h_{ne}t)} \right\},$$

где g_n определяется левой формулой (1);

– в области 2:

$$\begin{aligned} E_z^{(2)} &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{A}_m^2 \left\{ b_m \frac{H_0^{(1)}(\tilde{A}_m\rho)}{H_0^{(1)}(\tilde{A}_m)} + \right. \\ &\quad \left. + c_m \frac{H_0^{(2)}(\tilde{A}_m\rho)}{H_0^{(2)}(\tilde{A}_m)} \right\} e^{im\left(\frac{z}{2r}-\pi\right)}; \end{aligned} \quad (10)$$

$$E_\rho^{(2)} = -i \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{A}_m \frac{m}{2r} \left\{ b_m \frac{H_1^{(1)}(\tilde{A}_m\rho)}{H_0^{(1)}(\tilde{A}_m)} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + c_m \frac{H_1^{(2)}(\tilde{A}_m \rho)}{H_0^{(2)}(\tilde{A}_m)} \left\} e^{\operatorname{im}\left(\frac{z}{2r} - \pi\right)}; \\
H_\varphi^{(2)} &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{A}_m \left\{ b_m \frac{H_1^{(1)}(\tilde{A}_m \rho)}{H_0^{(1)}(\tilde{A}_m)} + \right. \\
& \left. + c_m \frac{H_1^{(2)}(\tilde{A}_m \rho)}{H_0^{(2)}(\tilde{A}_m)} \right\} e^{\operatorname{im}\left(\frac{z}{2r} - \pi\right)}; \\
\text{— в области 3:} \\
E_Z^{(3)} &= \sum_{n=1}^{\infty} d_n h_{ne}^2 \left\{ e^{i g_n (2\pi r + z)} + e^{i g_n (2\pi r - z)} \right\} \times \\
& \times \left\{ \frac{J_0(h_{ne} \rho)}{J_0(h_{ne} t)} - \frac{N_0(h_{ne} \rho)}{N_0(h_{ne} t)} \right\} + \\
& + \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m \tilde{A}_m^2 H_0^{(1)}(\tilde{A}_m) J_0(\tilde{A}_m \rho) e^{\operatorname{im}\left(\frac{z}{2r} - \pi\right)}; \\
E_\rho^{(3)} &= -i \sum_{n=1}^{\infty} d_n h_{ne} g_n \left\{ e^{i g_n (2\pi r + z)} - e^{i g_n (2\pi r - z)} \right\} \times \\
& \times \left\{ \frac{J_1(h_{ne} \rho)}{J_0(h_{ne} t)} - \frac{N_1(h_{ne} \rho)}{N_0(h_{ne} t)} \right\} - \quad (11) \\
& - i \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m \tilde{A}_m \frac{m}{2r} H_0^{(1)}(\tilde{A}_m) J_1(\tilde{A}_m \rho) e^{\operatorname{im}\left(\frac{z}{2r} - \pi\right)}; \\
H_\varphi^{(3)} &= -i a \sum_{n=1}^{\infty} d_n h_n \left\{ e^{i g_n (2\pi r + z)} + e^{i g_n (2\pi r - z)} \right\} \times \\
& \times \left\{ \frac{J_1(h_{ne} \rho)}{J_0(h_{ne} t)} - \frac{N_1(h_{ne} \rho)}{N_0(h_{ne} t)} \right\} - \\
& - i a \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m \tilde{A}_m H_0^{(1)}(\tilde{A}_m) J_1(\tilde{A}_m \rho) e^{\operatorname{im}\left(\frac{z}{2r} - \pi\right)}; \\
\text{— в области 4:} \\
E_Z^{(4)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \ell_n \left(\frac{j_{0n}}{t} \right)^2 H_0^{(1)}(j_{0n}) J_0 \left(\frac{j_{0n}}{t} \rho \right) \times \\
& \times \left\{ e^{i \gamma_{n4} (2\pi r + z)} + e^{i \gamma_{n4} (2\pi r - z)} \right\} + \\
& + \sum_{m=-\infty}^{\infty} k_m \tilde{A}_m^2 H_0^{(1)}(\tilde{A}_m) J_0 \left(\frac{\tilde{A}_m}{t} \rho \right) e^{\operatorname{im}\left(\frac{z}{2r} - \pi\right)}; \\
E_\rho^{(4)} &= -i \sum_{n=1}^{\infty} \ell_n \frac{j_{0n}}{t} \gamma_{n4} H_0^{(1)}(j_{0n}) J_1 \left(\frac{j_{0n}}{t} \rho \right) \times \\
& \times \left\{ e^{i \gamma_{n4} (2\pi r + z)} - e^{i \gamma_{n4} (2\pi r - z)} \right\} - \quad (12) \\
& - i \sum_{m=-\infty}^{\infty} k_m \frac{\tilde{A}_m}{t} \frac{m}{2r} H_0^{(1)}(\tilde{A}_m) J_1 \left(\frac{\tilde{A}_m}{t} \rho \right) \times \\
& \times e^{\operatorname{im}\left(\frac{z}{2r} - \pi\right)};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_\varphi^{(4)} &= -i a \sum_{n=1}^{\infty} \ell_n \frac{j_{0n}}{t} H_0^{(1)}(j_{0n}) J_1 \left(\frac{j_{0n}}{t} \rho \right) \times \\
& \times \left\{ e^{i \gamma_{n4} (2\pi r + z)} + e^{i \gamma_{n4} (2\pi r - z)} \right\} - \\
& - i a \sum_{m=-\infty}^{\infty} k_m \frac{\tilde{A}_m}{t} H_0^{(1)}(\tilde{A}_m) J_1 \left(\frac{\tilde{A}_m}{t} \rho \right) e^{\operatorname{im}\left(\frac{z}{2r} - \pi\right)}, \\
\text{где } \gamma_{n4} &\text{ определяется верхней формулой (4);} \\
\text{— в области 5:}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_Z^{(5)} &= \sum_{n=1}^{\infty} s_n j_{0n}^2 e^{-i \gamma_{n5} z} H_0^{(1)}(j_{0n}) J_0(j_{0n} \rho); \\
E_\rho^{(5)} &= i \sum_{n=1}^{\infty} s_n j_{0n} \gamma_{n5} e^{-i \gamma_{n5} z} H_0^{(1)}(j_{0n}) \times J_1(j_{0n} \rho); \quad (13) \\
H_\varphi^{(5)} &= -i a \sum_{n=1}^{\infty} s_n j_{0n} e^{-i \gamma_{n5} z} H_0^{(1)}(j_{0n}) J_1(j_{0n} \rho), \\
\text{где } \gamma_{n5} &\text{ определяется левой формулой (5).}
\end{aligned}$$

Для удовлетворения условий непрерывности необходимо также выполнение между амплитудами f_m промежуточной области 3 соотношения

$$f_m = f_{-m}. \quad (14)$$

Из условия непрерывности $E_\rho^{(1)} = E_\rho^{(3)}$ при $z = 2\pi r$ следует

$$\begin{aligned}
i \sum_{n=1}^{\infty} h_{ne} g_n \left\{ \delta_n^p - a_n \right\} \left\{ \frac{J_1(h_{ne} \rho)}{J_0(h_{ne} t)} - \frac{N_1(h_{ne} \rho)}{N_0(h_{ne} t)} \right\} = \\
= -i \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m \frac{m}{2r} \tilde{A}_m H_0^{(1)}(\tilde{A}_m) J_1(\tilde{A}_m \rho) - \\
- i \sum_{n=1}^{\infty} d_n h_{ne} g_n \left(e_n^2 - 1 \right) \left\{ \frac{J_1(h_{ne} \rho)}{J_0(h_{ne} t)} - \frac{N_1(h_{ne} \rho)}{N_0(h_{ne} t)} \right\},
\end{aligned}$$

а так как, с учетом соотношения (14),

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m \frac{m}{2r} \tilde{A}_m H_0^{(1)}(\tilde{A}_m) J_1(\tilde{A}_m \rho) \equiv 0,$$

получим связь между a_n и d_n :

$$a_n = d_n (e_n^2 - 1) + \delta_n^p, \quad (15)$$

где $e_n^2 = e^{4i g_n \pi r}$.

Из граничного условия $E_z^{(2)} = 0$ при $\rho = \theta$ имеем

$$b_m \frac{H_0^{(1)}(\tilde{A}_m \theta)}{H_0^{(1)}(\tilde{A}_m)} + c_m \frac{H_0^{(2)}(\tilde{A}_m \theta)}{H_0^{(2)}(\tilde{A}_m)} = 0,$$

или

$$c_m = -b_m \lambda_m^e, \quad (16)$$

где

$$\lambda_m^e = \frac{H_0^{(1)}(\tilde{A}_m \theta) H_0^{(2)}(\tilde{A}_m)}{H_0^{(2)}(\tilde{A}_m \theta) H_0^{(1)}(\tilde{A}_m)}.$$

Выполнение условия непрерывности составляющих E_z на границе $\rho = 1$ приводит к соотношению

$$\begin{aligned} & \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m \tilde{A}_m^2 H_0^{(1)}(\tilde{A}_m) J_0(\tilde{A}_m) e^{\operatorname{im}\left(\frac{z}{2r}-\pi\right)} + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} d_n h_{ne}^2 \left\{ e^{ig_n(2\pi r+z)} + e^{ig_n(2\pi r-z)} \right\} \times \\ & \times \left\{ \frac{J_0(h_{ne})}{J_0(h_{net})} - \frac{N_0(h_{ne})}{N_0(h_{net})} \right\} = \\ & = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{A}_m^2 (b_m + c_m) e^{\operatorname{im}\left(\frac{z}{2r}-\pi\right)}, \end{aligned}$$

которое, в силу выполнения уравнения (2), связывает между собой амплитуды f_m и b_m :

$$f_m = b_m \frac{1 - \lambda_m^e}{H_0^{(1)}(\tilde{A}_m) J_0(\tilde{A}_m)}. \quad (17)$$

Из условия непрерывности составляющих E_z на границе $\rho = t$ следует уравнение

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} d_n h_{ne}^2 \left\{ e^{ig_n(2\pi r+z)} + e^{ig_n(2\pi r-z)} \right\} \times \\ & \times \left\{ \frac{J_0(h_{net})}{J_0(h_{ne}t)} - \frac{N_0(h_{net})}{N_0(h_{ne}t)} \right\} + \\ & + \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m \tilde{A}_m^2 H_0^{(1)}(\tilde{A}_m) J_0(\tilde{A}_m) e^{\operatorname{im}\left(\frac{z}{2r}-\pi\right)} = \\ & = \sum_{n=1}^{\infty} \ell_n \left(\frac{j_{0n}}{t} \right)^2 H_0^{(1)}(j_{0n}) J_0(j_{0n}) \times \\ & \times \left\{ e^{iy_{n4}(2\pi r+z)} + e^{iy_{n4}(2\pi r-z)} \right\} + \\ & + \sum_{m=-\infty}^{\infty} k_m \tilde{A}_m^2 H_0^{(1)}(\tilde{A}_m) J_0(\tilde{A}_m) e^{\operatorname{im}\left(\frac{z}{2r}-\pi\right)}, \end{aligned}$$

из которого, в силу равенства $J_0(j_{0n}) = 0$, следует соотношение

$$k_m = f_m \frac{J_0(\tilde{A}_m t)}{J_0(\tilde{A}_m)}. \quad (18)$$

Сшивание составляющих H_φ на границе областей 2 и 3 приводит, с учетом (17), к функциональному уравнению

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n \tau_n^e e_n \left\{ e^{ig_n z} + e^{-ig_n z} \right\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m \Delta_m^e e^{\operatorname{im}\left(\frac{z}{2r}-\pi\right)}, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \text{где } \Delta_m^e = \tilde{A}_m \left\{ \frac{H_1^{(1)}(\tilde{A}_m)}{H_0^{(1)}(\tilde{A}_m)} - \lambda_m^e \frac{H_1^{(2)}(\tilde{A}_m)}{H_0^{(2)}(\tilde{A}_m)} - \right. \\ \left. - (1 - \lambda_m^e) \frac{J_1(\tilde{A}_m)}{J_0(\tilde{A}_m)} \right\}, \end{aligned}$$

$$\tau_n^e = h_{ne} \left\{ \frac{J_1(h_{ne})}{J_0(h_{net})} - \frac{N_1(h_{ne})}{N_0(h_{net})} \right\}, \quad e_n = e^{2\pi i g_n}. \quad (20)$$

Представим в (19):

$$\tau_n^e e_n \left\{ e^{ig_n z} + e^{-ig_n z} \right\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m^n \Delta_m^e e^{\operatorname{im}\left(\frac{z}{2r}-\pi\right)}, \quad (21)$$

где коэффициенты α_m^n найдем как

$$\begin{aligned} \alpha_m^n &= \frac{\tau_n^e e_n}{\Delta_m^n 4\pi r} \int_{-2\pi r}^{2\pi r} \left\{ e^{ig_n z} + e^{-ig_n z} \right\} e^{-\operatorname{im}\left(\frac{z}{2r}-\pi\right)} dz = \\ &= \frac{\tau_n^e e_n (-1)^m}{\Delta_m^n 4\pi r} \int_{-2\pi r}^{2\pi r} \left\{ e^{i(g_n - m/2r)z} + e^{i(g_n + m/2r)z} \right\} dz = \\ &= \frac{\tau_n^e e_n \sin(2g_n \pi r)}{\Delta_m^n 2\pi r} \left\{ \frac{1}{g_n - m/2r} + \frac{1}{g_n + m/2r} \right\} = \\ &= \frac{\tau_n^e (e_n^2 - 1)}{2\pi i \Delta_m^n} \frac{g_n}{g_n^2 - (m/2r)^2}. \end{aligned}$$

Окончательно

$$\alpha_m^n = \begin{cases} \frac{\tau_n^e (e_n^2 - 1)}{2\pi i \Delta_m^n} \frac{g_n}{g_n^2 - (m/2r)^2}, & g_n \neq \frac{m}{2r}, \\ \tau_n^e / \Delta_m^n, & g_n = m/2r. \end{cases} \quad (22)$$

Подставив (21) в (19), получим бесконечную систему алгебраических уравнений относительно b_m и d_n :

$$b_m = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \alpha_m^n. \quad (23)$$

Выполняя условие непрерывности $H_\varphi^{(3)} = H_\varphi^{(4)}$ при $\rho = t$ и учитывая (15) и (17), а также соотношение

$$j_{0n} H_0^{(1)}(j_{0n}) J_1(j_{0n}) = -\frac{2}{\pi i},$$

получим функциональное уравнение

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n \phi_n^e e_n \left\{ e^{ig_n z} + e^{-ig_n z} \right\} + \quad (24)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \ell_n \frac{2e_{n4}}{\pi i t} \left\{ e^{iy_{n4} z} + e^{-iy_{n4} z} \right\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m \Omega_m^e e^{\operatorname{im}\left(\frac{m}{2r}-\pi\right)},$$

$$\text{где } \phi_n^e = h_{ne} \left\{ \frac{J_1(h_{net})}{J_0(h_{ne}t)} - \frac{N_1(h_{net})}{N_0(h_{ne}t)} \right\}, \quad e_{n4} = e^{2\pi i y_{n4}},$$

$$\begin{aligned} \Omega_m^e &= \frac{(1 - \lambda_m^e)}{t} \left\{ \frac{\tilde{A}_m J_0(\tilde{A}_m t) J_1(\tilde{A}_m)}{J_0^2(\tilde{A}_m)} - \right. \\ & \left. - \frac{(\tilde{A}_m t) J_0(\tilde{A}_m) J_1(\tilde{A}_m t)}{J_0^2(\tilde{A}_m)} \right\}. \end{aligned}$$

Произведем в (24) перераспределение:

$$\phi_n^e e_n \left\{ e^{ig_n z} + e^{-ig_n z} \right\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mu_m^n \Omega_m^e e^{\operatorname{im}\left(\frac{z}{2r}-\pi\right)}, \quad (25)$$

$$\frac{2e_n 4}{\pi i t} \left\{ e^{i\gamma_n 4z} + e^{-i\gamma_n 4z} \right\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \xi_m^n \Omega_m^e e^{im \left(\frac{z}{2r} - \pi \right)} \quad (26)$$

с коэффициентами

$$\mu_m^n = \frac{\phi_n^e e_n}{\Omega_m^e 4\pi r} \int_{-2\pi r}^{2\pi r} \left\{ e^{i\gamma_n z} + e^{-i\gamma_n z} \right\} e^{-im \left(\frac{z}{2r} - \pi \right)} dz,$$

$$\xi_m^n = \frac{2e_n 4}{\pi i t \Omega_m^e 4\pi r} \int_{-2\pi r}^{2\pi r} \left\{ e^{i\gamma_n 4z} + e^{-i\gamma_n 4z} \right\} e^{-im \left(\frac{z}{2r} - \pi \right)} dz,$$

равными

$$\mu_m^n = \begin{cases} \frac{\phi_n^e (e_n^2 - 1)}{\Omega_m^e 2\pi r i} \frac{g_n}{g_n^2 - (m/2r)^2}, & g_n \neq m/2r, \\ \phi_n^e / \Omega_m^e, & g_n = m/2r, \end{cases}$$

$$\xi_m^n = \begin{cases} \frac{1 - e_n^2}{\pi^2 t r \Omega_m^e} \frac{\gamma_n 4}{\gamma_n^2 - (m/2r)^2}, & \gamma_n 4 \neq \frac{m}{2r}, \\ 2i / \pi t \Omega_m^e, & \gamma_n 4 = m/2r. \end{cases}$$

После подстановки (25) и (26) в (24) имеем

$$b_m = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \mu_m^n + \sum_{n=1}^{\infty} l_n \xi_m^n,$$

а с учетом (21) –

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n \alpha_m^n = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \mu_m^n + \sum_{n=1}^{\infty} l_n \xi_m^n,$$

откуда
$$l_n = d_n \frac{\alpha_m^n - \mu_m^n}{\xi_m^n}. \quad (27)$$

Выполнение условия непрерывности составляющих H_φ на границе $z = 0$ приводит к функциональному уравнению

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_n j_{0n} H_0^{(1)}(j_{0n}) J_1(j_{0n} \rho) - \sum_{n=1}^{\infty} d_n h_{ne} 2e_n \left\{ \frac{J_1(h_{ne} \rho)}{J_0(h_{ne} t)} - \frac{N_1(h_{ne} \rho)}{N_0(h_{ne} t)} \right\} = \quad (28)$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m \frac{(1 - \lambda_m^e) \tilde{A}_m}{J_0(\tilde{A}_m)} J_1(\tilde{A}_m \rho).$$

Умножим уравнение (28) на $\rho J_1(j_{0n} \rho)$ и проинтегрируем по ρ от 0 до 1:

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_n j_{0n} H_0^{(1)}(j_{0n}) \int_0^1 \rho J_1^2(j_{0n} \rho) d\rho - \sum_{n=1}^{\infty} d_n h_{ne} 2e_n \int_0^1 \rho \left\{ \frac{J_1(h_{ne} \rho)}{J_0(h_{ne} t)} - \frac{N_1(h_{ne} \rho)}{N_0(h_{ne} t)} \right\} \times$$

$$\times J_1(j_{0n} \rho) d\rho = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m \frac{(1 - \lambda_m^e) \tilde{A}_m}{J_0(\tilde{A}_m)} \times \quad (29)$$

$$\int_0^1 \rho J_1(\tilde{A}_m \rho) J_1(j_{0n} \rho) d\rho.$$

Множитель при s_n в первом слагаемом слева равен [5]:

$$j_{0n} H_0^{(1)}(j_{0n}) \int_0^1 \rho J_1^2(j_{0n} \rho) d\rho =$$

$$= \frac{j_{0n}}{2} J_1^2(j_{0n}) H_0^{(1)}(j_{0n}) = -\frac{J_1(j_{0n})}{\pi}.$$

После деления на него выражение (29) будет иметь вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_n - \sum_{n=1}^{\infty} d_n \zeta_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n^m \quad (30)$$

или
$$s_n - d_n \zeta_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m \eta_n^m, \quad (31)$$

где
$$\zeta_n = -\frac{h_{ne} 2e_n \pi i}{J_1(j_{0n})} \int_0^1 \rho \left\{ \frac{J_1(h_{ne} \rho)}{J_0(h_{ne} t)} - \frac{N_1(h_{ne} \rho)}{N_0(h_{ne} t)} \right\} \times$$

$$\times J_1(j_{0n} \rho) d\rho,$$

$$\eta_n^m = -\frac{(1 - \lambda_m^e) \tilde{A}_m \pi i}{J_0(\tilde{A}_m) J_1(j_{0n})} \int_0^1 \rho J_1(\tilde{A}_m \rho) J_1(j_{0n} \rho) d\rho.$$

Сумма по n в (30) обусловлена разложением в (28) функций, полных на интервале $[-2\pi r, 2\pi r]$, по функциям, полным на интервале $[0, 1]$:

$$\frac{(1 - \lambda_m^e) \tilde{A}_m}{J_0(\tilde{A}_m)} J_1(\tilde{A}_m \rho) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n^m j_{0n} H_0^{(1)}(j_{0n}) J_1(j_{0n} \rho).$$

Коэффициенты ζ_n в соответствии с [5] равны

$$\zeta_n = -\frac{h_{ne} 2e_n \pi i}{J_1(j_{0n})} \left\{ \frac{1}{J_0(h_{ne} t)} \int_0^1 \rho J_1(h_{ne} \rho) J_1(j_{0n} \rho) \times \right.$$

$$\times d\rho - \frac{1}{N_0(h_{ne} t)} \int_0^1 \rho N_1(h_{ne} \rho) J_1(j_{0n} \rho) d\rho \left. \right\} =$$

$$= \frac{h_{ne}^2 2e_n \pi i}{h_{ne}^2 - j_{0n}^2} \left\{ \frac{J_0(h_{ne})}{J_0(h_{ne} t)} - \frac{N_0(h_{ne})}{N_0(h_{ne} t)} \right\} = 0$$

в силу уравнения (2).

Коэффициенты η_n^m равны

$$\eta_n^m = -\frac{(1 - \lambda_m^e) \tilde{A}_m \pi i}{J_0(\tilde{A}_m) J_1(j_{0n})} \times$$

$$\times \frac{j_{0n} J_0(j_{0n}) J_1(\tilde{A}_m) - \tilde{A}_m J_0(\tilde{A}_m) J_1(j_{0n})}{\tilde{A}_m^2 - j_{0n}^2} =$$

$$= (1 - \lambda_m^e) \frac{\pi i \tilde{A}_m^2}{\tilde{A}_m^2 - j_{0n}^2}$$

в силу уравнения $J_0(j_{0n}) = 0$.

Окончательно

$$\eta_n^m = \begin{cases} (1 - \lambda_m^e) \frac{\pi i \tilde{A}_m^2}{\tilde{A}_m^2 - j_{0n}^2}, & \tilde{A}_m \neq j_{0n}, \\ \pi i (1 - \lambda_m^e), & \tilde{A}_m = j_{0n}. \end{cases}$$

Тогда система (31) для определения коэффициентов s_n примет вид

$$s_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m \eta_n^m. \quad (32)$$

Удовлетворяя условие непрерывности составляющих E_z на границе $z = 2\pi t$, получаем, с учетом соотношений (15) и (17), функциональное уравнение

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2h_{ne}^2 (\delta_n^p - d_n) \left\{ \frac{J_0(h_{ne}\rho)}{J_0(h_{ne}t)} - \frac{N_0(h_{ne}\rho)}{N_0(h_{ne}t)} \right\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m \frac{(1 - \lambda_m^e)}{J_0(\tilde{A}_m)} \tilde{A}_m^2 J_0(\tilde{A}_m \rho). \quad (33)$$

Используем разложение

$$\frac{(1 - \lambda_m^e) \tilde{A}_m^2}{J_0(\tilde{A}_m)} J_0(\tilde{A}_m \rho) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^m 2h_{ne}^2 \left\{ \frac{J_0(h_{ne}\rho)}{J_0(h_{ne}t)} - \frac{N_0(h_{ne}\rho)}{N_0(h_{ne}t)} \right\}, \quad (34)$$

где

$$\beta_n^m = \frac{(1 - \lambda_m^e) \tilde{A}_m^2}{2h_{ne}^2 J_0(\tilde{A}_m)} \times \frac{\int_t^1 \rho J_0(\tilde{A}_m \rho) \left\{ \frac{J_0(h_{ne}\rho)}{J_0(h_{ne}t)} - \frac{N_0(h_{ne}\rho)}{N_0(h_{ne}t)} \right\} d\rho}{\int_t^1 \rho \left\{ \frac{J_0(h_{ne}\rho)}{J_0(h_{ne}t)} - \frac{N_0(h_{ne}\rho)}{N_0(h_{ne}t)} \right\}^2 d\rho}. \quad (35)$$

Обозначим интеграл в знаменателе как

$$\sigma_n^e = I_1 + I_2 + I_3 \quad (36)$$

и вычислим I_1 , I_2 и I_3 :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_t^1 \rho \frac{J_0^2(h_{ne}\rho)}{J_0^2(h_{ne}t)} d\rho = \frac{1}{J_0^2(h_{ne}t)} \int_t^1 \rho J_0^2(h_{ne}\rho) d\rho = \\ &= \frac{1}{2J_0^2(h_{ne}t)} \left\{ \left[J_1^2(h_{ne}) + J_0^2(h_{ne}) \right] - \right. \\ &\quad \left. - t^2 \left[J_1^2(h_{ne}t) + J_0^2(h_{ne}t) \right] \right\}; \\ I_2 &= \int_t^1 \rho \frac{N_0^2(h_{ne}\rho)}{N_0^2(h_{ne}t)} d\rho = \frac{1}{N_0^2(h_{ne}t)} \int_t^1 \rho N_0^2(h_{ne}\rho) d\rho = \\ &= \frac{1}{2N_0^2(h_{ne}t)} \left\{ \left[N_1^2(h_{ne}) + N_0^2(h_{ne}) \right] - \right. \\ &\quad \left. - t^2 \left[N_1^2(h_{ne}t) + N_0^2(h_{ne}t) \right] \right\}; \\ I_3 &= -\frac{2}{J_0(h_{ne}t)N_0(h_{ne}t)} \int_t^1 \rho J_0(h_{ne}\rho)N_0(h_{ne}\rho) d\rho = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{J_0(h_{ne}t)N_0(h_{ne}t)} \left\{ \left[J_0(h_{ne})N_0(h_{ne}) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + J_1(h_{ne})N_1(h_{ne}) \right] - t^2 \left[J_0(h_{ne}t)N_0(h_{ne}t) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + J_1(h_{ne}t)N_1(h_{ne}t) \right] \right\}. \end{aligned}$$

При вычислении σ_n^e использован интеграл

$$\int_0^t z C_0(z) D_0(z) dz = \left(t^2 / 2 \right) \cdot \{ C_0(t) D_0(t) + C_1(t) (D_1(t)) \},$$

где $C_0(z)$, $D_0(z)$ – произвольные цилиндрические функции [6].

Интеграл в числителе обозначим как

$$\varepsilon_n^m = I_4 - I_5 \quad (37)$$

и вычислим I_4 и I_5 :

$$\begin{aligned} I_4 &= \frac{1}{J_0(h_{ne}t)} \int_t^1 \rho J_0(\tilde{A}_m \rho) J_0(h_{ne}\rho) d\rho = \\ &= \frac{[\tilde{A}_m J_0(h_{ne}) J_1(\tilde{A}_m) - h_{ne} J_0(\tilde{A}_m) J_1(h_{ne})]}{J_0(h_{ne}t) (\tilde{A}_m^2 - h_{ne}^2)} - \\ &\quad - \frac{t [\tilde{A}_m J_0(h_{ne}t) J_1(\tilde{A}_m t) - h_{ne} J_0(\tilde{A}_m t) J_1(h_{ne}t)]}{J_0(h_{ne}t) (\tilde{A}_m^2 - h_{ne}^2)}; \\ I_5 &= \frac{1}{N_0(h_{ne}t)} \int_t^1 \rho J_0(\tilde{A}_m \rho) N_0(h_{ne}\rho) d\rho = \\ &= \frac{[\tilde{A}_m N_0(h_{ne}) J_1(\tilde{A}_m) - h_{ne} J_0(\tilde{A}_m) N_1(h_{ne})]}{N_0(h_{ne}t) (\tilde{A}_m^2 - h_{ne}^2)} - \\ &\quad - \frac{t [\tilde{A}_m N_0(h_{ne}t) J_1(\tilde{A}_m t) - h_{ne} J_0(\tilde{A}_m t) N_1(h_{ne}t)]}{N_0(h_{ne}t) (\tilde{A}_m^2 - h_{ne}^2)}. \end{aligned}$$

После подстановки σ_n^e и ε_n^m в (35) получим

$$\beta_n^m = \frac{(1 - \lambda_m^e) \tilde{A}_m^2 \varepsilon_n^m}{2h_{ne}^2 J_0(\tilde{A}_m) \sigma_n^e}, \quad (38)$$

тогда уравнение (33) примет вид

$$d_n = \delta_n^p - \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m \beta_n^m \quad (39)$$

или

$$d_v = \delta_v^p - \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m \beta_v^m. \quad (40)$$

Подставив (23) в (39):

$$\begin{aligned} d_v &= \delta_v^p - \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} d_n \alpha_m^n \right) \beta_v^m = \\ &= \delta_v^p - \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m^n \beta_v^m, \end{aligned}$$

получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений второго рода относительно амплитуд d_n :

$$d_v + \sum_{n=1}^{\infty} d_n P_{nv} = \delta_v^p, \quad (41)$$

с матричными коэффициентами

$$P_{nv} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m^n \beta_v^m. \quad (42)$$

Коэффициенты $a_n, b_m, c_m, f_m, k_m, \ell_n$ и s_n вычисляются по формулам (15), (23), (16), (17), (18), (27) и (32).

Приближение "Узкие щели"

Явное решение системы (40) для структуры с малой относительной высотой цилиндрического резонатора ($r \ll 1$) в многоволновом случае можно получить с помощью метода последовательных приближений [7].

Представим матричные коэффициенты (41) в виде

$$P_{nv} = P_{nv}^{(0)} + \tilde{P}_{nv}, \quad (43)$$

где коэффициенты $P_{nv}^{(0)}$ ($m = 0$) равны

$$P_{nv}^{(0)} = \frac{\alpha^2 (1 - \lambda_0^e)}{4\pi i \Delta_0^e J_0(\alpha)} \psi_v \varphi_n, \quad (44)$$

$$\psi_v = \frac{\varepsilon_v^0}{h_{ve}^2 \sigma_v^e}, \quad \varphi_n = \frac{(e_n^2 - 1) \tau_n^e}{g_n}, \quad h_{ve} = \frac{v\pi}{1-t},$$

$$\Delta_0^e = \alpha \left\{ \frac{H_1^{(1)}(\alpha)}{H_0^{(1)}(\alpha)} - \lambda_0^e \frac{H_1^{(2)}(\alpha)}{H_0^{(2)}(\alpha)} - (1 - \lambda_0^e) \frac{J_1(\alpha)}{J_0(\alpha)} \right\},$$

$$\lambda_0^e = \frac{H_0^{(1)}(\alpha\theta) H_0^{(2)}(\alpha)}{H_0^{(2)}(\alpha\theta) H_0^{(1)}(\alpha)},$$

$\tau_n^e, \varepsilon_v^0$ и σ_v^e определяются выражениями (20), (37) и (36), а коэффициенты \tilde{P}_{nv} имеют вид

$$\tilde{P}_{nv} = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m^n \beta_v^m,$$

где α_m^n и β_v^m находятся из (22) и (38).

Для матричных коэффициентов P_{nv} , имеющих вид (43), систему (41) запишем как

$$d_v + \sum_{n=1}^{\infty} d_n P_{nv}^{(0)} = \delta_v^p - \sum_{n=1}^{\infty} d_n \tilde{P}_{nv}. \quad (45)$$

Умножим (45) на φ_v и просуммируем по v :

$$\begin{aligned} \sum_{v=1}^{\infty} d_v \varphi_v + \frac{\alpha^2 (1 - \lambda_0^e)}{4\pi i \Delta_0^e J_0(\alpha)} \sum_{v=1}^{\infty} \psi_v \varphi_v \sum_{n=1}^{\infty} d_n \varphi_n &= \\ &= \varphi_p - \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sum_{v=1}^{\infty} \varphi_v \tilde{P}_{nv} \end{aligned}$$

$$\text{или} \quad \left\{ \frac{4\pi i \Delta_0^e J_0(\alpha) + \alpha^2 (1 - \lambda_0^e) S}{4\pi i \Delta_0^e J_0(\alpha)} \right\} \sum_{n=1}^{\infty} d_n \varphi_n =$$

$$= \varphi_p - \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sum_{v=1}^{\infty} \varphi_v \tilde{P}_{nv},$$

$$\text{откуда} \quad \sum_{n=1}^{\infty} d_n \varphi_n = \frac{4\pi i \Delta_0^e J_0(\alpha)}{4\pi i \Delta_0^e J_0(\alpha) + \alpha^2 (1 - \lambda_0^e) S} \times \\ \times \left\{ \varphi_p - \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sum_{v=1}^{\infty} \varphi_v \tilde{P}_{nv} \right\}, \quad (46)$$

$$\text{где} \quad S = \sum_{v=1}^{\infty} \psi_v \varphi_v.$$

Перепишем (45) в виде

$$d_v + \frac{\alpha^2 (1 - \lambda_0^e) \psi_v}{4\pi i \Delta_0^e J_0(\alpha)} \sum_{n=1}^{\infty} d_n \varphi_n = \delta_v^p - \sum_{n=1}^{\infty} d_n \tilde{P}_{nv}$$

и подставим в него значение (46). Получим

$$d_v + \frac{\alpha^2 (1 - \lambda_0^e) \psi_v \left\{ \varphi_p - \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sum_{v=1}^{\infty} \varphi_v \tilde{P}_{nv} \right\}}{4\pi i \Delta_0^e J_0(\alpha) + \alpha^2 (1 - \lambda_0^e) S} = \\ = \delta_v^p - \sum_{n=1}^{\infty} d_n \tilde{P}_{nv}$$

$$\text{или} \quad d_v + \sum_{n=1}^{\infty} d_n A_{nv} = L_v^p, \quad (47)$$

$$\text{где} \quad A_{nv} = \tilde{P}_{nv} + \frac{\alpha^2 (1 - \lambda_0^e) \psi_v \sum_{v=1}^{\infty} \varphi_v \tilde{P}_{nv}}{4\pi i \Delta_0^e J_0(\alpha) + \alpha^2 (1 - \lambda_0^e) S},$$

$$L_v^p = \delta_v^p - \frac{\alpha^2 (1 - \lambda_0^e) \psi_v \varphi_p}{4\pi i \Delta_0^e J_0(\alpha) + \alpha^2 (1 - \lambda_0^e) S}.$$

В соответствии с [6], с точностью до $r \ll 1$:

$$d_v = L_v^p.$$

$$\text{Тогда} \quad d_v = \delta_v^p - \frac{\alpha^2 (1 - \lambda_0^e) \psi_v \varphi_p}{4\pi i \Delta_0^e J_0(\alpha) + \alpha^2 (1 - \lambda_0^e) S},$$

коэффициенты отражения в область 1 равны

$$a_v = \delta_v^p e_v^2 - (e_v^2 - 1) \frac{\alpha^2 (1 - \lambda_0^e) \psi_v \varphi_p}{4\pi i \Delta_0^e J_0(\alpha) + \alpha^2 (1 - \lambda_0^e) S},$$

а коэффициенты прохождения в область 5 -

$$s_v = \left\{ \delta_v^p - \frac{\alpha^2 (1 - \lambda_0^e) \psi_v \varphi_p}{4\pi i \Delta_0^e J_0(\alpha) + \alpha^2 (1 - \lambda_0^e) S} \right\} \frac{\pi \alpha^2 (1 - \lambda_0^e)}{\gamma_v^2}.$$

Явные формулы для коэффициентов $b_m, \ell_n, c_m,$

f_m и k_m легко получить из выражений (23), (27), (16), (17) и (18).

Приближение геометрической оптики

На высоких частотах ($\varepsilon \gg 1, \varepsilon \tau \gg 1$) нужно учитывать, что амплитуды дифрагированного на соединении поля $a_n, b_m, c_m, f_m, k_m, \ell_n$ в s_n убывают с ростом n в m . Если $\varepsilon \gg |n_1|$ и $\varepsilon \tau \gg |m_1|$, где n_1 и m_1 – наибольшие номера гармоник с еще заметными амплитудами, то в представлении полей можно учитывать только гармоники с номерами $n < n_1$ и $m < m_1$ и приближенно для них принимать [7]:

$$g_n \approx \varepsilon, \quad \tilde{A}_m \approx \varepsilon, \quad \gamma_n \approx \varepsilon \quad (48)$$

и системы (23) и (39) записать в виде

$$b_m = \alpha_m^0 \sum_{n=1}^{\infty} d_n, \quad (49)$$

$$d_n = \delta_n^p - \beta_n^0 \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m, \quad (50)$$

где
$$\alpha_m^0 = \frac{2\varepsilon \tau \tau_n (e_0^2 - 1)}{\pi i \Delta_0^e} \frac{1}{(2\varepsilon \tau)^2 - m^2}, \quad (51)$$

$$\beta_n^0 = \frac{(1 - e_0^2) \varepsilon^2 \varepsilon_n^0}{2h_{ne}^2 J_0(\varepsilon) \sigma_n^e}, \quad e_0^2 = e^{4\varepsilon \tau \tau_i}, \quad (52)$$

λ_0^e, Δ_0^e – такие же, как и для длинноволнового приближения, а ε_n^0 определяется выражением (37) при выполнении условий (48).

Обозначим в (49) и (50)

$$\chi_n = \sum_{n=1}^{\infty} d_n, \quad \psi_m = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m \quad (53)$$

и просуммируем (49) по m , а (50) – по n . Получим

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m = \chi_n \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m^0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} d_n = 1 - \psi_m \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^0,$$

или
$$\psi_m = \chi_n S_1, \quad \chi_n = 1 - \psi_m S_2, \quad (54)$$

где
$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_m^0 = \frac{2\varepsilon \tau \tau_n (e_0^2 - 1)}{\pi i \Delta_0^e} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2\varepsilon \tau)^2 - m^2},$$

$$S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^0 = \frac{(1 - \lambda_0^e) \varepsilon^2}{2J_0(\varepsilon)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n^0}{h_{ne}^2 \sigma_n^e}.$$

Из (54) находим
$$\chi_n = \frac{1}{1 + S_1 S_2}, \quad \psi_m = \frac{S_1}{1 + S_1 S_2},$$

тогда окончательно амплитуды d_n и b_m примут вид:

$$d_n = \delta_n^p - \psi_m \beta_n^0, \quad b_m = \chi_n \alpha_m^0.$$

или
$$d_n = \delta_n^p - \frac{\beta_n^0 S_1}{1 + S_1 S_2}, \quad (55)$$

$$b_m = \frac{\alpha_m^0}{1 + S_1 S_2}. \quad (56)$$

Коэффициенты отражения в сторону коаксиальной линии a_n в соответствии с (15) и (55) будут определяться как

$$a_n = e_0^2 \delta_n^p - (e_0^2 - 1) \psi_m \beta_n^0,$$

или
$$a_n = e_0^2 \delta_n^p - (e_0^2 - 1) \frac{\beta_n^0 S_1}{1 + S_1 S_2}, \quad (57)$$

а коэффициенты прохождения в сторону круглого волновода s_n – как

$$s_n = \eta_n^0 \chi_n S_1 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m^0,$$

или

$$s_n = \frac{2\varepsilon \tau \tau_n^e (1 - \lambda_0^e) (e_0^2 - 1) S_1}{\Delta_0^e (1 + S_1 S_2) (\varepsilon^2 - j_0^2)} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2\varepsilon \tau)^2 - m^2}. \quad (58)$$

Коэффициенты отражения в область резонатора от его вертикальных стенок c_m в соответствии с (16) и (56) могут быть найдены из выражения

$$c_m = -\chi_n \lambda_0^e \alpha_m^0,$$

или

$$c_m = -\frac{\lambda_0^e \alpha_m^0}{1 + S_1 S_2}, \quad (59)$$

а коэффициенты преобразования в промежуточной области 3 в соответствии с (17), (18) и (27) – из соотношений

$$f_m = \frac{\chi_n \alpha_m^0 (1 - \lambda_0^e)}{H_0^{(1)}(\varepsilon) J_0(\varepsilon)},$$

или

$$f_m = \frac{(1 - \lambda_0^e) \alpha_m^0}{H_0^{(1)}(\varepsilon) J_0(\varepsilon) (1 + S_1 S_2)}, \quad (60)$$

$$k_m = \frac{\chi_n \alpha_m^0 (1 - \lambda_0^e) J_0(\varepsilon \tau)}{H_0^{(1)}(\varepsilon) J_0^2(\varepsilon)},$$

или

$$k_m = \frac{(1 - \lambda_0^e) \alpha_m^0 J_0(\varepsilon \tau)}{H_0^{(1)}(\varepsilon) J_0^2(\varepsilon) (1 + S_1 S_2)}, \quad (61)$$

$$\ell_n = (\delta_n^p - \psi_m \beta_n^0) \frac{\alpha_m^0 - \mu_m^0}{\xi_m^0},$$

или

$$\ell_n = \left(\delta_n^p - \frac{\beta_n^0 S_1}{1 + S_1 S_2} \right) \frac{\alpha_m^0 - \mu_m^0}{\xi_m^0}, \quad (62)$$

где

$$\mu_m^0 = \frac{2\varepsilon \tau \phi_n (e_0^2 - 1)}{\pi i \Omega_0^e} \frac{1}{(2\varepsilon \tau)^2 - m^2},$$

$$\xi_m^0 = \frac{4\varepsilon \tau (1 - e_{n4}^2)}{\pi^2 t \Omega_0^e} \frac{1}{(2\varepsilon \tau)^2 - m^2},$$

$$\Omega_0^e = \frac{1 - \lambda_0^e}{t} \left\{ \frac{\alpha J_0(\alpha t) J_1(\alpha) - \alpha t J_0(\alpha) J_1(\alpha t)}{J_0^2(\alpha)} \right\},$$

$$e_{n4}^2 = e^{4\pi i \gamma_{n4}}.$$

Заключення

В результаті строгого рішення задачі методом частинних областей отримані нескінченні системи лінійних алгебраїчних рівнянь другого роду відносно амплітуд волн просторового спектра дифрагированного поля. Рішення отримано без обмежень на параметри структури.

Для двох предельних випадків – наближення "узкі щіли" і геометричної оптики вираження для коефіцієнтів перетворення отримані в вигляді простих явних формул.

Література

1. Нарытнік Т.Н. Микроволнові технології в телекомунікаційних системах / Т.Н. Нарытнік,

В.П. Бабак, М.Е. Ільченко, С.А.Кравчук. – К.: Техніка, 2000. – 304 с.

2. Заїкин І.П. Дифракція електромагнітних волн на симетричному з'єднанні двох круглих волноводів і циліндричного резонатора, заповнених діелектриком / І.П. Заїкин, А.А. Ткаченко, А.В. Фатеев // Радіоелектронні і комп'ютерні системи. – 2008. – № 3 (22). – С. 5-13.

3. Миттра Р. Аналітичні методи теорії волноводів / Р. Миттра, С. Лі. – М.: Мир, 1974. – 327 с.

4. Гольдштейн Л.Д. Електромагнітні поля і волни / Л.Д. Гольдштейн, Н.В. Зернов. – М.: Сов. радіо, 1971. – 662 с.

5. Фельдштейн А.Л. Справочник по елементам волноводної техніки / А.Л. Фельдштейн, Л.Р. Явич, В.П. Смирнов. – М.: Сов. радіо, 1967. – 651 с.

6. Абрамовиц М. Справочник по спеціальним функціям / М. Абрамовиц, І. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 830 с.

7. Заїкин І.П. Дифракція електромагнітних волн на симетричному з'єднанні двох круглих волноводів з циліндричним резонатором. Частина 2. Аналітичні наближення / І.П. Заїкин, А.А. Ткаченко // Радіоелектронні і комп'ютерні системи. – 2007. – №4 (23). – С. 7-14.

Поступила в редакцію 23.09.2008

Рецензент: д-р фіз.-мат. наук, проф., зав. кафедрою прикладної електродинаміки Н.Н. Горобець, Харківський національний університет ім. В.Н. Каразіна, Харків.

РОЗСІЯННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ХВИЛЬ НА СИМЕТРИЧНОМУ З'ЄДНАННІ КОАКСІАЛЬНОЇ ЛІНІЇ І КРУГЛОГО ХВИЛЕВОДУ З ЦИЛІНДРИЧНИМ РЕЗОНАТОРОМ. ТМ (e)-ХВИЛІ

І.П. Заїкин, О.О. Ткаченко

Розглянута задача розсіяння H_ϕ -поляризованих електромагнітних хвиль на симетричному з'єднанні коаксіальної лінії та круглого хвилевода з циліндричним резонатором. Для строгого розв'язання внутрішньої крайової задачі використаний метод часткових областей. Рішення одержано у вигляді нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь другого роду відносно коефіцієнтів перетворення на структурі. Задача розв'язана без обмежень на параметри структури. Для двох граничних випадків – наближень "вузькі щілини" та геометричної оптики рішення системи рівнянь одержано у явному вигляді.

Ключові слова: розсіяння, поляризація, коаксіальна лінія, круглий хвилевод, коефіцієнти перетворення.

DISPERSION OF ELECTROMAGNETIC WAVES ON SYMMETRICAL CONNECTION OF TWO ROUND WAVEGUIDES AND CYLINDRICAL RESONATOR FILLED BY DIELECTRIC. TM (e)-WAVES

I.P. Zaikin, A.A. Tkachenko

The problem of dispersion of the electromagnetic waves for H_ϕ polarizations on symmetrical connection of coaxial line and round waveguide with cylindrical resonator is considered. For rigorous solution of such internal boundary problem the method of partial domains is proposed. Solution is obtained in the appearance infinite system of linear algebraic equations of second kind relatively to transform coefficients on the structure. The problem without restrictions at the characteristics of structure is solved. Simple obvious formulas for two are extreme cases – approximates "narrow slots" and geometrical optics is obtained.

Key words: dispersion, polarization, coaxial line, round waveguide, coefficients transformation.

Заїкин Іван Павлович – канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри приєма, передачі і обробки сигналів Національного аерокосмічного університету ім. Н.Е. Жуковського "ХАІ", Харків, Україна.

Ткаченко Олександрівич – магістр Національного аерокосмічного університету ім. Н.Е. Жуковського "ХАІ", Харків, Україна.