УДК 65.012

Д.Н. БОРОВСКОЙ

Национальный технический университет «ХПИ», Украина

ПРОИЗВОДСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ И ПРОБЛЕМА ВЫБОРА ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ АКТИВНОГО ЭЛЕМЕНТА

В статье рассматривается проблема выбора вида производственной функции в качестве экономико-математической модели активного элемента для решения задачи распределения ресурса внутри активной системы. Основные функциональные зависимости проанализированы с точки зрения областей их применения, а также удобства практического использования. Сделан обоснованный выбор в пользу двухфакторной производственной функии типа Кобба-Дугласа. В данном случае она является оптимальной моделью, обеспечивающей относительную простоту вычислений вместе с возможностью проведения дальнейших аналитических исследований полученных решений. Параметризация производственной функции основана на регрессионном анализе с критерием минимума суммы квадратов отклонений статистических значений от расчетных данных.

активная система, активный элемент, производственная функция, распределение ресурсов, игровое решение, математическая модель, параметризация

Введение

В последние годы во многих областях производства наряду с использованием современной вычислительной техники наблюдается активное внедрение автоматизированных систем управления и различного специализированного программного обеспечения. Растущие мощности электронно-вычислительных машин открывают новые возможности не только для применения математических методов, но и позволяют разрабатывать более сложные модели. С помощью развитых систем управления базами данных накапливаются значительные объемы информации, что открывает широкое поле для статистических исследований, поиска разнообразных закономерностей. Весь этот комплекс средств в состоянии существенно облегчить управленческий труд, а главное – помочь ощутимо повысить качество подготовки и принятия решений.

Успешное применение в экономике математического аппарата совместно с новейшими вычислительными средствами возможно лишь при условии глубокого и всестороннего исследования экономических явлений. В свою очередь, строгая формализация и количественная конкретизация решаемых задач – важнейший начальный этап этого изучения.

Рассматривая сферу производства, одним из ключевых этапов при экономико-математического анализе является стадия построения и исследования производственных функций. Результат процесса производства, в частности, объем созданных материальных благ, складывается под влиянием многочисленных факторов. Их качественный анализ в каждом конкретном случае позволяет установить, какие именно факторы влияют на результат производства. При этом количественная оценка характера и степени такого влияния выступает непосредственной целью построения самой функциональной зависимости.

В теории предложено множество форм и видов производственных функций, необходимость которых, в первую очередь, определяется разнообразием областей практического применения. Также, немалое влияние на выбор формы математической модели оказывает масштаб производственной системы. Вполне разумно предположить, что отрасль народного хозяйства будет описываться моделью, отличной от той, что подойдет для небольшого предприятия с высоким уровнем автоматизации и строго фиксированным технологическим процессом. Поэтому выбор вида производственной функции в каждом конкретном случае должен осуществляться на основе комплексного учета целей моделирования и особенностей реальной производственно-экономической системы.

Настоящая работа затрагивает одну из проблем, возникающих при поиске эффективного распределения ограниченного ресурса внутри объединения предприятий. По своей сути, это оптимизационная задача внутри двухуровневой иерархической системы, и в такой постановке она рассматривается теорией активных систем (ТАС). Следуя принятой терминологии, «центром» будет выступать главный управляющий орган объединения, «активными элементами» – предприятия-подразделения, а анализ функционирования всей производственной системы и решение поставленной задачи выполняется на основе теоретико-игрового подхода.

На сегодняшний день теория активных систем является достаточно развитой наукой, тем не менее, имеющей ряд перспективных направлений для дальнейших разработок. Перед ней стоят не только общетеоретические, но и прикладные вопросы. К их числу относится повышение адекватности формальных моделей за счет включения в их описание реальных экономических показателей, анализ и синтез механизмов управления в условиях возможного образования коалиций, изучение механизмов управления при различных концепциях равновесия [1].

Таким образом, учитывая актуальность применения научно обоснованных методов в ходе управления хозяйственной деятельностью, а также необходимость совершенствования и повышения адекватности самих методов, целью данной работы является исследование вопросов выбора вида производственной функции для описания активного элемента применительно к игровой постановке задачи распределения ресурса внутри объединения предприятий (см. [2]).

1. Производственные функции: анализ литературных источников

Как было отмечено ранее, в теории экономико-математического анализа разработано множество видов производственных функций, каждая из которых обладает своими особенностями и условиями применимости. Однако все это многообразие традиционно делится на несколько основных классов, покрывающих большинство типов производственных процессов.

В обобщенном виде производственная функция записывается следующим образом [3]:

$$Y = f\left(x_1, x_2, \ldots x_n\right), \tag{1}$$

где Y – объем выпуска продукции; x_i – факторы производства (или, другими словами, ресурсы).

Описание конфликта с помощью игры подразумевает наличие некоторой группы игроков. Количество переменных и параметров подобного игрового описания существенно возрастает в сравнении с описанием оптимизационной задачи, что значительно затрудняет получение и наглядность решений. Поэтому игровые модели целесообразно использовать в предельно редуцированном виде, вследствие чего будем рассматривать двухфакторные производственные функции.

С другой стороны, разработка устойчивых стратегических решений не требует от моделей высокой информативности. Вследствие этого, следуя [3 – 5], обозначим K, L – факторы производства, соответствующие объемам трудовых ресурсов (или кратко – труд) и производственных фондов (капитал).

Функция с постоянной эластичностью замещения или CES-функция (*constant elasticity of substitution*) в общем случае имеет следующий вид [4]:

$$Y = A\left(bK^{-\rho} + \left(1-b\right)L^{-\rho}\right)^{-\gamma/\rho}; \tag{2}$$

$$\sigma = \frac{1}{1+\rho}, \tag{3}$$

где $A > 0$, $b \in \left[0; 1\right]$, $\rho \in [-1; 0) \cup (0; +\infty)$, $\gamma > 0$; A – масштабный коэффициент; γ – показатель степени однородности уравнения; b – весовой коэффициент; ρ – эластичность замещения факторов; σ – эластичность замещения функции (как видно, она постоянна).

Фактически, функция CES является наиболее общей и применяется в случаях, когда отсутствует точная информация об уровне взаимозаменяемости производственных факторов и есть основания предполагать, что этот уровень существенно не изменяется при изменении объемов вовлекаемых ресурсов. Она может быть использована для моделирования систем любого уровня.

Накладывая дополнительные ограничения на величину эластичности замещения σ, можно получить некоторые частные виды функции. Так, если устремить ρ к нулю (или положить $\sigma = 1$), то в пределе получится *производственная функция типа Кобба-Дугласа* [6]:

$$Y = A \cdot K^{b\gamma} \cdot L^{(1-b)\gamma}, \tag{4}$$

где степени факторов производства являются показателями эластичности. При снятии ограничения на равенство их суммы единице, получим более общую запись:

$$Y = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{\beta}. \tag{5}$$

Функция Кобба-Дугласа используется для описания среднемасштабных объектов, характеризующихся устойчивым, стабильным функционированием (от промышленного объединения до отрасли). Именно в таком виде она была впервые получена и применена в 1928 году американскими учеными Г. Коббом и П. Дугласом на основании данных экономики США за 1899-1922 гг. [5].

Если показатель ρ в функции CES устремить к бесконечности, то в пределе получим *производственную функцию с фиксированными пропорциями факторов* (*функция Леонтьева*) [7]:

$$Y = A(K, L)^{\gamma}, \tag{6}$$

которая чаще встречается в такой форме записи:

$$Y = A \min\left(\frac{K}{K_0}, \frac{L}{L_0}\right)^{\gamma}. \tag{7}$$

ПФ Леонтьева предназначена для моделирования строго детерминированных технологий, не допускающих отклонения от технологических норм использования ресурсов на единицу продукции, и обычно используется для описания мелкомасштабных или полностью автоматизированных производственных объектов [7].

Применив условие равенства показателя $\rho = -1$ для функции CES, получим функцию с линейной эластичностью замены факторов, или LES (linear elasticity of substitution) [4]:

$$Y = A\left(bK + (1-b)L\right)^{\gamma}, \tag{8}$$

которую при равенстве $\gamma = 1$ часто называют просто линейной производственной функцией:

$$Y = \alpha K + \beta L, \tag{9}$$

где, α и β – весовые коэффициенты факторов производства.

Функция LES рекомендуется для описания производственных процессов, у которых возможность замещения вовлекаемых факторов существенно зависит от их пропорций. Для моделирования крупномасштабных систем, таких как отрасль народного хозяйства в целом, в которых выпуск продукции является результатом одновременного функционирования множества различных технологий, хорошо подходит линейная функция.

При необходимости описать производственные процессы, в которых чрезмерный рост любого из факторов оказывает отрицательное влияние на объем выпуска, можно применить *производственную функцию Аллена* [8]:

$$Y = A \cdot K \cdot L - \alpha K^2 - \beta L^2. \tag{10}$$

Она обычно подходит для описания мелкомасштабных производственных систем с ограниченными возможностями переработки ресурсов.

В случае, когда предположение об однородности функциональной зависимости представляется неоправданным, рекомендуется применять *функцию Солоу* [8, 9]:

$$Y = A\left(b_1 K^{\alpha} + b_2 L^{\beta}\right)^{\gamma}. \tag{11}$$

В целом, она может использоваться в большинстве ситуаций, что и производственная функция CES, и моделировать системы любого масштаба, однако предпосылки, лежащие в ее основе, слабее предпосылок CES.

Приведенное выше описание функциональных зависимостей представляет обзор основных, наиболее часто упоминаемых в научной литературе моделей. Многие из них с успехом применялись на практике для решения различных задач не только на макро-, но и на микроуровне. Так, например, работы западных авторов М. Брауна, И. Хедди, Дж. Диллона, Г. Тинтера и других посвящены анализу экономики на основе производственной функции Кобба-Дугласа [3, 10]. Их труды затрагивают задачи как уровня отраслей промышленности, так и уровня предприятий и объединений. В работах советских исследователей Б.Е. Грабовецкого, А.И. Гладышевского, Р.Л. Раяцкаса, О.А. Бальсиса, А.А. Френкеля [3, 4] больше внимания уделяется производственной функции CES и некоторым ее производным. Рассмотрения затрагивают и промышленность, и сельское хозяйство, в некоторых случаях переходят даже к трехфакторным и более многофакторным моделям.

Несмотря на значительное количество работ и достижений в области разработки аппарата производственных функций, наука порой встречает и ряд серьезной критики в свой адрес, ставящей под сомнение целесообразность их применения. Подобное всякий раз опровергалось и опровергается, сводя разногласия к выяснению вопросов адаптации теории и практики, одним из которых является проблема выбора математической модели для исследуемого экономического объекта. Следует понимать, что универсальной модели нет и, вероятно, быть не может, а выбор той или иной функциональной зависимости складывается сугубо под влиянием факторов, обусловленных целями и особенностями каждой конкретной задачи.

2. Проблема выбора экономико-математической модели активного элемента

Одним из направлений в ТАС при исследовании поведения организационно-экономической системы для описания активных элементов принято использовать функцию с квадратичной зависимостью. Причем, с целью упрощения математического анализа в качестве основной характеристики предприятия используется так называемый «коэффициент эффективности», позволяя, тем самым, абстрагироваться от многообразия факторов производства. Будучи удобной для аналитических исследований, такая модель минимально информативна, что сужает область ее адекватного применения до очень узких пределов изменения переменных. Последнее обстоятельство вынуждает пойти на выбор менее удобной, но более подходящей модели.

Рассмотрение особенностей основных функциональных зависимостей с точки зрения возможности и удобства их использования в двухуровневой модели активной системы позволяет сделать выбор вида производственной функции в качестве модели активного элемента. Так, решение задачи распределения ресурсов с применением функций с постоянной (CES) или линейной эластичностью замены факторов (LES), будет приводить к сложным системам степенных уравнений, не имеющих аналитического решения, что означает невозможность полного теоретического анализа и появление дополнительных вычислительных сложностей при практическом использовании. Кроме того, задача параметризации таких функций сама по себе является весьма трудоемким и не простым процессом.

Производственные функции Алена и Леонтьева выглядят в математическом плане проще и привлекательнее, однако, имеют весьма ограниченные, «полярные» области применения. Их рекомендуется использовать для описания мелко- и крупномасштабных систем соответственно. Еще более удобную и простую зависимость имеет линейная производственная функция, но она же является и самой узкопрофильной – только для крупномасштабных, стабильных производств уровня отрасли, с широким спектром технологий.

Своеобразным компромиссом между сложностью математической зависимости и областью применимости выступает производственная функция типа Кобба-Дугласа. Ее безусловными преимуществами являются относительная простота функциональной зависимости при достаточной практической универсальности и адекватности. Она строится на реальных экономических показателях и может быть легко параметризирована. Многочисленные исследования обеспечили ей популярность и широкое применение на практике, о чем свидетельствуют работы многих зарубежных и отечественных авторов.

Вместе с тем, функция Кобба-Дугласа обладает известной ограниченностью, как, например, весь прирост продукта приписывается количественному росту факторов, допускается лишь нейтральный технологический прогресс, предполагается единичная эластичность замещения. Но все это с успехом удается преодолеть, используя различные модификации ее классической формы. Учет «эффекта масштаба» производства достигается снятием ограничения на равенство единице эластичности замещения, а введение в формулу дополнительного экспоненциального коэффициента позволяет отразить автономный научно-технический прогресс.

Изучая возможность применения функции Кобба-Дугласа в качестве математической модели активного элемента при решении игровой задачи, следует также учитывать и особенности самой задачи. Обычно, она решается один раз в начале определенного, строго ограниченного периода времени, – периода планирования, – и носит в большей степени стратегический характер. Предполагается, что за этот отрезок времени предприятие кардинально не изменит технологии производства, а, значит, параметры производственной функции будут находиться в пределах допустимой погрешности. В силу социальных законов и «разумного» экономического поведения колебания значений факторов производства также имеют свои границы. То есть, например, численность рабочих или объемы основных производственных фондов за короткий период времени не могут существенно измениться. Если же это все-таки происходит, структурные изменения, технологический или научно-технический прогресс существенно воздействует на характеристики предприятия, то следует пересмотреть установленные ранее планы, скорректировав параметры модели. Используя такой подход, удается избежать усложнения математической зависимости, не уменьшив при этом ее адекватность.

Таким образом, в качестве экономико-математической модели активного элемента при игровом анализе задачи распределения ресурса внутри активной системы, использование производственной функции типа Кобба-Дугласа в общем виде, без ограничения на показатель эластичности и без учета автономного научно-технического прогресса, является оптимальным и оправданным выбором.

3. Параметризация производственной функции типа Кобба-Дугласа

Процесс вычисления численных значений параметров производственной функции (A, α, β) называется параметризацией и выполняется на базе статистических данных. Существует ряд методов расчета параметров, но практически в большинстве случаев применяется регрессионный анализ. Его суть заключается в том, чтобы подобрать такие значения параметров уравнения, при которых достигается минимум суммы квадратов отклонений фактических (статистических) значений зависимой переменной от ее расчетной величины:

$$\sum\left(Y_i^{ФАКТ} - Y_i^{РАСЧЕТ}\right)^2 \to \min\,, \qquad (12)$$

где $Y_i^{ФАКТ}$ – фактическое (статистическое) значение объема выпуска за i-й период; $Y_i^{РАСЧЕТ}$ – расчетное значение объема выпуска, полученное по формуле

$$Y_i^{РАСЧЕТ} = A \cdot \left(K_i^{ФАКТ}\right)^{\alpha} \cdot \left(L_i^{ФАКТ}\right)^{\beta}, \qquad (13)$$

$K_i^{ФАКТ}$ – фактическое значение объема производственных фондов за i-й период; $L_i^{ФАКТ}$ – фактическое значение объема трудовых затрат за i-й период.

Решая нормальные уравнение относительно неизвестных A, α, β, будет получено решение поставленной задачи параметризации производственной функции типа Кобба-Дугласа. Точность ее решения зависит от количества фактических значений, участвующих в выборке: чем больше выборка, тем точнее можно определить параметры. Достоверность результатов и их устойчивость определяется методами эконометрики.

Завершающим этапом процесса параметризации является верификация путем обратной подстановки рассчитанных параметров и фактических значений факторов производства в исходное уравнение. Результирующий объем производимой продукции должен совпадать с соответствующим ему фактическим значением с заданной точностью.

Как отмечалось выше, при выборе временного диапазона для статистических данных следует учитывать вероятность изменения технологических процессов производства. Необходимо стремиться решать задачу параметризации в рамках каждого отдельного периода, когда технология производства является относительно устоявшейся, без резких изменений. В этом случае основные условия применимости функции Кобба-Дугласа не будут нарушены, и результат решения конечной задачи распределения ресурсов будет адекватен действительности.

Для выделения периодов с неизменной технологией существуют специальные методы кластеризации и факторного анализа – разбиения всего множества исходных значений на подмножества с однотипными характеристиками. Фактически, их применение составляет начальный этап решения задачи параметризации, – этап подготовки данных, – после которого идет аппроксимация (подбор параметров), статистическая проверка и верификация. Его отсутствие с большой вероятностью при последующей статистической проверке приведет к низкой достоверности и неустойчивости искомого решения.

Заключение

В результате проведенного исследования принято обоснованное решение об использовании производственной функции типа Кобба-Дугласа для описания активного элемента в рамках решения задачи распределения ресурсов внутри активной системы. Благодаря этому, математическая модель рассматриваемой экономической системы в целом приобрела более адекватный, но и более сложный, по сравнению с традиционным в ТАС, вид.

К преимуществам данного решения следует отнести особенность самой функции Кобба-Дугласа. Основываясь на реальных экономических показателях, она обеспечивает удобство практического применения теоретических расчетов. Вместе с тем, для получения приемлемого конечного решения процесс параметризации функциональной зависимости требует тщательного анализа и подготовки исходных статистических данных.

Литература

1. Бурков В.Н., Новиков Д.А. Теория активных систем: состояние и перспективы. – М.: Синтег, 1999. – 128 с.

2. Боровской Д.Н. Решение задачи распределения ресурса в активной системе из двух предприятий с применением производственной функции типа Кобба-Дугласа // Вестник НТУ «ХПИ». – Х.: НТУ «ХПИ», 2005. – № 59. – С. 48-52.

3. Терехов Л.Л. Производственные функции. – М.: Статистика, 1974. – 128 с.

4. Плакунов М.К., Раяцкас Р.Л. Производственные функции в экономическом анализе. – Вильнюс: Минтис, 1984. – 308 с.

5. Cobb C.W., Douglas P.H. Theory of production // American Economic Review, Supplement, 1928, March. – P. 139-165.

6. Баркалов Н.Б. Производственные функции в моделях экономического роста. – М.: МГУ, 1981. – 128 с.

7. Гранберг А.Г. Математические модели социалистической экономики. – М.: Экономика, 1988. – 256 с.

8. Клейнер Г.Б. Производственные функции: теория, методы, применение. – М.: Финансы и статистика, 1986. – 239 с.

9. Клейнер Г.Б., Пионтковский Д.И. О характеризации производственных функций Сол // Экономика и математические методы. – 1999. – № 2. – С. 38-41.

10. Griliches Z., Mairesse J. Production functions: the search for identification // National Bureau of Economic Research, Working Paper No.5067, March 1995.

Поступила в редакцию 28.01.2008

Рецензент: канд. техн. наук, проф. В.И. Пустынников, Харьковский государственный технический университет строительства и архитектуры, Харьков.