УДК 621.325.5

В.А. РОМАНКЕВИЧ, А.А. КОНОНОВА

Национальный Технический Университет Украины «Киевский Политехнический Институт», Украина

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ *GL*-МОДЕЛЕЙ ПОВЕДЕНИЯ ОТКАЗОУСТОЙЧИВЫХ МНОГОПРОЦЕССОРНЫХ СИСТЕМ В ПОТОКЕ ОТКАЗОВ

В статье рассматривается задача модернизации GL-моделей, адекватно отражающих реакцию 2-отказоустойчивой многопроцессорной системы на появление отказов различной кратности. Модернизация осуществляется путем изменения одной из реберных функций модели. Анализируются и оцениваются возможности такого подхода.

отказоустойчивые многопроцессорные системы, графо-логические модели, булевы функции, надёжность

Введение

Управление сложными объектами в современном мире очень часто осуществляется с применением сложных многопроцессорных систем при высоких требованиях к их надежности [1]. Потеря работоспособности таких систем подчас может привести к катастрофическим последствиям экономического или социального характера. Поэтому архитектура подобных многопроцессорных систем изначально предполагается реконфигурируемой и отказоустойчивой. Высокая стоимость подобных систем управления привела к тому, что большое значение приобрело моделирование работы отказоустойчивых многопроцессорных систем (ОМС), позволяющее на этапе проектирования дать оценку надежности системы. Однако нередко решение этой задачи требует колоссальных вычислительных затрат и иногда не может быть выполнено с необходимой точностью за заданный промежуток времени.

Среди множества моделей ОМС особое место занимают графо-логические модели [2, 3], отражающие поведение ОМС в потоке отказов, которые используют преимущества теории графов и аппарата булевых функций. Оптимизация построения графо-логической модели заметно сокращает время, необходимое для выполнения статистических экспериментов с моделью, что позволяет осуществить расчет надежности ОМС с требуемой точностью доступными вычислительными средствами.

Основные определения. Графо-логическая модель (далее *GL*-модель) ОМС, состоящей из n процессоров, представляет собой неориентированный граф G, каждому ребру которого соответствует булева функция. Аргументами рёберных функций являются индикаторные переменные x_i ($i = 1, \ldots, n$), равные 1 (i-й элемент системы работоспособен) или 0 (i-й элемент системы вышел из строя). Ребро удаляется из графа *GL*-модели, если соответствующая ему рёберная функция принимает значение 0. Связность графа моделирует работоспособность ОМС.

ОМС, состоящую из n элементов и сохраняющую работоспособность в случае отказа не более, чем m её любых модулей ($0 \le m < n$), будем обозначать $K(m, n)$ и назовём базовой ОМС.

В дальнейшем будем рассматривать *GL*-модель, представленную циклическим неориентированным графом G с рёберными функциями вида (см. [3]):

$$h_i = x_i \vee T_i ,$$

где n – количество вершин графа G;

$$i = 1, \ldots, n;$$

$$T_i = \prod_{j=1,]\frac{n-1}{2}[} x_{b(i+j)\bmod n},$$

$]\frac{n-1}{2}[$ – целая часть дроби $\frac{n-1}{2}$.

В [3] показано, что граф G в этом случае теряет связность, если и только если не менее трёх переменных из множества $\{x_i, \dots, x_n\}$ принимают нулевые значения. Таким образом, описанная GL-модель отображает реакцию двухустойчивой базовой ОМС на появление отказов.

Пример 1: GL-модель системы $K(2,7)$ – циклический граф, ребрам которого соответствуют булевы функции:

$h_1 = x_1 \vee x_2 x_3 x_4$; $h_5 = x_5 \vee x_6 x_7 x_1$;

$h_2 = x_2 \vee x_3 x_4 x_5$; $h_6 = x_6 \vee x_7 x_1 x_2$;

$h_3 = x_3 \vee x_4 x_5 x_6$; $h_7 = x_7 \vee x_1 x_2 x_3$.

$h_4 = x_4 \vee x_5 x_6 x_7$;

Важным достоинством таких GL-моделей является простота формирования рёберных функций и определения связности графа G.

Базовым f-вектором будем называть циклическую последовательность b_1, b_2, b_3,….., b_n номеров элементов системы, полностью определяющую модель и первым элементом которой является 1. В приведенной модели $K(2,7)$ базовый f-вектор: (1,2,3,4,5,6,7,8). Для простоты будем считать, что f-вектор – это цикл, где после его последнего элемента следует первый.

Вектором состояния системы назовём упорядоченную последовательность $x_1, x_2, \dots, x_n$. Два нулевых элемента x_i и x_j вектора состояния будем называть соседними, если между соответствующими им элементами f-вектора b_t и b_p находятся элементы, которым соответствуют единичные элементы вектора состояния. Расстоянием $l_{x_i x_j}$ по базовому f-вектору между соседними элементами x_i и x_j вектора состояния назовём величину E+1, где E – количество находящихся между элементами b_t и b_p элементов f-вектора.

Как было сказано, достоинством предложенной модели базовой двухустойчивой многопроцессорной системы является её простота, что позволяет увеличить число экспериментов с моделью и тем самым повысить точность расчета надежности ОМС. Однако реальные системы не всегда бывают базовыми. Нередко приходится иметь дело с небазовыми системами, т.е. такими, которые становятся неработоспособными при возникновении некоторых p отказов, в то же время оставаясь работоспособными при других q отказах ($q > p$).

В [4] представлены возможные подходы к трансформации предложенной GL-модели базовой ОМС в модель небазовых ОМС:

– изменение графа путем введения в его структуру дополнительных ребер;

– изменение реберных функций.

Первый подход позволяет решить вопрос о построении GL-модели небазовой ОМС, однако нередко значительно усложняет структуру графа, что приводит к увеличению времени проведения одного эксперимента с моделью.

Второй подход к трансформации GL-модели мало изучен, однако является привлекательным, поскольку позволяет сохранить простую циклическую структуру графа и, следовательно, не усложнять процедуру определения связности графа. В [4] приводится принципиальное решение этой задачи, однако оно может привести к существенному усложнению реберных функций.

Тем не менее, модернизация реберных функций кажется авторам перспективным направлением, поскольку, как будет показано ниже, возможны другие решения, в результате которых реберные функции упрощаются, что позволяет сократить время проведения статистического эксперимента с GL-моделью.

В данной работе рассматриваются вопросы построения GL-модели ОМС, которые остаются работоспособными при появлении всех двукратных отказов и некоторых комбинаций из трех отказов, путем изменения одной реберной функции GL-модели базовой ОМС $K(2,n)$, предложенной в [3].

1. Удаление одной переменной

Назовем блокированием некоторого вектора состояния базовой ОМС $K(2,n)$, содержащего более двух нулевых элементов, процесс изменения GL-модели по [3] системы таким образом, что граф G остается связным при появлении этого вектора состояния и, следовательно, отображает «небазовое» поведение системы.

Дадим второе обозначение аргументам реберных функций, однозначно определяющее реберную функцию, которой принадлежит аргумент: обозначим через x_i^t аргумент функции f_i такой, что

$$\begin{cases} x_i^t \in T_i, \\ l_{x_i x_i^t} = t. \end{cases}$$

Необходимо заметить, что одной и той же индикаторной переменной x_i могут соответствовать различные обозначения. В примере 1 GL-модели системы $K(2,7)$ индикаторной переменной x_3 соответствуют обозначения x_1^2, x_2^1 и x_7^3.

Рассмотрим изменение значений функции f_i при удалении аргумента x_i^t. Такая модернизация приводит к тому, что при появлении в ОМС некоторых трехкратных отказов, функция f_i, которая до изменения принимала значение 0, теперь принимает значение 1 и ребро i не удаляется из графа. Таким образом, удаление аргумента x_i^t из реберной функции f_i приводит к блокированию некоторых векторов состояния, при появлении которых из GL-модели базовой ОМС $K(2,n)$ удалялось 2 ребра, поскольку после изменения функции f_i из модели удаляется 1 ребро и граф G остается связным. К таким векторам состояния относятся векторы, нулевым элементам которых соответствуют аргументы x_i, x_i^t и x_j $(x_j \notin T_i)$.

Утверждение 1: количество векторов состояния, блокируемых при удалении из GL-модели базовой ОМС $K(2,n)$ элемента x_i^t, равно

$$Q = \begin{cases} \left]\dfrac{n-1}{2}\right[- t, \, \text{для нечетных } n; \\ \left]\dfrac{n-1}{2}\right[- t + 2, \, \text{для четных } n. \end{cases}$$

Доказательство: из сказанного выше следует, что Q равняется мощности множества векторов состояния, при появлении которых из GL-модели базовой ОМС $K(2,n)$ удаляются 2 ребра и которые содержат нулевые элементы на позициях x_i и x_i^t.

В [5] показано, что при появлении вектора состояния с тремя нулями 2 ребра удаляются из GL-модели тогда, когда расстояние между двумя нулевыми элементами которых превышает $\left]\frac{n-1}{2}\right[$.

Из определения x_i^t и правил формирования реберных функций GL-модели базовых ОМС $K(2,n)$ по [1] следует, что

$$l_{x_i x_i^t} \le \left]\frac{n-1}{2}\right[.$$

Поэтому искомое множество составляют векторы состояния, в которых

$$\left[\begin{array}{ll} l_{x_i^t x_j} > \left]\dfrac{n-1}{2}\right[; & (1) \\ l_{x_i x_i^t} > \left]\dfrac{n-1}{2}\right[, & (2) \end{array}\right.$$

где аргументы x_i, x_i^t и x_j соответствуют нулевым элементам вектора состояния.

Очевидно, что количество векторов состояния, для которых справедливо условие (1), равно

$$Q' = \begin{cases} \left]\dfrac{n-1}{2}\right[- t, \, \text{для нечетных } n; \\ \left]\dfrac{n-1}{2}\right[- t + 1, \, \text{для четных } n. \end{cases}$$

Количество векторов состояния, для которых справедливо условие (2), равно

$$Q'' = \begin{cases} 0, \, \text{для нечетных } n; \\ 1, \, \text{для четных } n. \end{cases}$$

Поскольку одновременное выполнение условий (1) и (2) в одном векторе состояния невозможно, то

$$Q = Q' + Q'' = \begin{cases} \left]\dfrac{n-1}{2}\right[- t, \text{ для нечетных } n; \\ \left]\dfrac{n-1}{2}\right[- t + 2, \text{ для четных } n. \end{cases}$$

Доказательство завершено.

Как видно из утверждения 1, удаление элементов из T_i не всегда приводит к изменению функционирования модели.

Следствие 1: удаление элемента $x_i^{\frac{n-1}{2}}$ в *GL*-моделях рассматриваемого типа для ОМС с нечетным количеством модулей упрощает модель, не влияя на ее функционирование, поскольку количество векторов состояния, блокируемых в результате такого изменения, равно 0.

Более того, для систем с нечетным количеством модулей возможно упрощение *GL*-модели путем удаления элементов $x_i^{\frac{n-1}{2}}$ из нескольких реберных функций.

Утверждение 2: максимальное количество реберных функций *GL*-модели базовой ОМС $K(2,n)$ ($n = 2h + 1$), удаление из которых элемента $x_i^{\frac{n-1}{2}}$ не влияет на корректность работы модели, равно $\frac{n-1}{2}$.

Доказательство: единственным условием того, что удаление из реберных функций f_{i1} и f_{i2} элементов $x_{i_1}^{\frac{n-1}{2}}$ и $x_{i_2}^{\frac{n-1}{2}}$ не приведет к искажению работы *GL*-модели базовой ОМС $K(2,n)$ ($n = 2h + 1$), является условие

$$l_{x_{i_1} x_{i_2}} \neq \left]\frac{n-1}{2}\right[, \qquad (3)$$

поскольку в противном случае аргументы x_{i_2} и $x_{i_1}^{\frac{n-1}{2}}$ совпадают, и при появлении в системе отказов модулей, соответствующих аргументам x_{i_1}, x_{i_2} и $x_{i_2}^{\frac{n-1}{2}}$, из графа G удаляется 1 ребро (в то время, как при появлении любых трех отказов должны удалятся 2 ребра), что приводит к сохранению его связности и, следовательно, нарушению корректной работы модели.

Несложно показать, что максимальное количество реберных функций f_{ij}, для которых попарно выполняется условие (3), равно $\frac{n-1}{2}$.

Доказательство завершено.

Необходимо заметить, что подобное упрощение для *GL*-моделей базовых ОМС $K(2,n)$ с четным количеством модулей невозможно.

Следствие 2: удаление любого аргумента в *GL*-моделях рассматриваемого типа для ОМС с четным количеством модулей всегда приводит к блокированию, по крайней мере, двух векторов состояния.

Действительно, $Q_{\min} = Q(t_{\max})$, и поскольку $t_{\max} = \left]\frac{n-1}{2}\right[$, то $Q_{\min} = 2$ для систем с нечетным количеством модулей.

2. Удаление нескольких переменных

Пусть V_{it} – множество векторов состояния, блокируемых при удалении из *GL*-модели базовой ОМС $K(2,n)$ элемента x_i^t. Легко показать, что $V_{it_1} \cap V_{it_2} = \varnothing$, поскольку векторы из различных множеств отличаются, как минимум, одним нулевым элементом, соответствующим аргументам x_i^{tp1} и x_i^{tp2}.

Утверждение 3: количество векторов состояния, блокируемых при удалении из *GL*-модели базовой ОМС $K(2,n)$ g элементов x_i^{tp} ($p = 1, \ldots, g$, $g < \left]\frac{n-1}{2}\right[$), равно

$$Q_g = \sum_{p=1}^{g} |V_{it_p}| + C_g^2 .$$

Доказательство: утверждение становится очевидным, если учесть, что множество векторов состояния, блокируемых при удалении нескольких элементов $x_i^{t_p}$, включает в себя векторы состояния, блокируемые при отдельном удалении каждого из элементов $x_i^{t_p}$ (т.е. множество V_{it_p}), а также векторы состояния, блокируемые в результате одновременного удаления g элементов из одного терма (к таким векторам относятся те, у которых один нулевой элемент соответствует элементу x_i, а два других нулевых элемента составляют все возможные попарные комбинации из множества элементов $x_i^{t_p}$, где $p = 1, \ldots, g$, т.е. количество таких векторов состояния равно C_g^2).

Доказательство завершено.

Величина Q_g не является постоянной для одного и того же количества g удаляемых элементов и изменяется в зависимости от величин t ($t = 1, \ldots,]\frac{n-1}{2}[$) удаляемых элементов $x_i^{t_p}$.

Утверждение 4: количество Q_g векторов состояния, которые блокируются в результате удаления g элементов из терма T_i ($g <]\frac{n-1}{2}[$), варьируется в следующих пределах:

$$Q_g = \begin{cases} \left[g(g-1), g\cdot(]\dfrac{n-1}{2}[-1) \right], \textit{для нечетных } n; \\ \left[g(g+1), g\cdot(]\dfrac{n-1}{2}[+1) \right], \textit{для четных } n. \end{cases}$$

Доказательство: из утверждения 3 следует, что Q_g минимально при удалении g элементов $x_i^{t_p}$ ($p = 1, \ldots, g$), для которых величина $|V_{ip_t}|$ минимальна, т.е. элементов $x_i^{t_p}$, где $t_p =]\frac{n-1}{2}[- g + 1, \ldots,]\frac{n-1}{2}[$:

$$\left(\sum_{p=1}^{g} |V_{it_p}| \right)_{\min} = \sum_{t=]\frac{n-1}{2}[-g+1}^{]\frac{n-1}{2}[} |Vt| = \begin{cases} A_{g-1}, \textit{для нечетных } n; \\ A_{g+1} - 1, \textit{для четных } n, \end{cases}$$

где A_d – сумма арифметической прогрессии d членов, первый из которых равен 1, а разность составляет 1.

Учитывая, что $A_d = C_{d+1}^2$, получаем

$$Q_{g\,\min} = \begin{cases} C_g^2 + A_{g-1} \\ C_g^2 + A_{g+1} - 1 \end{cases} = \begin{cases} C_g^2 + C_g^2 \\ C_g^2 + C_{g+2}^2 - 1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} g\cdot(g-1), \textit{для нечетных } n; \\ g\cdot(g+1), \textit{для четных } n. \end{cases}$$

Аналогично, Q_g максимально при удалении g элементов $x_i^{t_p}$, для которых величина $|V_{ip_t}|$ максимальна, т.е. элементов $x_i^{t_p}$, где $t_p = 1, \ldots, g$:

$$\left(\sum_{t=1}^{g} |V_{ip_t}| \right)_{\max} = \sum_{p=1}^{g} |V_{ip}| =$$

$$= \begin{cases} A_{]\frac{n-1}{2}[-1} - A_{]\frac{n-1}{2}[-1-g}, \textit{для нечетных } n; \\ A_{]\frac{n-1}{2}[+1} - A_{]\frac{n-1}{2}[+1-g}, \textit{для четных } n; \end{cases}$$

$$Q_{g\,\max} = \begin{cases} C_g^2 + A_{]\frac{n-1}{2}[-1} - A_{]\frac{n-1}{2}[-1-g} \\ C_g^2 + A_{]\frac{n-1}{2}[+1} - A_{]\frac{n-1}{2}[+1-g} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} C_g^2 + C^2_{]\frac{n-1}{2}[} - C^2_{]\frac{n-1}{2}[-g}, \textit{для нечетных } n; \\ C_g^2 + C^2_{]\frac{n-1}{2}[+2} - C^2_{]\frac{n-1}{2}[+2-g}, \textit{для четных } n. \end{cases}$$

Учитывая, что $C_a^2 + C_b^2 - C_{b-a}^2 = a\cdot(b-1)$, получаем

$$Q_{g\,\max} = \begin{cases} g\cdot(]\dfrac{n-1}{2}[-1), \textit{для нечетных } n; \\ g\cdot(]\dfrac{n-1}{2}[+1), \textit{для четных } n. \end{cases}$$

Доказательство завершено.

Утверждение 4 может быть использовано при построении GL-модели небазовой ОМС на основе GL-модели базовой ОМС $K(2,n)$, поскольку позволяет определить количество элементов, которые понадобится удалить из реберной функции f_i, если известно количество векторов состояния, которые необходимо заблокировать.

Утверждение 5: из множества блокируемых в результате удаления из терма T_i g элементов векторов состояния, R_{t_p} векторов содержат нулевой элемент на позиции, соответствующей удаляемому элементу $x_i^{t_p}$, где

$$R_{t_p} = \begin{cases}]\frac{n-1}{2}[-t_p + g - 1, \textit{для нечетных } n; \\ ]\frac{n-1}{2}[-t_p + g + 1, \textit{для четных } n. \end{cases}$$

Доказательство: как отмечалось при доказательстве утверждения 3, нулевой элемент на позиции, соответствующей элементу $x_i^{t_p}$, встречается в следующих векторах состояния:

1) в векторах состояния, блокируемых при отдельном удалении элемента $x_i^{t_p}$ из терма T_i и которые составляют множеств V_{it_p};

2) в векторах состояния, блокируемых при одновременном удалении из терма T_i двух элементов, один из которых – элемент $x_i^{t_p}$. Количество таких векторов состояния равно (g – 1).

Таким образом

$$R_{t_p} = |V_{it_p}| + (g-1) = \begin{cases}]\frac{n-1}{2}[-t_p + g - 1, \textit{для нечетных } n; \\ ]\frac{n-1}{2}[-t_p + g + 1, \textit{для четных } n. \end{cases}$$

Доказательство завершено.

Примечательно, что количество блокируемых векторов состояния, содержащих нулевые элементы на позициях p', которым не соответствуют удаляемые элементы $x_i^{t_p}$, меньше, чем количество векторов состояния, содержащих нулевые элементы на позициях p'', соответствующих удаляемым элементам $x_i^{t_p}$. Это объясняется тем, что нулевые элементы на позиции p' встречаются не более, чем в одном векторе состояния каждого из множеств V_{it_p} и не принадлежат векторам состояния, блокируемым в результате одновременного удаления нескольких элементов $x_i^{t_p}$. Таким образом, максимальное количество появлений нулевого элемента на позиции p' равно

$$\begin{cases} g-1, \textit{для нечетных } n, \textit{если к числу удаляемых} \\ \qquad \textit{элементов принадлежит ээлемен } x_i^{]\frac{n-1}{2}[}; \\ g, \textit{во всех других случаях}. \end{cases}$$

Полученная оценка позволяет сделать следующий вывод.

Следствие 3: GL-модель небазовой ОМС на основе модели базовой ОМС $K(2,n)$, в которой необходимо заблокировать заданное множество векторов состояния, каждый из которых содержит нулевой элемент на позиции i, можно построить путем удаления из терма T_i элементов, соответствующих позициям векторов состояния этого множества, на которых наиболее часто встречаются нулевые элементы.

Множество векторов состояния, блокируемых при удалении из терма T_i одного или нескольких элементов, назовем полным для этого множества элементов (для сокращения в дальнейшем просто полным).

На основании утверждений 4, 5 и следствия 3 можно сформулировать следующий алгоритм.

Алгоритм построения GL-модели для блокирования полного множества V векторов состояния, содержащих 3 нулевых элемента, один из которых находится на позиции i.

1). Руководствуясь граничными значениям, указанными в утверждении 4, определить на основе мощности множества V количество g элементов, которые необходимо удалить из терма T_i.

2). Определить множество P', состоящее из g позиций, на которых в векторах состояния множества V наиболее часто встречаются нулевые элементы.

3). Для каждой из позиций $p'_j \in P'$ (j = 1, …, g) определить соответствующий элемент $x_i^{t_p}$ вектора состояния, для которого

$$l_{x_1 x_i^t} = p_j = \begin{cases}]\frac{n-1}{2}[-R_{p_j} + g - 1, \textit{для нечетных } n; \\ ]\frac{n-1}{2}[-R_{p_j} + g + 1, \textit{для четных } n, \end{cases}$$

где R_{p_j} – количество появлений нулевого элемента на позиции p_j'.

4). Определить множество P'', состоящее из оставшихся позиций, на которых встречаются нулевые элементы ($P' \cap P'' = \varnothing$).

5). Для каждой из позиций $p_t'' \in P''$ поставить в соответствие элемент вектора состояния x_i^{tp} такой, что

$$l_{x_1 x_i^t} = n-1, \dots, n -]\frac{n-1}{2}[+ \delta,$$

где $l_{x_1 x_i^t}$ выбирается тем больше, чем чаще встречается в векторах состояния нулевой элемент на позиции p_t'', а δ равно минимальному $l_{x_1 x_i^t}$, полученному в п. 3.

6). Построить *f*-вектор *GL*-модели, руководствуясь полученными в п.п. 3 и 5 алгоритма расстояниями $l_{x_1 x_i^t}$ по *f*-вектору между элементом x_i и остальными элементами.

7). На основе полученного *f*-вектора построить *GL*-модель базовой ОМС $K(2,n)$, из реберной функции f_i которой удалить элементы, полученные в п.3.

Покажем применение описанного алгоритма на примере.

Пример 2: пусть задана ОМС $K(2,11)$, которая остается работоспособной при появлении векторов состояния, содержащих нулевые элементы на позициях

(1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 2, 5), (1, 2, 8),
(1, 2, 9), (1, 2, 10), (1, 2, 11), (1, 3, 4),
(1, 3, 5), (1, 3, 9), (1, 3, 10), (1, 3, 11),
(1, 4, 5), (1, 4, 10), (1, 4, 11), (1, 5, 11).

Все векторы состояния содержат нулевой элемент на позиции 1, следовательно, в *GL*-модели необходимо удалить элементы из терма T_1:

1) определим количество g элементов, удаляемых из терма T_1. Количество векторов состояния равно 16, следовательно, $g = 4$ (из утверждения 4);

2) определим $g = 4$ позиции, на которых нулевые элементы встречаются наибольшее количество раз:

позиция 2 – 7 раз,
позиция 3 – 6 раз,
позиция 4 – 5 раз,
позиция 5 – 4 раза;

3) определим расстояние по *f*-вектору между элементом x_1 и элементами x_2, x_3, x_4, x_5:

$l_{x_1 x_2} = 5 - 7 + 4 - 1 = 1,$

$l_{x_1 x_3} = 5 - 6 + 4 - 1 = 2,$

$l_{x_1 x_4} = 5 - 5 + 4 - 1 = 3,$

$l_{x_1 x_5} = 5 - 4 + 4 - 1 = 4;$

4) оставшиеся позиции векторов состояния, на которых встречаются нулевые элементы:

позиция 8 – 1 раз,
позиция 9 – 2 раза,
позиция 10 – 3 раза,
позиция 11 – 4 раза;

5) расстояние по *f*-вектору между элементом x_1 и элементами x_8, x_9, x_{10}, x_{11}:

$l_{x_1 x_{11}} = n - 1 = 10,$

$l_{x_1 x_{10}} = n - 2 = 9,$

$l_{x_1 x_9} = n - 3 = 8,$

$l_{x_1 x_8} = n - 4 = 7;$

6) построим *f*-вектор:

$$f = (1, 2, 3, 4, 5, 7, 6, 8, 9, 10, 11)$$

(позиции 6 и 7 заполняем произвольным образом);

7) построим *GL*-модель базовой ОМС $K(2,11)$

$f_1 = x_1 \vee x_2 x_3 x_4 x_5 x_7$, $f_6 = x_1 \vee x_8 x_9 x_{10} x_{11} x_1$,
$f_2 = x_1 \vee x_3 x_4 x_5 x_7 x_6$, $f_8 = x_1 \vee x_9 x_{10} x_{11} x_1 x_2$,
$f_3 = x_1 \vee x_4 x_5 x_7 x_6 x_8$, $f_9 = x_1 \vee x_{10} x_{11} x_1 x_2 x_3$,
$f_4 = x_1 \vee x_5 x_7 x_6 x_8 x_9$, $f_{10} = x_1 \vee x_{11} x_1 x_2 x_3 x_4$,
$f_5 = x_1 \vee x_7 x_6 x_8 x_9 x_{10}$, $f_{11} = x_1 \vee x_1 x_2 x_3 x_4 x_5$;
$f_7 = x_1 \vee x_6 x_8 x_9 x_{10} x_{11}$,

8) удалим из реберной функции f_1 элементы x_2, x_3, x_4, x_5, найденные в п. 2:

$$f_1 = x_1 \vee x_7 .$$

Мы получили искомую *GL*-модель.

Приведенный алгоритм дает точное совпадение только в случае его применения к полному множеству векторов состояния. В случае применения алгоритма к неполному множеству векторов состояния V возможны ситуации, когда блокируются векторы состояния, не принадлежащие заданному множеству V. В таком случае необходимо дальнейшее изменение реберной функции f_i, в ходе которого для q заблокированных векторов состояния, не принадлежащих множеству V и содержащих нулевые элементы на позициях i, j_u, s_u) ($u = 1, \ldots, q$), терм T_i изменяется следующим образом:

$$T_i^{'} = T_i \cdot \prod_{t=1}^{q} (j_u \vee s_u) .$$

Очевидно, что $T_i^{'} = 0$ только в случае появления векторов состояния, не принадлежащих множеству V.

Приведем пример: пусть система, показанная в примере 2, теряет работоспособность при появлении векторов состояния, содержащих нулевые элементы на позициях

$$(1, 3, 9), (1, 4, 9), (1, 2, 5).$$

Другими словами, рассмотренное в примере 2 полное множество векторов состояния становится неполным. Изменив реберную функцию f_1 следующим образом

$$f_1 = x_1 \vee x_7 (x_3 \vee x_9) (x_4 \vee x_9) (x_2 \vee x_5),$$

мы получим GL-модель, адекватно отображающую работоспособность системы в новых условиях.

Заключение

В данной работе рассмотрены вопросы трансформации GL-модели базовой ОМС в GL-модель небазовой ОМС путем изменения реберных функций GL-модели базовой ОМС $K(2,n)$, предложенной в [3]. Такая модификация не только позволяет построить GL-модель, адекватно отображающую поведение ОМС в потоке отказов, но и упростить реберные функции, что приводит к сокращению времени проведения статистических экспериментов с моделью и, следовательно, повышению точности расчета надежности ОМС.

В частности показано, что путем изменения одной реберной функции возможно построение GL-модели для определенного вида небазовых ОМС. Интерес представляет дальнейшее изучение возможностей трансформации GL-моделей, лежащих на этом пути.

Литература

1. Харченко В.С. Многоверсионные системы, технологии и проекты. – Х.: НАКУ «ХАИ», 2002. – 528 с.

2. Романкевич А.М., Карачун Л.Ф., Романкевич В.А. Графо-логические модели для анализа сложных отказоустойчивых вычислительных систем // Электронное моделирование. – 2001. – Т. 23, № 1. – С. 102-111.

3. Романкевич О.М., Карачун Л.Ф., Романкевич В.О. До питання побудови моделі поведінки багатомодульних систем // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 1998. – № 1. – С. 38-40.

4. Романкевич А.М., Иванов В.В., Романкевич В.А. Анализ многоустойчивых многомодульных систем со сложным распределением отказов на основе циклических GL-моделей // Электронное моделирование. – 2004. – Т. 26, № 5. – С. 67-81.

5. Романкевич А.М., Романкевич В.А., Кононова А.А. Граничные характеристики графологической модели 2-отказоустойчивой многопроцессорной системы // Вісник НТУУ "КПІ". – 2004. – № 42. – С. 28-39.

Поступила в редакцию 18.01.2007

Рецензент: д-р техн. наук, проф. В.А. Краснобаев, Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства им. П. Василенко, Харьков.