УДК 621.371.322

И.П. ЗАИКИН, А.А. ТКАЧЕНКО, А.В. ФАТЕЕВ

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского "ХАИ", Украина

РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА СИММЕТРИЧНОМ СОЕДИНЕНИИ ДВУХ КРУГЛЫХ ВОЛНОВОДОВ И ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО РЕЗОНАТОРА, ЗАПОЛНЕННЫХ ДИЭЛЕКТРИКОМ

Рассмотрена задача рассеяния H_φ- и E_φ- поляризованных электромагнитных волн на симметричном стыке двух круглых волноводов и цилиндрического резонатора, заполненных диэлектриком. Для строгого решения внутренней краевой задачи использован метод частичных областей. Решение получено в виде бесконечной системы линейных алгебраических уравнений второго рода относительно коэффициентов преобразования на структуре. В длинноволновом приближении получены простые явные формулы для определения этих коэффициентов. Приведены результаты численных расчетов в таком приближении.

Ключевые слова: *рассеяние, поляризация, диэлектрическое заполнение, коэффициенты преобразования.*

Введение

Волноводы с диэлектрическим заполнением нашли широкое применение в технике СВЧ благодаря разработке и внедрению высококачественных диэлектриков и ферритов. Использование этих материалов позволило не только изменить основные характеристики волноводов, но и создать ряд устройств нового типа, таких, как вентили, невзаимные фазовращатели, фильтры и др.

Основной интерес к таким волноводам объясняется тем, что они обладают рядом преимуществ по сравнению с незаполненными волноводами. Так, изменяя вид заполнения и диэлектрическую проницаемость заполняющего материала, можно в широких пределах управлять постоянной распространения, критическими длинами волн, распределением потока мощности в поперечном сечении, положением областей круговой поляризации магнитного поля и другими характеристиками. Появляются также дополнительные возможности по увеличению предельной пропускаемой волноводом мощности, подавлению нежелательных типов волн и созданию благоприятных условий для распространения выбранных типов волн. Улучшение характеристик прямоугольных и круглых волноводов при заполнении их диэлектриком сопровождается уменьшением их поперечных размеров и большей стабильностью этих характеристик в диапазоне частот, что является принципиальной основой для создания многоканальных линий передачи СВЧ- и КВЧ-диапазонов [1].

Целью работы является строгое решение задачи рассеяния электромагнитных волн на симметричном соединении двух круглых волноводов и цилиндрического резонатора с диэлектрическим заполнением для определения коэффициентов преобразования волн на такой структуре.

Формулирование проблемы. Для простейшего по строению азимутального поля волн H_{01} в круглом волноводе составляющая поля H_ϕ на стенках волновода отсутствует, что позволяет осуществлять передачу энергии на волне H_{01} практически без затухания. Волна E_{01} благодаря круговой симметрии используется во вращающихся сочленениях антенных устройств. Кроме того, наличие продольной составляющей электрического поля, сконцентрированного вдоль оси волновода, позволяет применять круглые волноводы с волной E_{01} в линейных электронных ускорителях [2]. Но ни волна E_{01}, ни, тем более, волна H_{01} не являются низшими типами волн и для их возникновения необходимо увеличивать относительный диаметр волноводов. Использование диэлектрического заполнения позволяет избавиться от такой необходимости, но это требует определения его влияния на характеристики волноводных осесимметричных структур. Эта задача решается с помощью метода частичных областей (метода сшивания) [3].

Рассмотрим структуру, показанную на рис. 1.

Положим, что круглые волноводы и отверстия связи имеют единичные радиусы (R = 1), тогда их периметры будут равны $\ell = 2\pi R = 2\pi$.

Радиус цилиндрического резонатора обозначим через θ, а его высоту h – через $2\pi r$, где r – некоторый малый параметр, равный $r = h / \ell$. Области 1 и 4 на рис. 1 представляют собой регулярные участки волноводов, область 2 – нерегулярный, общий для волноводов и резонатора участок, область 3 – цилиндрический резонатор. В общем случае каждая из частичных областей 1...4 может быть заполнена однородным изотропным диэлектриком с соответствующими значениями диэлектрической проницаемости $\varepsilon_1 ... \varepsilon_4$.

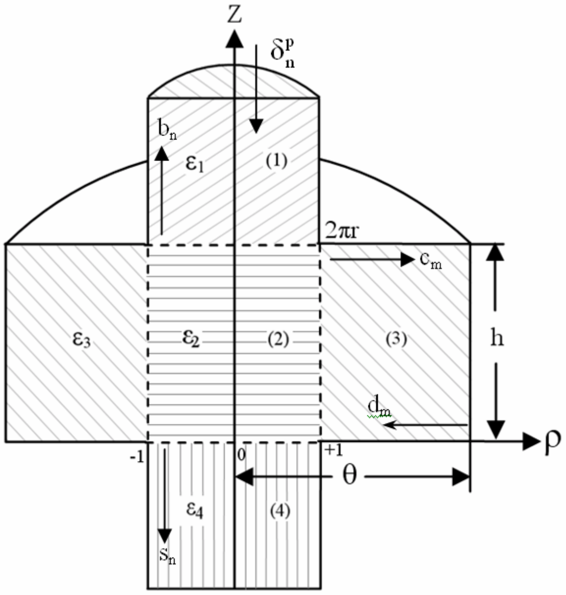

Рис. 1. Цилиндрический резонатор и связанные с ним через отверстия связи круглые волноводы с диэлектрическим заполнением

Пусть на соединение (рис. 1) со стороны области 1 ($z > 0$) набегают аксиально-симметричные электрические (или магнитные) волны порядка p единичной амплитуды $a_n = \delta_n^p$, где δ_n^p – символ Кронекера:

$$\delta_n^p = \begin{cases} 1, & n = p, \\ 0, & n \neq p. \end{cases}$$

Тогда дифрагированное на соединении поле будет иметь вид набора волн, отраженных в область 1 и проникающих в область 2, а через нее – в области 3 и 4. Коэффициенты преобразования на структуре обозначим как: b_n – коэффициенты отражения от границы 1-2 в область 1; c_m – коэффициенты прохождения из области 2 в область 3; d_m – коэффициенты отражения от вертикальных стенок резонатора в сторону области 2; g_n – коэффициенты отражения от границ 1-2 и 2-4 в область 2; f_m – коэффициенты отражения от границ 2-3 в область 2; s_n – коэффициенты прохождения из области 2 в область 4.

Зависимость от координаты z для волн, распространяющихся в круглых волноводах в направлениях $\pm z$, будем представлять в виде

$$\exp(\pm i \gamma_n z),$$

а зависимость от координаты ρ для цилиндрического резонатора в направлениях $\pm\rho$ – в виде

$$H_0^{(1)}(\tilde{A}_m\rho),\ H_0^{(2)}(\tilde{A}_m\rho),\ H_1^{(1)}(\tilde{A}_m\rho),\ H_1^{(2)}(\tilde{A}_m\rho)$$

силу поведения функций Ханкеля при больших $\tilde{A}_m\rho$:

$$H_0^{(1)}(\tilde{A}_m\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\tilde{A}_m\rho}} e^{i\tilde{A}_m\rho - i\frac{\pi}{4}};$$

$$H_0^{(2)}(\tilde{A}_m\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\tilde{A}_m\rho}} e^{-i\tilde{A}_m\rho + i\frac{\pi}{4}};$$

$$H_1^{(1)}(\tilde{A}_m\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\tilde{A}_m\rho}} e^{i\tilde{A}_m\rho - i\frac{3\pi}{4}};$$

$$H_1^{(2)}(\tilde{A}_m\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\tilde{A}_m\rho}} e^{-i\tilde{A}_m\rho + i\frac{3\pi}{4}}.$$

Продольные постоянные распространения в областях 1...4 запишем как

$$\gamma_{n1} = \sqrt{æ^2\varepsilon_1 - j_{0n}^2} \text{ или } \gamma_{n1} = \sqrt{æ^2\varepsilon_1 - j_{1n}^2}; \quad (1)$$

$$\gamma_{n2} = \sqrt{æ^2\varepsilon_2 - j_{0n}^2} \text{ или } \gamma_{n2} = \sqrt{æ^2\varepsilon_2 - j_{1n}^2}; \quad (2)$$

$$\gamma_{n4} = \sqrt{æ^2\varepsilon_4 - j_{0n}^2} \text{ или } \gamma_{n4} = \sqrt{æ^2\varepsilon_4 - j_{1n}^2}; \quad (3)$$

$$\tilde{A}_{m2} = \sqrt{æ^2\varepsilon_2 - (m/2r)^2}, \quad (4)$$

$$\tilde{A}_{m3} = \sqrt{æ^2\varepsilon_3 - (m/2r)^2}, \quad (5)$$

где $m = 0,1,2,...$ – для волн E_{0n} и $m = 1,2,3,...$ – для волн H_{0n};

$æ = kR = 2\pi/\lambda$ – безразмерное волновое число;

j_{0n}, j_{1n} – поперечные волновые числа в круглом волноводе для волн E_{0n} и H_{0n} соответственно – корни уравнений $J_0(j_{0n}) = 0$ и $J_1(j_{1n}) = 0$;

$m/2r$ – поперечные волновые числа в цилиндрическом резонаторе;

$J_0(x)$, $J_1(x)$ – функции Бесселя нулевого и первого порядков;

$H_0^{(1)}(x)$, $H_0^{(2)}(x)$, $H_1^{(1)}(x)$, $H_1^{(2)}(x)$ – функции Ханкеля первого и второго рода нулевого и первого порядков.

Искомые поля должны удовлетворять следующим условиям:

1) уравнениям Максвелла;

2) условиям непрерывности тангенциальных составляющих поля на границах частичных областей;

3) граничным условиям на металле;

4) условиям излучения, заключающимся в требовании отсутствия волн, приходящих из бесконечности, кроме p – й волны в 1-м волноводе:

$$\lim_{z\to\infty} z\left(\frac{\partial\psi}{\partial z} - ik\psi\right) = 0\,,$$

где ψ – любая поперечная (относительно направления z) составляющая поля [4];

5) условиям конечности интеграла энергии

$$\int_V (\varepsilon\left|\vec{E}\right|^2 + \mu\left|\vec{H}\right|^2)dv < \infty$$

для любого конечного объема V, фактически определяющим характер особенностей поведения поля вблизи изломов границ (условиям на ребре [4]).

При заполнении структуры изотропным диэлектриком ее однородность по ϕ не нарушается и позволяет искать отдельно решения для волн, имеющих различную поляризацию в направлении распространения.

Будем называть электрической такую волну (E_{0n}), у которой ϕ-составляющая электрического поля тождественно равна нулю (H_ϕ -поляризация). Магнитной назовем волну (H_{0n}), у которой только электрическое поле имеет отличную от нуля ϕ-составляющую (E_ϕ -поляризация).

Решение проблемы. E_{0n}-волны (H_ϕ-поляризация)

Класс частных решений уравнений Максвелла будем искать с помощью электрического вектора Герца, выражения для которого в областях 1 – 4 структуры рис. 1 запишем в виде:

$$\ddot{I}^{(1)}_{\mathring{A}} = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\delta_n^p e^{-i\gamma_{n1}(z-2\pi r)} + b_n e^{i\gamma_{n1}(z-2\pi r)}\right\} J_0(j_{0n}\rho);$$

$$\ddot{I}^{(2)}_{\mathring{A}} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m H_0^{(1)}(\tilde{A}_{m2}) J_0(\tilde{A}_{m2}\rho) e^{im(\frac{z}{2r}-\pi)} +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} g_n H_0^{(1)}(j_{0n}) J_0(j_{0n}\rho)\left\{e^{i\gamma_{n2}(2\pi r+z)} + e^{i\gamma_{n2}(2\pi r-z)}\right\};$$

$$\ddot{I}^{(3)}_{\mathring{A}} = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\left\{c_m \frac{H_0^{(1)}(\tilde{A}_{m3}\rho)}{H_0^{(1)}(\tilde{A}_{m3})} + \right. \qquad (6)$$

$$\left. + d_m \frac{H_0^{(2)}(\tilde{A}_{m3}\rho)}{H_0^{(2)}(\tilde{A}_{m3})}\right\} e^{im(\frac{z}{2r}-\pi)};$$

$$\ddot{I}^{(4)}_{\mathring{A}} = \sum_{n=1}^{\infty} s_n H_0^{(1)}(j_{0n}) J_0(j_{0n}\rho) e^{-i\gamma_{n4}z}\,,$$

где $b_n, g_n, s_n \sim E_n^{(p)}$, $c_m, d_m, f_m \sim F_m^{(p)}$ – искомые элементы p -го столбца матрицы рассеяния на стыке.

Отличные от нуля составляющие поля определяются из уравнений Максвелла по формулам:

$$E_z = \left(æ^2\varepsilon + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\ddot{I}_{\mathring{A}}; \quad \mathring{A}_\rho = \frac{\partial^2}{\partial\rho\partial z}\ddot{I}_{\mathring{A}};$$

$$H_\phi = i\,æ\varepsilon\frac{\partial}{\partial\rho}\ddot{I}_{\mathring{A}} \qquad (7)$$

и имеют вид:

– в области 1:

$$E_z^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} j_{0n}^2\left\{\delta_n^p\, e^{-i\gamma_{n1}(z-2\pi r)} + \right.$$

$$\left. + b_n e^{i\gamma_{n1}(z-2\pi r)}\right\} J_0(j_{0n}\rho);$$

$$E_\rho^{(1)} = i\sum_{n=1}^{\infty} j_{0n}\gamma_{n1}\left\{\delta_n^p e^{-i\gamma_{n1}(z-2\pi r)} - \right. \qquad (8)$$

$$\left. - b_n e^{i\gamma_{n1}(z-2\pi r)}\right\} J_1(j_{0n}\rho);$$

$$H_\phi^{(1)} = -iæ\varepsilon_1\sum_{n=1}^{\infty} j_{0n}\left\{\delta_n^p e^{-i\gamma_{n1}(z-2\pi r)} + \right.$$

$$\left. + b_n e^{i\gamma_{n1}(z-2\pi r)}\right\} J_1(j_{0n}\rho),$$

где γ_{n1} определяется левой формулой (1);

– в области 2:

$$E_z^{(2)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m \tilde{A}_{m2}^2 H_0^{(1)}(\tilde{A}_{m2}) J_0(\tilde{A}_{m2}\rho)\times$$

$$\times e^{im(\frac{z}{2r}-\pi)} + \sum_{n=1}^{\infty} g_n j_{0n}^2 H_0^{(1)}(j_{0n}) J_0(j_{0n}\rho)\times$$

$$\times\left\{e^{i\gamma_{n2}(2\pi r+z)} + e^{i\gamma_{n2}(2\pi r-z)}\right\};$$

$$E_\rho^{(2)} = -i\sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m \tilde{A}_{m2}\frac{m}{2r} H_0^{(1)}(\tilde{A}_{m2}) J_1(\tilde{A}_{m2}\rho)\times$$

$$\times e^{im(\frac{z}{2r}-\pi)} - i\sum_{n=1}^{\infty} g_n\gamma_{n2} j_{0n} H_0^{(1)}(j_{0n}) J_1(j_{0n}\rho)\times$$

$$\times\left\{e^{i\gamma_{n2}(2\pi r+z)} - e^{i\gamma_{n2}(2\pi r-z)}\right\}; \qquad (9)$$

$$H_\phi^{(2)} = -iæ\varepsilon_2\sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m \tilde{A}_{m2} H_0^{(1)}(\tilde{A}_{m2}) J_1(\tilde{A}_{m2}\rho)\times$$

$$\times e^{im(\frac{z}{2r}-\pi)} - iæ\varepsilon_2\sum_{n=1}^{\infty} g_n j_{0n} H_0^{(1)}(j_{0n}) J_1(j_{0n}\rho)\times$$

$$\times\left\{e^{i\gamma_{n2}(2\pi r+z)} + e^{i\gamma_{n2}(2\pi r-z)}\right\},$$

где γ_{n2} определяется левой формулой (2);

– в области 3:

$$E_z^{(3)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{A}_{m3}^2 \left\{ c_m \frac{H_0^{(1)}(\tilde{A}_{m3}\rho)}{H_0^{(1)}(\tilde{A}_{m3})} + \right.$$

$$\left. + d_m \frac{H_0^{(2)}(\tilde{A}_{m3}\rho)}{H_0^{(2)}(\tilde{A}_{m3})} \right\} e^{im(\frac{m}{2r}-\pi)}; \qquad (10)$$

$$E_\rho^{(3)} = -i \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{A}_{m3} \frac{m}{2r} \left\{ c_m \frac{H_1^{(1)}(\tilde{A}_{m3}\rho)}{H_0^{(1)}(\tilde{A}_{m3})} + \right.$$

$$\left. + d_m \frac{H_1^{(2)}(\tilde{A}_{m3}\rho)}{H_0^{(2)}(\tilde{A}_{m3})} \right\} e^{im(\frac{z}{2r}-\pi)};$$

$$H_\phi^{(3)} = -iæ\varepsilon_3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{A}_{m3} \left\{ c_m \frac{H_1^{(1)}(\tilde{A}_{m3}\rho)}{H_0^{(1)}(\tilde{A}_{m3})} + \right.$$

$$\left. + d_m \frac{H_1^{(2)}(\tilde{A}_{m3}\rho)}{H_0^{(2)}(\tilde{A}_{m3})} \right\} e^{im(\frac{z}{2r}-\pi)};$$

– в области 4:

$$E_z^{(4)} = \sum_{n=1}^{\infty} s_n j_{0n}^2 e^{-i\gamma_{n4}z} H_0^{(1)}(j_{0n}) J_0(j_{0n}\rho);$$

$$E_\rho^{(4)} = i \sum_{n=1}^{\infty} s_n j_{0n} \gamma_{n4} e^{-i\gamma_{n4}z} H_0^{(1)}(j_{0n}) \times J_1(j_{0n}\rho); \quad (11)$$

$$H_\phi^{(4)} = -iæ\varepsilon_4 \sum_{n=1}^{\infty} s_n j_{0n} e^{-i\gamma_{n4}z} H_0^{(1)}(j_{0n}) J_1(j_{0n}\rho),$$

где γ_{n4} определяется левой формулой (3).

Для удовлетворения условий непрерывности необходимо также выполнение между амплитудами f_m промежуточной области 2 соотношения

$$f_m = f_{-m}. \qquad (12)$$

Из условия непрерывности $E_\rho^{(1)} = E_\rho^{(2)}$ при $z = 2\pi r$ следует

$$i \sum_{n=1}^{\infty} j_{0n} \gamma_{n1} \left\{ \delta_n^p - b_n \right\} J_1(j_{0n}\rho) =$$

$$= -i \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m \frac{m}{2r} \tilde{A}_{m2} H_0^{(1)}(\tilde{A}_{m2}) J_1(\tilde{A}_{m2}\rho) -$$

$$-i \sum_{n=1}^{\infty} g_n j_{0n} \gamma_{n2} H_0^{(1)}(j_{0n}) \left(e_{n2}^2 - 1 \right) J_1(j_{0n}\rho),$$

а так как, с учетом соотношения (12),

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m \frac{m}{2r} \tilde{A}_{m2} H_0^{(1)}(\tilde{A}_{m2}) J_1(\tilde{A}_{m2}\rho) \equiv 0,$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} j_{0n} \gamma_{n1} \left\{ \delta_n^p - b_n \right\} J_1(j_{0n}\rho) =$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} g_n j_{0n} \gamma_{n2} \left(e_{n2}^2 - 1 \right) H_0^{(1)}(j_{0n}) J_1(j_{0n}\rho),$$

получим связь между b_n и g_n:

$$b_n = \delta_n^p + g_n \frac{\gamma_{n2}}{\gamma_{n1}} (e_{n2}^2 - 1) H_0^1(j_{0n}), \qquad (13)$$

где $e_{n2}^2 = e^{4i\gamma_{n2}\pi r}$.

Из граничного условия $E_z^{(3)} = 0$ при $\rho = \theta$ имеем

$$c_m \frac{H_0^{(1)}(\tilde{A}_{m3}\theta)}{H_0^{(1)}(\tilde{A}_{m3})} + d_m \frac{H_0^{(2)}(\tilde{A}_{m3}\theta)}{H_0^{(2)}(\tilde{A}_{m3})} = 0,$$

или $$d_m = -c_m \sigma_m^E, \qquad (14)$$

где $\sigma_m^E = \dfrac{H_0^{(1)}(\tilde{A}_{m3}\theta) H_0^{(2)}(\tilde{A}_{m3})}{H_0^{(2)}(\tilde{A}_{m3}\theta) H_0^{(1)}(\tilde{A}_{m3})}$.

Выполнение условия непрерывности составляющих E_z на границе $\rho = 1$ приводит к соотношению

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m \tilde{A}_{m2}^2 H_0^{(1)}(\tilde{A}_{m2}) J_0(\tilde{A}_{m2}) e^{im\left(\frac{z}{2r}-\pi\right)} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} g_n j_{0n}^2 H_0^{(1)}(j_{0n}) J_0(j_{0n}) \left\{ e^{i\gamma_{n2}(2\pi r+z)} + \right.$$

$$\left. + e^{i\gamma_{n2}(2\pi r-z)} \right\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{A}_{m3}^2 \left\{ c_m + d_m \right\} e^{im\left(\frac{z}{2r}-\pi\right)},$$

а так как $J_0(j_{0n}) = 0$ $\Rightarrow$ к связи между амплитудами f_m и c_m:

$$f_m \tilde{A}_{m2}^2 H_0^{(1)}(\tilde{A}_{m2}) J_1(\tilde{A}_{m2}) = \tilde{A}_{m3}^2 \left\{ c_m + d_m \right\},$$

откуда

$$f_m = \frac{\tilde{A}_{m3}^2}{\tilde{A}_{m2}^2} \frac{c_m + d_m}{H_0^{(1)}(\tilde{A}_{m2}) J_0(\tilde{A}_{m2})} =$$

$$= \frac{\tilde{A}_{m3}^2}{\tilde{A}_{m2}^2} \frac{1 - \sigma_m^E}{H_0^{(1)}(\tilde{A}_{m2}) J_0(\tilde{A}_{m2})} c_m$$

или $$f_m = c_m \tau_m, \qquad (15)$$

где $\tau_m = \dfrac{\tilde{A}_{m3}^2}{\tilde{A}_{m2}^2} \dfrac{1 - \sigma_m^E}{H_0^{(1)}(\tilde{A}_{m2}) J_0(\tilde{A}_{m2})}$.

Сшивание составляющих H_ϕ на границе областей 1 и 2 приводит, с учетом (13), к функциональному уравнению

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ g_n \lambda_n^E - \frac{\varepsilon_1 \delta_n^p}{H_0^{(1)}(j_{0n})} \right\} 2 j_{0n} H_0^{(1)}(j_{0n}) J_1(j_{0n}\rho) =$$

$$= -\sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m \varepsilon_2 \tilde{A}_{m2} H_0^{(1)}(\tilde{A}_{m2}) J_1(\tilde{A}_{m2}\rho), \qquad (16)$$

где $$\lambda_n^E = \frac{1}{2}\left[\varepsilon_2\left(e_{n2}^2+1\right) - \varepsilon_1 \frac{\gamma_{n2}}{\gamma_{n1}}\left(e_{n2}^2-1\right)\right]. \qquad (17)$$

Переразложим в (16) функции, полные на интервале $\left[-2\pi r, 2\pi r\right]$, по функциям, полным на интервале $\left[0,1\right]$:

$$-\varepsilon_2 \tilde{A}_{m2} H_0^{(1)}(\tilde{A}_{m2}) J_1(\tilde{A}_{m2}\rho) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^m 2 j_{0n} H_0^{(1)}(j_{0n}) J_1(j_{0n}\rho), \qquad (18)$$

где коэффициенты переразложения β_n^m определяются как

$$\beta_n^m = -\frac{\varepsilon_2 \tilde{A}_{m2} H_0^{(1)}(\tilde{A}_{m2})}{2 j_{0n} H_0^{(1)}(j_{0n})} \times$$
$$\times \frac{\int_0^1 \rho J_1(\tilde{A}_{m2}\rho) J_1(j_{0n}\rho) d\rho}{\int_0^1 \rho J_1^2(j_{0n}\rho) d\rho}$$

и равны

$$\beta_n^m = \begin{cases} -\dfrac{\pi i \varepsilon_2}{2} \dfrac{\tilde{A}_{m2}^2 J_0(\tilde{A}_{m2}) H_0^{(1)}(\tilde{A}_{m2})}{\tilde{A}_{m2}^2 - j_{0n}^2}, \\ \qquad \tilde{A}_{m2} \neq j_{0n}, \\ -\varepsilon_2 / 2, \\ \qquad \tilde{A}_{m2} = j_{0n}. \end{cases} \qquad (19)$$

При вычислении β_n^m использованы интегралы Ломмеля

$$\int_0^1 \rho J_1(\tilde{A}_{m2}\rho) J_1(j_{0n}\rho) d\rho =$$
$$= \frac{1}{\tilde{A}_{m2}^2 - j_{0n}^2}\left\{ j_{0n} J_0(j_{0n}) J_1(\tilde{A}_{m2}) - \right.$$
$$\left. -\tilde{A}_{m2} J_0(\tilde{A}_{m2}) J_1(j_{0n}) \right\} = -\frac{\tilde{A}_{m2} J_0(\tilde{A}_{m2}) J_1(j_{0n})}{\tilde{A}_{m2}^2 - j_{0n}^2},$$

$$\int_0^1 \rho J_1^2(j_{0n}\rho) d\rho = \frac{1}{2} J_1^2(j_{0n}),$$

и Вронскиан

$$J_0(j_{0n}) H_1^{(1)}(j_{0n}) - H_0^{(1)}(j_{0n}) J_1(j_{0n}) = \frac{2}{\pi i j_{0n}},$$

откуда $j_{0n} H_0^{(1)}(j_{0n}) J_1(j_{0n}) = -\dfrac{2}{\pi i}$.

Тогда, подставляя (18) в (16) и используя (15), получим бесконечную систему алгебраических уравнений относительно амплитуд g_n и c_m:

$$g_n \lambda_n^E = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \tau_m \beta_n^m + \frac{\varepsilon_1 \delta_n^p}{H_0^{(1)}(j_{0n})}. \qquad (20)$$

Сшивание составляющих H_ϕ на границе областей 2 и 3 приводит, с учетом (11) и (12), к функциональному уравнению

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \Delta_m e^{im(\frac{z}{2r}-\pi)} =$$
$$= -\frac{2}{\pi i}\sum_{n=1}^{\infty} g_n \varepsilon_2 \left\{ e^{i\gamma_{n2}(2\pi r+z)} + e^{i\gamma_{n2}(2\pi r-z)} \right\}, \qquad (21)$$

где

$$\Delta_m = \varepsilon_3 \tilde{A}_{m3}\left\{ \frac{H_1^{(1)}(\tilde{A}_{m3})}{H_0^{(1)}(\tilde{A}_{m3})} - \sigma_m^E \frac{H_1^{(2)}(\tilde{A}_{m3})}{H_0^{(2)}(\tilde{A}_{m3})} \right\} -$$
$$-\varepsilon_2 \tau_m \tilde{A}_{m2} H_0^{(1)}(\tilde{A}_{m2}) J_1(\tilde{A}_{m2}).$$

Переразложим в (21) функции, полные на интервале $\left[0,1\right]$, по функциям, полным на интервале $\left[-2\pi r, 2\pi r\right]$:

$$\varepsilon_2 \left\{ e^{i\gamma_{n2}(2\pi r+z)} + e^{i\gamma_{n2}(2\pi r-z)} \right\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m^n e^{im(\frac{z}{2r}-\pi)}, \qquad (22)$$

где коэффициенты переразложения α_m^n определяются как

$$\alpha_m^n = \frac{1}{4\pi r}\int_{-2\pi r}^{2\pi r}\left\{ e^{i\gamma_{n2}(2\pi r+z)} + e^{i\gamma_{n2}(2\pi r-z)} \right\} e^{-im\left(\frac{z}{2r}-\pi\right)} dz =$$
$$= \frac{e^{2i\gamma_{n2}\pi r}\varepsilon_2(-1)^m}{4\pi r}\int_{-2\pi r}^{2\pi r}\left\{ e^{i\left(\gamma_{n2}-\frac{m}{2r}\right)z} + e^{-i\left(\gamma_{n2}+\frac{m}{2r}\right)z} \right\} dz =$$
$$= \frac{e_{n2}(-1)^m \varepsilon_2}{2\pi r}\left\{ \frac{\sin\left(2\pi r\gamma_{n2} - m\pi\right)}{\gamma_{n2} - m/2r} + \right.$$
$$\left. + \frac{\sin\left(2\pi r\gamma_{n2} + m\pi\right)}{\gamma_{n2} + m/2r} \right\} =$$
$$= \frac{e_{n2}(-1)^m \varepsilon_2 \sin\left(2\gamma_{n2}\pi r\right)}{2\pi r}\left\{ \frac{1}{\gamma_{n2} - m/2r} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\gamma_{n2} + m/2r} \right\} = \frac{\left(e_n^2 - 1\right)\varepsilon_2}{4\pi r i}\frac{2\gamma_{n2}}{\gamma_{n2}^2 - \left(m/2r\right)^2}$$

и равны

$$\alpha_m^n = \begin{cases} \dfrac{(e_{n2}^2-1)\varepsilon_2}{2\pi r i}\dfrac{\gamma_{n2}}{\gamma_{n2}^2 - \left(m/2r\right)^2}, \\ \qquad \gamma_{n2} \neq m/2r, \\ \varepsilon_2(1+\delta_m^0), \\ \qquad \gamma_{n2} = m/2r. \end{cases} \qquad (23)$$

Подставив (22) в (21), получим бесконечную систему алгебраических уравнений относительно амплитуд c_m и g_n :

$$c_m = -\frac{2}{\pi i \Delta_m} \sum_{n=1}^{\infty} g_n \alpha_m^n \,. \qquad (24)$$

Выполняя условие непрерывности составляющих H_ϕ на границе областей 2 и 4, получим функциональное уравнение

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m e^{-im\pi} \varepsilon_2 \tilde{A}_{m2} H_0^{(1)}(\tilde{A}_{m2}) J_1(\tilde{A}_{m2}\rho) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{s_n \varepsilon_4}{2} - e_{n2}\varepsilon_2 g_n \right) 2 j_{0n} H_0^{(1)}(j_{0n}) J_1(j_{0n}\rho),$$

откуда, после использования переразложения (18), для волн, прошедших в область 4, находим

$$s_n = \frac{2}{\varepsilon_4} \left[g_n \varepsilon_2 e_{n2} - \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m (-1)^m \beta_n^m \right]. \qquad (25)$$

После подстановки (24) в (20) получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений второго рода (БСЛАУ) относительно амплитуд g_n :

$$g_\nu \lambda_\nu^E + \sum_{n=1}^{\infty} g_n P_{n\nu} = \frac{\varepsilon_1 \delta_\nu^p}{H_0^{(1)}(j_{0\nu})}, \qquad (26)$$

с матричными коэффициентами

$$P_{n\nu} = \frac{2}{\pi i} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m^n \beta_\nu^m \frac{\tau_m}{\Delta_m}. \qquad (27)$$

Коэффициенты b_n , c_m , d_m , f_m и s_n вычисляются по формулам (13), (24), (14), (15) и (25).

H_{0n}-волны (E_ϕ -поляризация)

В этом случае класс частных решений уравнений Максвелла будем искать с помощью магнитного потенциала Герца, выражения для которого в областях 1 – 4 запишем в виде:

$$Ï_{Ì}^{(1)} = \sum_{ò=1}^{\infty} \left\{ \delta_n^p e^{-i\gamma_{n1}(z-2\pi r)} + b_n e^{i\gamma_{n1}(z-2\pi r} \right\} J_0(j_{1n}\rho);$$

$$Ï_{H}^{(2)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m H_1^{(1)}(\tilde{A}_{m2}) J_0(\tilde{A}_{m2}\rho) e^{im(\frac{z}{2r}-\pi)} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} g_n H_1^{(1)}(j_{1n}) J_0(j_{1n}\rho) \left\{ e^{i\gamma_{n2}(2\pi r+z)} - e^{i\gamma_{n2}(2\pi r-z)} \right\};$$

$$Ï_{H}^{(3)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ c_m \frac{H_0^{(1)}(\tilde{A}_{m3}\rho)}{H_1^{(1)}(\tilde{A}_{m3})} + \right.$$

$$\left. + d_m \frac{H_0^{(2)}(\tilde{A}_{m3}\rho)}{H_1^{(2)}(\tilde{A}_{m3})} \right\} e^{im(\frac{z}{2r}-\pi)};$$

$$Ï_{H}^{(4)} = \sum_{n=1}^{\infty} s_n H_1^{(1)}(j_{1n}) J_0(j_{1n}\rho) e^{-i\gamma_{n4} z}.$$

Отличные от нуля составляющие поля определяются из уравнений Максвелла по формулам

$$H_z = \left(æ^2 \varepsilon + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) Ï_{\acute{I}} \;; \quad \acute{I}_{\rho} = \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial z} Ï_{\acute{I}} \;;$$

$$Å_\phi = -iæ\varepsilon \frac{\partial}{\partial \rho} Ï_{\acute{I}}$$

и имеют вид:

– в области 1:

$$H_z^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} j_{1n}^2 \left\{ \delta_n^p e^{-i\gamma_{n1}(z-2\pi r)} + \right.$$

$$\left. + b_n e^{i\gamma_{n1}(z-2\pi r)} \right\} J_0(j_{1n}\rho);$$

$$H_\rho^{(1)} = i \sum_{n=1}^{\infty} j_{1n} \gamma_{n1} \left\{ \delta_n^p e^{-i\gamma_{n1}(z-2\pi r)} - \right. \qquad (28)$$

$$\left. - b_n e^{i\gamma_{n1}(z-2\pi r)} \right\} J_1(j_{1n}\rho);$$

$$E_\phi^{(1)} = iæ\varepsilon_1 \sum_{n=1}^{\infty} j_{1n} \left\{ \delta_n^p e^{-i\gamma_{n1}(z-2\pi r)} + b_n e^{i\gamma_{n1}(z-2\pi r)} \right\} \times$$

$$\times J_1(j_{1n}\rho),$$

где γ_{n1} определяется правой формулой (1);

– в области 2:

$$H_z^{(2)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m \tilde{A}_{m2}^2 H_1^{(1)}(\tilde{A}_{m2}) J_0(\tilde{A}_{m2}\rho)\, e^{im(\frac{z}{2r}-\pi)} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} g_n j_{1n}^2 H_1^{(1)}(j_{1n}) J_0(j_{1n}\rho) \times$$

$$\times \left\{ e^{i\gamma_{n2}(2\pi r+z)} - e^{i\gamma_{n2}(2\pi r-z)} \right\};$$

$$H_\rho^{(2)} = -i \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m \tilde{A}_{m2} \frac{m}{2r} H_1^{(1)}(\tilde{A}_{m2}) \times$$

$$\times J_1(\tilde{A}_{m2}\rho) e^{im(\frac{z}{2r}-\pi)} - \qquad (29)$$

$$-i \sum_{n=1}^{\infty} g_n j_{1n} \gamma_{n2} H_1^{(1)}(j_{1n}) J_1(j_{1n}\rho) \times$$

$$\times \left\{ e^{i\gamma_{n2}(2\pi r+z)} + e^{i\gamma_{n2}(2\pi r-z)} \right\};$$

$$E_\phi^{(2)} = iæ\varepsilon_2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m \tilde{A}_{m2} H_1^{(1)}(\tilde{A}_{m2}) J_1(\tilde{A}_{m2}\rho) \times$$

$$\times e^{im(\frac{z}{2r)}-\pi)} +$$

$$+ iæ\varepsilon_2 \sum_{n=1}^{\infty} g_n j_{1n} H_1^{(1)}(j_{1n}) J_1(j_{1n}\rho) \times$$

$$\times \left\{ e^{i\gamma_{n2}(2\pi r+z)} - e^{i\gamma_{n2}(2\pi r-z)} \right\},$$

где $\tilde{A}_{m2}$ определяются выражением (4), в котором m = 1, 2, 3,…;

– в области 3:

$$H_z^{(3)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{A}_{m3}^2 \left\{ c_m \frac{H_0^{(1)}(\tilde{A}_{m3}\rho)}{H_1^{(1)}(\tilde{A}_{m3})} + d_m \frac{H_0^{(2)}(\tilde{A}_{m3}\rho)}{H_1^{(2)}(\tilde{A}_{m3})} \right\} e^{im(\frac{z}{2r}-\pi)};$$

$$H_\rho^{(3)} = -i \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{A}_{m3} \frac{m}{2r} \left\{ c_m \frac{H_1^{(1)}(\tilde{A}_{m3}\rho)}{H_1^{(1)}(\tilde{A}_{m3})} + d_m \frac{H_1^{(2)}(\tilde{A}_{m3}\rho)}{H_1^{(2)}(\tilde{A}_{m3})} \right\} e^{im(\frac{z}{2r}-\pi)};$$

$$E_\phi^{(3)} = i æ \varepsilon_3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{A}_{m3} \left\{ c_m \frac{H_1^{(1)}(\tilde{A}_{m3}\rho)}{H_1^{(1)}(\tilde{A}_{m3})} + d_m \frac{H_1^{(2)}(\tilde{A}_{m3}\rho)}{H_1^{(2)}(\tilde{A}_{m3})} \right\} e^{im(\frac{z}{2r}-\pi)}, \quad (30)$$

где $\tilde{A}_{m3}$ определяются формулой (5), в которой m = 1, 2, 3,…;

– в области 4:

$$H_z^{(4)} = \sum_{n=1}^{\infty} s_n j_{1n}^2 H_1^{(1)}(j_{1n}) J_0(j_{1n}\rho) e^{-i\gamma_{n4}z};$$

$$H_\rho^{(4)} = i \sum_{n=1}^{\infty} s_n j_{1n} \gamma_{n4} H_1^{(1)}(j_{1n}) \times J_1(j_{1n}\rho) e^{-i\gamma_{n4}z}; \quad (31)$$

$$E_\phi^{(4)} = i æ \varepsilon_4 \sum_{n=1}^{\infty} s_n j_{1n} H_1^{(1)}(j_{1n}) J_1(j_{1n}\rho) e^{-i\gamma_{n4}z}.$$

Выполняя граничное условие $E_\phi^{(3)} = 0$ при $\rho = \theta$, получим соотношение между d_m и c_m:

$$d_m = -c_m \sigma_m^H, \quad (32)$$

где $\sigma_m^H = \frac{H_1^{(1)}(\tilde{A}_{m3}\theta) H_1^{(2)}(\tilde{A}_{m3})}{H_1^{(2)}(\tilde{A}_{m3}\theta) H_1^{(1)}(\tilde{A}_{m3})}$.

Сшивая составляющие E_ϕ на границе $z = 2\pi r$, получим функциональное уравнение

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \varepsilon_1 \left[\delta_n^p + b_n \right] - g_n \varepsilon_2 H_1^{(1)}(j_{1n})(e_{n2}^2 - 1) \right\} \times j_{1n} J_1(j_{1n}\rho) = \varepsilon_2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m \tilde{A}_{m2} H_1^{(1)}(\tilde{A}_{m2}) J_1(\tilde{A}_{m2}\rho),$$

но так как в случае E_ϕ - поляризованных волн для амплитуд f_m выполняется соотношение

$$f_m = -f_{-m},$$

то $$\varepsilon_2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m \tilde{A}_{m2} H_1^{(1)}(\tilde{A}_{m2}) J_1(\tilde{A}_{m2}\rho) \equiv 0,$$

и $$b_n = g_n \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}(e_{n2}^2 - 1) H_1^{(1)}(j_{1n}) - \delta_n^p. \quad (33)$$

Выполняя условие непрерывности $E_\phi^{(2)} = E_\phi^{(3)}$, при $\rho = 1$ получаем функциональное уравнение

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ \varepsilon_3 \tilde{A}_{m3} \left[c_m + d_m \right] - f_m \varepsilon_2 H_1^{(1)}(\tilde{A}_{m2}) J_1(\tilde{A}_{m2}) \right\} \times e^{im(\frac{z}{2r}-\pi)} = \varepsilon_2 \sum_{n=1}^{\infty} g_n j_{1n} H_1^{(1)}(j_{1n}) J_1(j_{1n}) \times \left\{ e^{i\gamma_{n2}(2\pi r+z)} - e^{i\gamma_{n2}(2\pi r-z)} \right\}. \quad (34)$$

Но поскольку $J_1(j_{1n}) = 0$, из (34), с учетом (32), следует соотношение

$$f_m = c_m \eta_m, \quad (35)$$

где $\eta_m = \frac{\varepsilon_3 \tilde{A}_{m3}}{\varepsilon_2 \tilde{A}_{m2}} \frac{1 - \sigma_m^H}{H_1^{(1)}(\tilde{A}_{m2}) J_1(\tilde{A}_{m2})}$.

Выполнив условие $H_\rho^{(1)} = H_\rho^{(2)}$ при $z = 2\pi r$ и учитывая (33), получим функциональное уравнение

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\delta_n^p}{H_1^{(1)}(j_{1n})} + g_n \lambda_n^H \right\} \times 2 j_{1n} \gamma_{n1} H_1^{(1)}(j_{1n}) J_1(j_{1n}\rho) = - \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m \tilde{A}_{m2} \frac{m}{2r} H_1^{(1)}(\tilde{A}_{m2}) J_1(\tilde{A}_{m2}\rho), \quad (36)$$

где $$\lambda_n^H = \frac{1}{2} \left[\frac{\gamma_{n2}}{\gamma_{n1}} \left(e_{n2}^2 + 1 \right) - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \left(e_{n2}^2 - 1 \right) \right]. \quad (37)$$

Используем переразложение

$$-\tilde{A}_{m2} \frac{m}{2r} H_1(\tilde{A}_{m2}) J_1(\tilde{A}_{m2}\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^m j_{1n} \gamma_{n1} 2 H_1^{(1)}(j_{1n}) J_1(j_{1n}\rho), \quad (38)$$

в котором коэффициенты переразложения β_n^m определяются как

$$\beta_n^m = -\frac{\tilde{A}_{m2} \frac{m}{2r} H_1^{(1)}(\tilde{A}_{m2})}{2 j_{1n} \gamma_{n1} H_1^{(1)}(j_{1n})} \times \int_0^1 \rho J_1(\tilde{A}_{m2}\rho) J_1(j_{1n}\rho) d\rho \bigg/ \int_0^1 \rho J_1^2(j_{1n}\rho) d\rho$$

и равны

$$\beta_n^m = \begin{cases} -\dfrac{\pi i}{2}\dfrac{j_{1n}\tilde{A}_{m2}\dfrac{m}{2r}H_1^{(1)}(\tilde{A}_{m2})J_1(\tilde{A}_{m2})}{\gamma_{n1}^2(\tilde{A}_{m2}^2-j_{1n}^2)}, \\ \tilde{A}_{m2}\neq j_{1n}, \\ -1/2, \\ \tilde{A}_{m2}=j_{1n}. \end{cases}$$

При вычислении β_n^m использованы интегралы Ломмеля

$$\int_0^1 \rho J_1(\tilde{A}_{m2}\rho)J_1(j_{1n}\rho)d\rho =$$

$$=\frac{1}{\tilde{A}_{m2}^2-j_{1n}^2}\{j_{1n}J_0(j_{1n})J_1(\tilde{A}_{m2})-$$

$$-\tilde{A}_{m2}J_0(\tilde{A}_{m2})J_1(j_{1n})\}=$$

$$=\frac{j_{1n}J_0(j_{1n})J_1(\tilde{A}_{m2})}{\tilde{A}_{m2}^2-j_{1n}^2},$$

$$\int_0^1 \rho J_1^2(j_{1n}\rho)d\rho=\frac{1}{2}J_0^2(j_{1n})$$

и Вронскиан

$$J_0(j_{1n})H_1^{(1)}(j_{1n})-J_1(j_{1n})H_0^{(1)}(j_{1n})=\frac{2}{\pi i j_{1n}},$$

откуда $j_{1n}J_0(j_{1n})H_0^{(1)}(j_{1n})=\dfrac{2}{\pi i}$.

Подставив (38) в (36), получим бесконечную систему алгебраических уравнений

$$g_n\lambda_n^H=\sum_{m=-\infty}^{\infty}c_m\eta_m\beta_n^m-\frac{\delta_n^p}{H_1^{(1)}(j_{1p})}. \tag{39}$$

Выполнив условие $H_z^{(2)}=H_z^{(3)}$ при $\rho=1$ и учтя (32) и (35), получим функциональное уравнение

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}c_m\tilde{A}_{m2}^2\Omega_m e^{im(\frac{z}{2r}-\pi)}= \tag{40}$$

$$=-\frac{2}{\pi i}\sum_{n=1}^{\infty}g_n j_{1n}\left\{e^{i\gamma_{n2}(2\pi r+z)}-e^{i\gamma_{n2}(2\pi r-z)}\right\},$$

где $\Omega_m=\eta_m H_1^{(1)}(\tilde{A}_{m2})J_0(\tilde{A}_{m2})-$

$$-\frac{\tilde{A}_{m3}^2}{\tilde{A}_{m2}^2}\left[\frac{H_0^{(1)}(\tilde{A}_{m3})}{H_1^{(1)}(\tilde{A}_{m3})}-\sigma_m^H\frac{H_0^{(2)}(\tilde{A}_{m3})}{H_1^{(2)}(\tilde{A}_{m3})}\right].$$

Используем переразложение

$$e^{i\gamma_{n2}(2\pi r+z)}-e^{i\gamma_{n2}(2\pi r-z)}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\alpha_m^n e^{im(\frac{z}{2r}-\pi)}, \tag{41}$$

где коэффициенты α_m^n определяются как

$$\alpha_m^n=\frac{1}{4\pi r}\int_{-2\pi r}^{2\pi r}\left\{e^{i\gamma_{n2}(2\pi r+z)}-e^{i\gamma_{n2}(2\pi r-z)}\right\}\times$$

$$\times e^{-im(\frac{z}{2r}-\pi)}dz=$$

$$=\frac{e_n(-1)^m}{4\pi r}\int_{-2\pi r}^{2\pi r}\left\{e^{i\left(\gamma_{n2}-\frac{m}{2r}\right)z}-e^{-i\left(\gamma_{n2}+\frac{m}{2r}\right)z}\right\}dz=$$

$$=\frac{e_n(-1)^m}{2\pi r}\left\{\frac{\sin(2\pi r\gamma_{n2}-m\pi)}{\gamma_{n2}-m/2r}-\right.$$

$$\left.-\frac{\sin(2\pi r\gamma_{n2}+m\pi)}{\gamma_{n2}+m/2r}\right\}=\frac{e_n\sin(2\pi r\gamma_{n2})}{2\pi r}\times$$

$$\times\left\{\frac{1}{\gamma_{n2}-m/2r}-\frac{1}{\gamma_{n2}+m/2r}\right\}=$$

$$=\frac{e_n\sin(2\pi r\gamma_{n2})}{\pi r}\frac{m/2r}{\gamma_{n2}^2-\left(m/2r^2\right)}=$$

$$=\frac{e_{n2}^2-1}{2\pi r i}\frac{m/2r}{\gamma_{n2}^2-(m/2r)^2}$$

и равны

$$\alpha_m^n=\begin{cases}\dfrac{e_n^2-1}{2\pi r i}\dfrac{m/2r}{\gamma_n^2-(m/2r)^2}, \\ \gamma_{n2}\neq m/2r, \\ 1, \\ \gamma_{n2}=m/2r.\end{cases}$$

Подставляя (41) в (40), получим бесконечную систему уравнений для определения c_m:

$$c_m=-\frac{2}{\pi i\tilde{A}_{m2}^2\Omega_m}\sum_{n=1}^{\infty}g_n j_{1n}\alpha_m^n. \tag{42}$$

Наконец, выполняя условие непрерывности E_ϕ-составляющих на границе $z=0$, получим функциональное уравнение

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}f_m\varepsilon_2\tilde{A}_{m2}(-1)^m H_1^{(1)}(\tilde{A}_{m2})J_1(\tilde{A}_{m2}\rho)=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}s_n j_{1n}\varepsilon_4 H_1^{(1)}(j_{1n}\rho)$$

или

$$-\sum_{m=-\infty}^{\infty}f_m\frac{(-1)^m}{m/2r}\tilde{A}_{m2}\frac{m}{2r}H_1^{(1)}(\tilde{A}_{m2})J_1(\tilde{A}_{m2}\rho)=$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{s_n}{2\gamma_{n1}}\frac{\varepsilon_4}{\varepsilon_2}2j_{1n}\gamma_{n1}H_1^{(1)}(j_{1n})J_1(j_{1n}\rho). \tag{43}$$

Подставляя в (43) представление (38) и соотношение (35), получим бесконечную систему уравнений, связывающую амплитуды s_n и c_m :

$$s_n = -2\gamma_{n1}\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_4}\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \frac{(-1)^m \eta_m}{m/2r}\beta_n^m . \quad (44)$$

Подставив (42) в (39), имеем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений второго рода для определения амплитуд g_ν :

$$g_\nu\lambda_\nu^H + \sum_{\nu=1}^{\infty} g_n P_{n\nu} = -\delta_\nu^p \Big/ H_1^{(1)}(j_{1\nu}) \quad (45)$$

с матричными коэффициентами

$$P_{n\nu} = \frac{2}{\pi i}\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\eta_m j_{1n}}{\tilde{A}_{m2}^2\Omega_m}\alpha_m^n\beta_\nu^m . \quad (46)$$

Амплитуды b_n , c_m , d_m , f_m и s_n вычисляются по формулам (33), (42), (32), (35) и (44).

Длинноволновое приближение (H_φ-поляризация)

Явные формулы для определения коэффициентов преобразования на структуре в длинноволновом приближении (ær << 1) определим способом, использованным в [5]. Запишем (45) в виде

$$x_\nu + \sum_{n=1}^{\infty} x_n A_{n\nu} = \frac{\varepsilon_1\delta_\nu^p}{H_0^{(1)}(j_{0\nu})}, \quad (47)$$

где $$x_\nu = g_\nu\lambda_\nu^E,\ \ x_n = g_n\lambda_n^E,\ \ A_{n\nu} = \frac{P_{n\nu}}{\lambda_n^E}, \quad (48)$$

коэффициенты λ_n^E определяются выражением (17), а $P_{n\nu}$ – выражением (46).

Представим матричные коэффициенты $A_{n\nu}$ как

$$A_{n\nu} = A_{n\nu}^{(0)} + \tilde{A}_{n\nu}, \quad (49)$$

а решение системы (47) – как $x_\nu = x_\nu^{(0)} + \tilde{x}_\nu$, и в выражении для $A_{n\nu}$ удержим лишь слагаемые, пропорциональные 1/ær. Тогда решение приближенной системы $x_\nu^{(0)}$ будет отличаться от решения исходной системы x_ν на величину ær << 1.

Выражение для $A_{n\nu}^{(0)}$ (m = 0) имеет вид

$$A_{n\nu}^{(0)} = -\frac{æ^2\varepsilon_2^3 J_0\left(æ\sqrt{\varepsilon_2}\right)H_0^{(1)}\left(æ\sqrt{\varepsilon_2}\right)\tau_0}{2\pi r i\Delta_0}\phi_n\psi_\nu, \quad (50)$$

где $$\tau_0 = \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2}\frac{1-\sigma_0^E}{H_0^{(1)}\left(æ\sqrt{\varepsilon_2}\right)J_0\left(æ\sqrt{\varepsilon_2}\right)},$$

$$\sigma_0^E = \frac{H_0^{(1)}\left(æ\sqrt{\varepsilon_3}\theta\right)H_0^{(2)}\left(æ\sqrt{\varepsilon_3}\right)}{H_0^{(2)}\left(æ\sqrt{\varepsilon_3}\theta\right)H_0^{(1)}\left(æ\sqrt{\varepsilon_3}\right)},$$

$$\Delta_0 = æ\varepsilon_3\sqrt{\varepsilon_3}\left\{\frac{H_1^{(1)}\left(æ\sqrt{\varepsilon_3}\right)}{H_0^{(1)}\left(æ\sqrt{\varepsilon_3}\right)} - \sigma_0^E\frac{H_1^{(2)}\left(æ\sqrt{\varepsilon_3}\right)}{H_0^{(2)}\left(æ\sqrt{\varepsilon_3}\right)}\right\} -$$

$$-\tau_0æ\varepsilon_2\sqrt{\varepsilon_2}H_0^{(1)}\left(æ\sqrt{\varepsilon_2}\right)J_1\left(æ\sqrt{\varepsilon_2}\right),$$

$$\phi_n = \frac{e_{n2}^2 - 1}{\gamma_{n2}\lambda_n^E}, \qquad \psi_\nu = \frac{1}{\gamma_{\nu2}^2},$$

$$\gamma_{n2} = \sqrt{æ^2\varepsilon_2 - j_{0n}^2}, \qquad e_{n2}^2 = e^{4\pi r i\gamma_{n2}}.$$

Тогда $x_\nu^{(0)}$ будет решением системы

$$x_\nu^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} x_n^{(0)} A_{n\nu}^{(0)} = \frac{\varepsilon_1\delta_\nu^p}{H_0^{(1)}(j_{0\nu})}, \quad (51)$$

а $\tilde{x}_\nu$ удовлетворяют уравнениям

$$\tilde{x}_\nu + \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{x}_n A_{n\nu} = -\sum_{n=1}^{\infty} x_n^{(0)}\tilde{A}_{n\nu}.$$

Из представления (50) видно, что система (51) имеет вырожденное ядро и может быть записана как

$$x_\nu^{(0)} - \frac{æ^2\varepsilon_2^3 J_0\left(æ\sqrt{\varepsilon_2}\right)H_0^{(1)}\left(æ\sqrt{\varepsilon_2}\right)\tau_0}{2\pi r i\Delta_0}\psi_\nu \times$$

$$\times\sum_{n=1}^{\infty} x_n^{(0)}\phi_n = \frac{\varepsilon_1\delta_\nu^p}{H_0^{(1)}(j_{0\nu})}. \quad (52)$$

Умножив (52) на ϕ_ν и просуммировав по ν, получим

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} x_\nu^{(0)}\phi_\nu = \frac{æ^2\varepsilon_2^3 J_0\left(æ\sqrt{\varepsilon_2}\right)H_0^{(1)}\left(æ\sqrt{\varepsilon_2}\right)\tau_0}{2\pi r i\Delta_0}\times$$

$$\times\sum_{\nu=1}^{\infty}\psi_\nu\phi_\nu\sum_{n=1}^{\infty} x_n^{(0)}\phi_n = \frac{\varepsilon_1\phi_p}{H_0^{(1)}(j_{0p})}$$

или

$$\left\{\frac{2\pi r i - æ^2\varepsilon_2^3 J_0\left(æ\sqrt{\varepsilon_2}\right)H_0^{(1)}\left(æ\sqrt{\varepsilon_2}\right)\tau_0 S}{2\pi r i\Delta_0}\right\}\times$$

$$\times\sum_{\nu=1}^{\infty} x_n^{(0)}\phi_n = \frac{\varepsilon_1\phi_p}{H_0^{(1)}(j_{0p})},$$

откуда $$\sum_{n=1}^{\infty} x_n^{(0)}\phi_n = \frac{1}{H_0^{(1)}\left(j_{0p}\right)}\times \quad (53)$$

$$\times\frac{2\pi r i\Delta_0\varepsilon_1\phi_p}{\left[2\pi r i\Delta_0 - æ^2\varepsilon_2^3 J_0\left(æ\sqrt{\varepsilon_2}\right)H_0^{(1)}\left(æ\sqrt{\varepsilon_2}\right)\tau_0 S\right]},$$

где $$S = \sum_{\nu=1}^{\infty}\psi_\nu\phi_\nu = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{e_{\nu2}^2 - 1}{\gamma_{\nu2}^3\lambda_{\nu1}^E}. \quad (54)$$

Подставляя (53) в (52), найдем

$$x_\nu^{(0)} = \frac{æ^2\varepsilon_2^3 J_0\left(æ\sqrt{\varepsilon_2}\right)H_0^{(1)}\left(æ\sqrt{\varepsilon_2}\right)\tau_0\varepsilon_1\psi_\nu\phi_p}{2\pi r i\Delta_0 - æ^2\varepsilon_2^3 J_0\left(æ\sqrt{\varepsilon_2}\right)H_0^{(1)}\left(æ\sqrt{\varepsilon_2}\right)\tau_0 S}\times$$

$$\times\frac{1}{H_0^{(1)}(j_{0p})}+\frac{\varepsilon_1\delta_\nu^p}{H_0^{(1)}(j_{0\nu})}$$

или

$$x_\nu^{(0)}=\frac{C\varepsilon_1\psi_\nu\phi_p}{H_0^{(1)}(j_{0p})}+\frac{\varepsilon_1\delta_\nu^p}{H_0^{(1)}(j_{0\nu})},\quad g_\nu^{(0)}=\frac{x_\nu^{(0)}}{\lambda_\nu^E},\qquad(55)$$

где $C=\dfrac{æ^2\varepsilon_2^3 J_0\left(æ\sqrt{\varepsilon_2}\right)H_0^{(1)}\left(æ\sqrt{\varepsilon_2}\right)\tau_0}{2\pi ri\Delta_0-æ^2\varepsilon_2^3 J_0\left(æ\sqrt{\varepsilon_2}\right)H_0^{(1)}\left(æ\sqrt{\varepsilon_2}\right)\tau_0 S}$.

Тогда искомые коэффициенты преобразования на структуре примут вид:

$$g_\nu^{(0)}=\frac{\varepsilon_1}{\lambda_\nu^E}\left\{\frac{\delta_\nu^p}{H_0^{(1)}(j_{0\nu})}+\frac{C\left(e_{p2}^2-1\right)}{\gamma_{p2}\gamma_{\nu2}^2\lambda_p^E H_0^{(1)}(j_{0p})}\right\},$$

$$b_\nu^{(0)}=\delta_\nu^p+g_\nu^{(0)}\frac{\gamma_{\nu2}}{\gamma_{\nu1}}\left(e_{\nu2}^2-1\right)H_0^{(1)}(j_{0\nu}),\qquad(56)$$

$$c_m^{(0)}=\frac{\varepsilon_2}{\pi^2 r\Delta_0}\sum_{\nu=1}^{\infty}g_\nu^{(0)}\frac{\left(e_{\nu2}^2-1\right)}{\gamma_{\nu2}},$$

$$f_m^{(0)}=c_m^{(0)}\tau_0,\qquad d_m^{(0)}=-c_m^{(0)}\sigma_0^E,$$

$$s_\nu^{(0)}=\frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_4}\left\{g_\nu^{(0)}e_{\nu2}-\right.\qquad(57)$$

$$\left.-\frac{æ^2\varepsilon_2^2\tau_0 J_0\left(æ\sqrt{\varepsilon_2}\right)H_0^{(1)}\left(æ\sqrt{\varepsilon_2}\right)}{2\pi ri\Delta_0}\sum_{\nu=1}^{\infty}g_\nu^{(0)}\frac{\left(e_{\nu2}^2-1\right)}{\gamma_{\nu2}^3}\right\}.$$

На рис. 2 и рис. 3 приведены зависимости от частоты амплитуд первых гармоник коэффициентов отражения в верхний волновод и прохождения в нижний волновод для волны E_{01} при различных вариантах заполнения диэлектриком частичных областей. Зависимости построены по формулам (56) и (57), полученным в длинноволновом приближении.

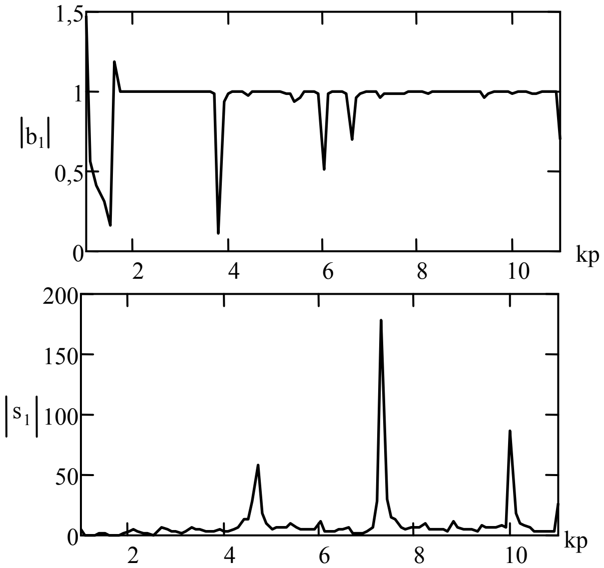

Рис. 2. Коэффициенты отражения в верхний $|b_1|$ и прохождения в нижний $|s_1|$ волновод для волны E_{01} при $\varepsilon_1=2{,}25$; $\varepsilon_2=1{,}4$; $\varepsilon_3=2{,}2$; $\varepsilon_4=1{,}8$; $\theta=4$; $r=0{,}1$

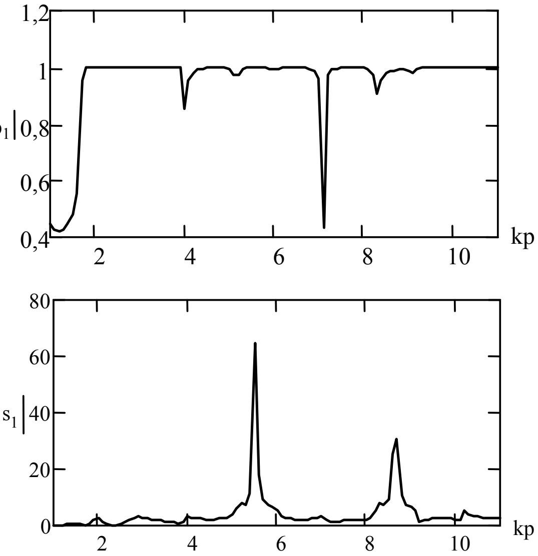

Рис. 3. Коэффициенты отражения в верхний $|b_1|$ и прохождения в нижний $|s_1|$ волновод для волны E_{01} при $\varepsilon_1=2$; $\varepsilon_2=1$; $\varepsilon_3=4$; $\varepsilon_4=3$; $\theta=2$; $r=0{,}1$

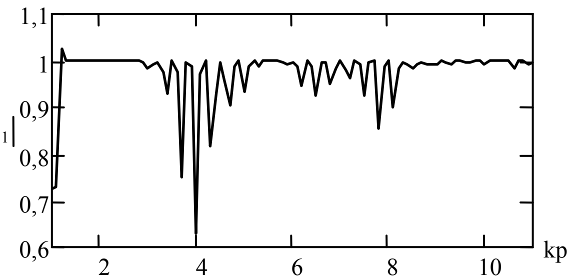

Рис. 4. Коэффициент отражения в верхний волновод $|b_1|$ для волны E_{01} при $\varepsilon_1=4$; $\varepsilon_2=1$; $\varepsilon_3=1$; $\varepsilon_4=3$; $\theta=10$; $r=0{,}1$

Заключение

В результате строгого решения получены бесконечные системы линейных алгебраических уравнений второго рода относительно амплитуд волн пространственного спектра дифрагированного поля – элементов матрицы рассеяния на структуре. Решение получено для обеих поляризаций и без ограничений на параметры структуры. Для случая E_{0n}-волн получены явные формулы для коэффициентов преобразования в длинноволновом приближении.

Такие волноводные соединения представляют собой переходящую веху между полыми волноводами и экранированными интегральными линиями передачи, а также являются основой для создания целого ряда волноводно-диэлектрических фильтрующих устройств.

Литература

1. Нарытник Т.Н. Микроволновые технологии в телекоммуникационных системах / Т.Н. Нарытник, В.П. Бабак, М.Е. Ильченко, С.А. Кравчук. – К.: Техніка, 2000. – 304 с.

2. Конструирование экранов и СВЧ-устройств / Под ред. А.М. Чернушенко. – М.: Радио и связь, 1990. – 352 с.

3. Заикин И.П. Дифракция электромагнитных волн на симметричном соединении двух круглых волноводов с цилиндрическим резонатором. Ч. 1. Постановка и строгое решение задачи / И.П. Заикин, А.А. Ткаченко // Радіоелектронні і комп'ютерні системи. – 2007. - № 3 (22). – С. 5-13.

4. Миттра Р. Аналитические методы теории волноводов / Р. Миттра, С. Ли // – М.: Мир, 1974. – 327 с.

5. Заикин И.П. Дифракция электромагнитных волн на симметричном соединении двух круглых волноводов с цилиндрическим резонатором. Часть 2. Аналитические приближения / И.П. Заикин, А.А. Ткаченко // Радіоелектронні і комп'ютерні системи. – 2007. – № 4 (23). – С. 7-14.

Поступила в редакцию 29.05.2008

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф., проф. кафедры Н.Н. Горобец, Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Харьков.

РОЗСІЯННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ХВИЛЬ НА СИМЕТРИЧНОМУ З′ЄДНАННІ ДВОХ КРУГЛИХ ХВИЛЕВОДІВ І ЦИЛІНДРИЧНОГО РЕЗОНАТОРА, ЗАПОВНЕНИХ ДІЕЛЕКТРИКОМ

І.П. Заїкін, О.О. Ткаченко, О.В. Фатєєв

Розглянута задача розсіяння $\mathbf{H}_\varphi$- та $\mathbf{E}_\varphi$- поляризованих електромагнітних хвиль на симетричному з′єднанні двох круглих хвилеводів та циліндричного резонатора , заповнених діелектриком. Для строгого розв′язання внутрішньої крайової задачі запропонований метод часткових областей. Рішення одержано у вигляді нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь другого роду відносно коефіцієнтів перетворення на структурі. У довгохвильовому наближенні одержані прості явні формули для визначення цих коефіцієнтів. Наведені результати чисельних розрахунків у такому наближенні.

Ключові слова: розсіяння, поляризація, діелектричне заповнення, коефіцієнти перетворення.

DISPERSION OF ELECTROMAGNETIC WAVES ON SYMMETRICAL CONNECTION OF TWO ROUND WAVEGUIDES AND CYLINDRICAL RESONATOR FILLED BY DIELECTRIC

I.P. Zaikin, A.A. Tkachenko, A.V. Fateev

The problem of dispersion of the electromagnetic waves for $\mathbf{H}_\varphi$ and $\mathbf{E}_\varphi$ polarizations on symmetrical connection of two round waveguides and cylindrical resonator dielectric loading is considered. For rigorous solution of such internal boundary problem the method of partial domains is proposed. Solution is obtained in the appearance infinite system of linear algebraic equations of second kind relatively to transform coefficients on the structure. Simple obvious formulas for definition these coefficients in long-wavelength approximate is obtained. Results of numerical calculations for this approximation is showed.

Key words: dispersion, polarization, dielectric loading, coefficients transformation

Заикин Иван Павлович – канд. техн. наук, доцент, доцент кафедры приема, передачи и обработки сигналов Национального аэрокосмического университета им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина.

Ткаченко Алексей Александрович – магистр Национального аэрокосмического университета им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина.

Фатеев Александр Владимирович – студент Национального аэрокосмического университета им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина.