УДК 519.6

В.А. РВАЧЁВ

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Украина

МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ УПРАВЛЕНИЯ ИЕРАРХИЧЕСКОЙ МНОГОУРОВНЕВОЙ СИСТЕМОЙ

Предложены методы приближенного определения оптимальных параметров управления иерархической многоуровневой системой, которые используют совместное применение метода Ньютона для решения систем нелинейных уравнений, теорию дифференцирования функций, заданных неявно и эрмитову многомерную интерполяцию с помощью базисных функций обобщенного ряда Тейлора для бесконечно дифференцируемых функций на основе атомарных функций – специальных решений с компактным носителем обыкновенных линейных функционально-дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и линейными отклонениями независимой переменной, обладающих хорошими аппроксимационными свойствами.

Ключевые слова: *иерархическая многоуровневая система, оптимальный параметр, метод Ньютона, эрмитова интерполяция, атомарная функция.*

Введение

Исследование многоуровневых иерархических систем управления является одним из важных направлений системного анализа [1 – 5]. В настоящей работе рассмотрены некоторые методы приближенного нахождения оптимальных параметров управления для иерархической многоуровневой системы, а именно метод, состоящий в совместном использовании метода Ньютона и теории функций, заданных неявно, и метод, сочетающий метод Ньютона и эрмитову интерполяцию (интерполяцию значений функций и ее производных) атомарными функциями [6, 7].

Постановка задачи исследования. Для простоты ниже подробно рассматривается случай иерархической системы с двумя уровнями – верхним и нижним – и двумя подсистемами на нижнем уровне. Рассмотрим два случая.

1. На верхнем уровне требуется максимизировать целевую функцию верхнего уровня

$$f(x_{max}(u), y_{max}(v), u, v),$$

где переменные $x_{max}(u)$, $y_{max}(v)$ находятся в результате максимизации целевых функций нижнего уровня

$$g(x,u) \underset{x}{\to} \max, \; h(y,v) \underset{y}{\to} \max,$$

то есть

$$g(x_{max}(u),u) \ge g(x,u), \; h(y_{max}(v),v) \ge h(y,v),$$

а параметры управления u, v задаются на верхнем уровне так, чтобы максимизировать целевую функцию верхнего уровня. Целевые функции $g(x,u)$, $h(y,v)$ предполагаются гладкими и строго выпуклыми вверх, что обеспечивает единственность точек максимума. Для простоты записи выкладок переменные x, y, u, v предполагаем скалярными. Векторный случай рассматривается совершенно аналогично. Требуется указать методы определения оптимальных управляющих параметров u, v.

2. Целевая функция верхнего уровня зависит от внешних параметров p_1, p_2

$$f(x_{max}(u), y_{max}(v), u, v, p_1, p_2).$$

Требуется указать метод определения оптимальных параметров управления u, v как функций внешних параметров p_1, p_2. При этом существенным является объем необходимых вычислений.

К задачам типа 1, 2 путем дискретизации по времени сводятся и задачи нахождения оптимальных управляющих функций $u(t)$, $v(t)$ в случае динамических иерархических многоуровневых систем, когда вместо целевых функций верхнего уровня максимизируется интегральный функционал вида

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t, x^*(t), y^*(t), \frac{dx^*}{dt}, \frac{dy^*}{dt}, u(t), v(t), p_1(t), p_2(t))dt,$$

где $x^*(t)$, $y^*(t)$ доставляют максимумы функционалам нижнего уровня

$$\int_{t_0}^{t_1} g(t, x(t), \frac{dx}{dt}, u(t))dt,$$

$$\int_{t_0}^{t_1} h(t, y(t), \frac{dy}{dt}, v(t))dt,$$

а $u(t)$, $v(t)$ – функции управления и $p_1(t)$, $p_2(t)$ – внешние параметрические функции.

Решение задачи 1 сочетанием метода Ньютона и теории неявных функций

Введем обозначения для частных производных целевой функции верхнего уровня

$$f_1 = \frac{\partial f}{\partial x_{max}},\ f_2 = \frac{\partial f}{\partial y_{max}},\ f_u = \frac{\partial f}{\partial u},\ f_v = \frac{\partial f}{\partial v},$$

а также

$$x_{max}(u) = \alpha(u),\ y_{max}(v) = \beta(v).$$

Тогда необходимые (а при наших предположениях и достаточные) условия максимума целевой функции верхнего уровня имеют вид

$$\begin{cases} f_1(\alpha(u),\beta(v),u,v)\cdot\alpha'(u) + f_u(\alpha(u),\beta(v),u,v) = 0, \\ f_2(\alpha(u),\beta(v),u,v)\cdot\beta'(v) + f_v(\alpha(u),\beta(v),u,v) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Для нахождения оптимальных параметров управления $u_* = u_{max}$, $v_* = v_{max}$, т.е. решения системы (1), можно применить метод Ньютона. Выберем начальные управляющие параметры u_0, v_0. Найдем $\alpha(u_0)$, $\beta(v_0)$. Пусть

$$\varphi(x,u) = \frac{\partial g(x,u)}{\partial x},\ \psi(y,v) = \frac{\partial h(y,v)}{\partial y}.$$

Тогда из определения функций $\alpha(u)$, $\beta(v)$ получаем

$$\varphi(\alpha(u),u) = 0,\ \psi(\beta(v),v) = 0. \quad (2)$$

Решая уравнения (2) при $u = u_0$, $v = v_0$ методом Ньютона (т.е. в нашем случае касательных), находим $\alpha(u_0)$, $\beta(v_0)$.

Обозначим

$$s(u,v) = f_1(\alpha(u),\beta(v),u,v)\cdot\alpha'(u) + f_u(\alpha(u),\beta(v),u,v) \quad (3)$$

и

$$p(u,v) = f_2(\alpha(u),\beta(v),u,v)\cdot\beta'(v) + f_v(\alpha(u),\beta(v),u,v). \quad (4)$$

Тогда система (1) перепишется в виде

$$s(u,v) = 0,\ p(u,v) = 0. \quad (5)$$

Для применения метода Ньютона нужно знать частные производные

$$s_u = \frac{\partial s}{\partial u},\ s_v = \frac{\partial s}{\partial v},$$

$$p_u = \frac{\partial p}{\partial u},\ p_v = \frac{\partial p}{\partial v}.$$

Из (3) получаем

$$s_u = \left(\frac{\partial f_1}{\partial \alpha}\alpha'(u) + \frac{\partial f_1}{\partial u}\right)\alpha'(u) + f_1\cdot\alpha''(u) + \frac{\partial f_u}{\partial \alpha}\alpha'(u) + \frac{\partial f_u}{\partial u}, \quad (6)$$

$$s_v = \left(\frac{\partial f_1}{\partial \beta}\beta'(v) + \frac{\partial f_1}{\partial v}\right)\alpha'(u) + f_1\cdot\alpha''(u) + \frac{\partial f_u}{\partial \beta}\beta'(v) + \frac{\partial f_u}{\partial v}, \quad (7)$$

$$p_u = \left(\frac{\partial f_2}{\partial \alpha}\alpha'(u) + \frac{\partial f_2}{\partial u}\right)\beta'(v) + \frac{\partial f_v}{\partial \alpha}\alpha'(u) + \frac{\partial f_v}{\partial u}, \quad (8)$$

$$p_v = \left(\frac{\partial f_2}{\partial \beta}\beta'(v) + \frac{\partial f_2}{\partial v}\right)\beta'(v) + f_2\cdot\beta''(v) + \frac{\partial f_v}{\partial \beta}\beta'(v) + \frac{\partial f_v}{\partial v}. \quad (9)$$

Из (2) получаем

$$\alpha'(u) = -\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial u}}{\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}}, \quad (10)$$

$$\beta'(v) = -\frac{\frac{\partial\psi}{\partial v}}{\frac{\partial\psi}{\partial\beta}}, \quad (11)$$

откуда

$$\alpha''(u) = -\left(\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial\alpha}\alpha'(u) + \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} - \frac{\partial\varphi}{\partial u}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2}\alpha' + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha\partial u}\right)\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right)^{-2}, \quad (12)$$

$$\beta''(v) = -\left(\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial v\partial\beta}\beta'(v) + \frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}\right)\frac{\partial\psi}{\partial\beta} - \frac{\partial\psi}{\partial v}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\beta^2}\beta'(v) + \frac{\partial^2\psi}{\partial\beta\partial v}\right)\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial\beta}\right)^{-2}. \quad (13)$$

Пусть

$$H(u,v) = \begin{bmatrix} s_u & s_v \\ p_u & p_v \end{bmatrix}.$$

Из формул (6) – (13) находим матрицу $H(u_0,v_0)$. Тогда следующее приближение по методу Ньютона дается формулой

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} - H^{-1}(u_0,v_0)\begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix},$$

где H^{-1} – обратная матрица к матрице H и в нашем случае легко выписывается.

Значения $\alpha(u_1)$, $\beta(v_1)$ находим методом Ньютона (касательных), используя $\alpha(u_0)$, $\beta(v_0)$ в качестве начального приближения. Далее ведем вычисления по формулам

$$\begin{bmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix} - H^{-1}(u_n,v_n)\begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix},$$

где $\alpha(u_n)$, $\beta(v_n)$ находятся методом Ньютона (касательных), используя $\alpha(u_{n-1})$, $\beta(v_{n-1})$ в качестве начального приближения, что позволит сократить число итераций для их нахождения.

К задачам рассмотренного типа сводятся и задачи оптимального управления динамическими многоуровневыми иерархическими системами. В случае двух уровней и двух подсистем нижнего уровня эти задачи имеют следующий вид. На верхнем уровне максимизируется интегральный функционал качества

$$\int_{t_0}^{t_1} f(\vec{x}_{max}(t), \vec{x}'_{max}(t), \vec{y}_{max}(t), \vec{y}'_{max}(t),$$

$$\vec{u}(t), \vec{v}(t))dt \to \max,$$

где функции $\vec{x}_{max}(t)$, $\vec{y}_{max}(t)$ находятся из условия максимальности функционалов качества нижнего уровня

$$\int_{t_0}^{t_1} g(\vec{x}(t), \vec{x}'(t), \vec{u}(t))dt \to \max_{\vec{x}(t)},$$

$$\int_{t_0}^{t_1} h(\vec{y}(t), \vec{y}'(t), \vec{v}(t))dt \to \max_{\vec{y}(t)},$$

а $\vec{u}(t)$, $\vec{v}(t)$ – управляющие вектор-функции, подлежащие нахождению. Если аппроксимировать интегралы интегральными суммами, а производные – разностями, получится задача рассмотренного выше типа.

Решение задачи 2 с помощью эрмитовой интерполяции

В случае, когда целевая функция верхнего уровня зависит от внешних параметров, а целевая функция нижнего уровня остается неизменной, более выгодным с точки зрения сокращения объема и времени вычислений получить явную формулу для вычисления функций $x_{max}(u)$, $y_{max}(v)$ с помощью интерполяции. Поскольку параметры управления в реальных задачах, как правило, многомерные, то речь идет о многомерной интерполяции. При этом следует учитывать следующие моменты. Во-первых, многомерная интерполяция алгебраическими многочленами имеет ряд ограничений. То же касается и многомерной интерполяции сплайнами. Перспективным методом многомерной интерполяции является интерполяция с помощью так называемых радиальных базисных функций (РБФ) [8]. Однако с помощью РБФ осуществляется обычная лагранжева интерполяция, т.е. интерполяция значений функции в заданных точках. Однако, как видно из рассуждений, проведенных выше, если известны значения функций $x_{max}(u)$, $y_{max}(v)$ в каких-то точках, то из теории функций, заданных неявно, легко вычисляются и производные этих функций (частные производные в случае многомерных параметров управления). Интерполяция с использованием как значений функции в каких-то точках, так и производных заданных порядков в этих точках, принято называть эрмитовой интерполяцией. За счет использования эрмитовой интерполяции можно сократить число точек интерполяции, необходимое для достижения заданной точности, т.е. сократить число применений алгоритма нахождения максимума функций нижнего уровня. Нами предлагается использовать для многомерной эрмитовой интерполяции функций $x_{max}(u)$, $y_{max}(v)$ (в случае, когда $u = (u_1, \ldots, u_k)$, $v = (v_1, \ldots, v_m)$) линейные комбинации сдвигов сжатий базисных функций обобщенного ряда Тейлора для бесконечно дифференцируемых функций многих переменных [7], построенного на основе атомарных функций [6, 7] типа функции $up(x)$ и других. Поскольку выражения для функций $x_{max}(u)$, $y_{max}(v)$ подставляются в целевую функцию верхнего уровня, которая в методе Ньютона дважды дифференцируется, то весьма удобным является наличие простого функционально-дифференциального уравнения, которому удовлетворяет функция $up(x)$, а именно

$$y'(x) = 2y(2x+1) - 2y(2x-1).$$

Более важным для обоснования целесообразности эрмитовой интерполяции функций $x_{max}(u)$, $y_{max}(v)$, как аппарата их приближенного представления, является тот факт, что линейные комбинации сдвигов функции $up(x)$ обладают оптимальными аппроксимационными свойствами для приближения дифференцируемых функций любой конечной гладкости [6, 7].

После построения интерполянтов для функций $x_{max}(u)$, $y_{max}(v)$ и подстановки их в целевую функцию верхнего уровня, можно методом Ньютона (или каким-либо другим, например градиентным) решить задачу на максимум функции верхнего уровня для некоторого набора значений внешних параметров, а затем провести эрмитову интерполяцию для функций, выражающих зависимость оптимальных параметров управления от внешних параметров.

Заключение

Предложены два метода определения оптимальных параметров управления иерархической многоуровневой системой, основанные на сочетании метода Ньютона, теории неявных функций и многомерной эрмитовой интерполяции с помощью атомарных функций – финитных решений функционально-дифференциальных уравнений с линейным отклонением аргумента. Применение атомарных функций имеет ряд преимуществ, а именно удобство вычислений, локальность и оптимальные аппроксимационные свойства.

Литература

1. *Новосельцев В.И. Теоретические основы системного анализа / В.И. Новосельцев. – М.: Майор, 2006. – 591 с.*

2. *Месарович М. Теория иерархических многоуровневых систем / М. Месарович, Мако, Такахара. – М.: Мир, 1973. – 344 с.*

3. *Моисеев Н.Н. Математические задачи системного анализа / Н.Н. Моисеев. – М.: Наука, 1981. – 487 с.*

4. *Волкова В.Н. Теория систем и системный анализ в управлении организациями / В.Н. Волкова, А.А. Емельянов. – М.: Финансы и статистика, 2006. – 846 с.*

5. *Сорока К.О. Основи теорії систем і системного аналізу / К.О. Сорока. – Х.: Изд. «Тимченко», 2005. – 286 с.*

6. *Рвачев В.Л. Неклассические методы теории приближений в краевых задачах / В.Л. Рвачев, В.А. Рвачев. – К.: Наукова думка, 1979. – 196 с.*

7. *Рвачев В.А. Финитные решения функционально-дифференциальных уравнений / В.А. Рвачев // Успехи математических наук. – 1990. – Вып. 1 (271). – С. 77-103.*

8. *Buhmann M.D. Radial Basis Functions / M.D. Buhmann. – Cambridge: CUP, 2004. – 299 p.*

Поступила в редакцию 27.11.2008

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф., проф. каф. 405 А.Г. Николаев, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков.

МЕТОДИ ВИЗНАЧЕННЯ ОПТИМАЛЬНИХ ПАРАМЕТРІВ КЕРУВАННЯ ІЄРАРХІЧНОЮ БАГАТОРІВНЕВОЮ СИСТЕМОЮ

В.О. Рвачов

Запропоновані методи наближеного визначення оптимальних параметрів керування ієрархічною багаторівневою системою, що використовують сумісне застосування метода Ньютона для розв'язання систем нелінійних рівнянь, теорію диференціювання функцій, що задані неявно, та ермітову багатовимірну інтерполяцію за допомогою базисних функцій узагальненого ряду Тейлора для нескінченно диференційовних функцій на основі атомарних функцій – спеціальних розв'язків з компактним носієм звичайних лінійних функціонально-диференційних рівнянь зі сталими коефіцієнтами і лінійними відхиленнями аргументу, що мають добрі апроксимаційні властивості.

Ключові слова: ієрархічна багаторівнева система, оптимальний параметр, метод Ньютона, ермітова інтерполяція, атомарна функція.

METHODS OF DETERMINATION OF OPTIMAL CONTROL PARAMETERS FOR HIERARCHIC MULTILEVEL SYSTEM

V.O. Rvachov

Methods of approximate determination of the optimal control parameters for an hierarchic multilevel systems are proposed which employ joint application of the Newton method for solving systems of non-linear equations, the differentiation theory for implicit functions and the Hermite multidimensional interpolation with the help of the basic functions of the generalized Taylor series for infinitely differentiable functions based on atomic functions - special solutions with compact support of ordinary linear functional differential. Equations with constant coefficients and linear deviations of argument which possess good approximation properties.

Key words: hierarchic multilevel system, optimal parameter, Newton method, Hermite interpolation, atomic function.

Рвачёв Владимир Алексеевич – доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник кафедры высшей математики, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт», Харьков, Украина.