УДК 62.50, 681.3

В.Ю. КОНДРАТЕНКО

Київський національний університет ім. Т.Г.Шевченка, Україна

МЕТОД ПІДВИЩЕННЯ ГАРАНТОЗДАТНОСТІ ОБЧИСЛЮВАЛЬНИХ ОПЕРАЦІЙ НЕЧІТКОЇ АРИФМЕТИКИ

Результати досліджень, що наведені в даній статті, пов'язані з підвищенням гарантоздатності обчислювальних операцій над нечіткими множинами з трикутною формою функцій належності. Особливу увагу приділено синтезу аналітичних моделей результуючих функцій належності, що дозволяють підвищити надійність програмно-апаратної реалізації відповідних цифрових пристроїв. Наведено також узагальнені аналітичні моделі для визначення параметрів α-перерізів результуючих нечітких множин.

обчислювальні операції, швидкодія, гарантоздатність, нечітка арифметика, аналітичні моделі

Дослідження гарантоздатності багатьох динамічних систем суттєво ускладнюється через відсутність формалізованих моделей, що описують поведінку систем такого класу. Останнім часом побудову інтелектуальних моделей об'єктів та систем, що складно формалізуються, здійснюють на основі застосування нейромережних підходів та методів теорії нечітких множин [1, 8, 9], яка знаходить все більш широке застосування для розв'язку задач прийняття рішень та управління в умовах невизначеності [2]. Крім того, нечіткі множини та нечітка логіка використовуються для задач оптимізації маршрутів та траєкторій, при розв'язанні яких виникає необхідність в здійсненні операцій нечіткої арифметики, зокрема операцій додавання, віднімання, множення та ділення з нечіткими множинами. Відомий підхід, що базується на використанні α-перерізів [11], не завжди забезпечує високу швидкодію обчислювальних операцій і часто призводить до ускладнень при розв'язанні задач управління в реальному часі. Тому, розробка аналітичних моделей, що дозволяють формалізувати операції нечіткої арифметики з метою підвищення їх швидкодії і точності є важливим напрямком досліджень, що пов'язаний з підвищенням гарантоздатності [10] інтелектуальних систем.

Розглянемо більш детально деякі теоретичні засади нечітких множин, враховуючи, що будь-яка нечітка множина $\underset{\sim}{A}$, що задана на універсальній множині E, є сукупністю пар [2, 8, 9]

$$\left(x, \mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\right),$$

де $x \in E$, $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \in [0,1]$ – функція належності відповідного елемента x до нечіткої множини $\underset{\sim}{A}$. Обчислювальні алгоритми для реалізації операцій нечіткої арифметики на основі застосування α-перерізів відповідних нечітких множин [8, 9, 11] мають високу обчислювальну складність, оскільки виконуються почергово для всіх α-рівнів ($\alpha_i \in [0,1]$, $i = 0,1,2,...,r$, $\alpha_0 = 0$, $\alpha_r = 1$) з кроком дискретності $\Delta\alpha$, величина якого, враховуючи, що $\alpha_{i+1} = \alpha_i + \Delta\alpha$, суттєво впливає на точність та швидкодію реалізації обчислювальних процедур [3]. При цьому α-перерізом нечіткої множини $\underset{\sim}{A} \in R$ є чітка (з точки зору умови $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \geq \alpha$) підмножина $A_\alpha \in R$, що містить елементи $x \in R$, ступінь належності яких до множини $\underset{\sim}{A}$ не менша значення α, тобто $A_\alpha = \left\{ x \middle| \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \geq \alpha \right\}, \alpha \in [0,1]$.

Підмножини A_α та B_α, що визначають відповідні α- перерізи нечітких множин $\underset{\sim}{A}$ та $\underset{\sim}{B}$, можна представити наступним чином:

$$A_\alpha = [a_1(\alpha), a_2(\alpha)]; \; B_\alpha = [b_1(\alpha), b_2(\alpha)],$$

де $\alpha \in [0,1]$, $\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B} \in R^{+}$.

Алгоритми для реалізації вищезгаданих операцій нечіткої арифметики [2, 8, 11] мають у цьому випадку такий вигляд, зокрема, для операцій:

– додавання

$$C_\alpha = A_\alpha(+)B_\alpha = [c_1(\alpha), c_2(\alpha)];$$

– віднімання

$$C_\alpha = A_\alpha(-)B_\alpha = [c_1(\alpha), c_2(\alpha)];$$

– множення

$$C_\alpha = A_\alpha(\cdot)B_\alpha = [c_1(\alpha), c_2(\alpha)];$$

– ділення

$$C_\alpha = A_\alpha(:)B_\alpha = [c_1(\alpha), c_2(\alpha)].$$

Складність, точність та швидкодія обчислень при отриманні результатів реалізації операцій нечіткої арифметики на основі вищезазначених α-перерізів A_α та B_α в більшості випадків залежать від наявності відповідних аналітичних моделей та від форми функцій належності $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$ і $\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$ нечітких множин $\underset{\sim}{A}$ та $\underset{\sim}{B}$.

Метою даної статті є синтез аналітичних моделей для результатів операцій нечіткої арифметики при використанні трикутних функцій належності, які є найбільш поширеними при застосуванні теорії нечітких множин для проектування систем управління, систем підтримки прийняття рішень та інтелектуальних експертних систем [1, 3, 8]. Нечіткі множини $\underset{\sim}{A}$ (рис. 1) та $\underset{\sim}{B}$ з трикутною формою функцій належності $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$ та $\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$ можна представити у вигляді:

$$\underset{\sim}{A} = (a_1, a_0, a_2); \quad \underset{\sim}{B} = (b_1, b_0, b_2),$$

де $\mu_{\underset{\sim}{A}}(a_0) = \mu_{\underset{\sim}{B}}(b_0) = 1$;

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(a_1) = \mu_{\underset{\sim}{B}}(b_1) = \mu_{\underset{\sim}{A}}(a_2) = \mu_{\underset{\sim}{B}}(b_2) = 0.$$

Нижче наведено аналітичну модель $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$ функції належності трикутної форми для нечіткої множини $\underset{\sim}{A}$:

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = \begin{cases} 0, \forall (x \le a_1) \cup (x \ge a_2); \\ \dfrac{x - a_1}{a_0 - a_1}, \forall (a_1 < x \le a_0); \\ \dfrac{a_2 - x}{a_2 - a_0}, \forall (a_0 < x < a_2) \end{cases}$$

та аналітичну модель нечіткої множини $\underset{\sim}{B}$ з трикутною формою функції належності $\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$:

$$\mu_{\underset{\sim}{B}}(x) = \begin{cases} 0, \forall (x \le b_1) \cup (x \ge b_2); \\ \dfrac{x - b_1}{b_0 - b_1}, \forall (b_1 < x \le b_0); \\ \dfrac{b_2 - x}{b_2 - b_0}, \forall (b_0 < x < b_2). \end{cases}.$$

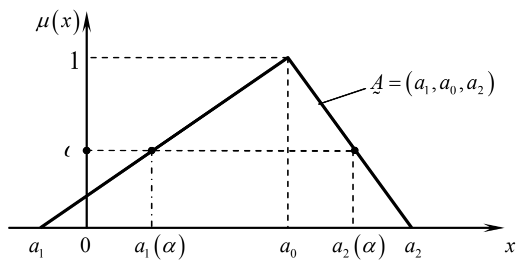

Рис. 1. Нечітке число $\underset{\sim}{A}$ з трикутною формою функції належності

В подальшому синтез аналітичних моделей результуючих функцій належності $\mu_{\underset{\sim}{C}}(x)$ для вищезазначених операцій нечіткої арифметики здійснено на основі узагальнених моделей відповідних α-перерізів нечітких множин $\underset{\sim}{A} = (a_1, a_0, a_2)$ та $\underset{\sim}{B} = (b_1, b_0, b_2)$:

$$A_\alpha = [a_1(\alpha), a_2(\alpha)] = [a_1 + \alpha(a_0 - a_1), a_2 - \alpha(a_2 - a_0)];$$

$$B_\alpha = [b_1(\alpha), b_2(\alpha)] = [b_1 + \alpha(b_0 - b_1), b_2 - \alpha(b_2 - b_0)].$$

Аналітичні моделі для оптимізації обчислювальних операцій при визначенні параметрів $c_1(x)$ та $c_2(x)$ відповідних α-перерізів результуючої нечіткої множини $\underset{\sim}{C}$ наведені в табл. 1, де $C_\alpha = [c_1(\alpha), c_2(\alpha)]$.

В кожному з випадків реалізації тієї чи іншої операції нечіткої арифметики будемо формувати результуючу нечітку множину $\underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{A}(*)\underset{\sim}{B}$, де замість (*) може стояти позначення конкретної операції операцій додавання (+), віднімання (–), множення (·) або ділення (:).

Таблиця 1

Моделі параметрів α-перерізів результуючих нечітких множин $\underset{\sim}{C}$

Операція	Параметри α-перерізу: $c_1(\alpha), c_2(\alpha)$
(+)	$c_1(\alpha) = a_1 + b_1 + \alpha\left[(a_0 + b_0) - (a_1 + b_1)\right]$ $c_2(\alpha) = a_2 + b_2 - \alpha\left[(a_2 + b_2) - (a_0 + b_0)\right]$
(–)	$c_1(\alpha) = a_1 - b_1 + \alpha\left[(a_0 + b_2) - (a_1 + b_0)\right]$ $c_2(\alpha) = a_2 - b_2 - \alpha\left[(a_2 + b_0) - (a_0 + b_1)\right]$
(·)	$c_1(\alpha) = (a_0 - a_1)(b_0 - b_1)\alpha^2 +$ $+\left[b_1(a_0 - a_1) + a_1(b_0 - b_1)\right]\alpha + a_1 b_1$ $c_2(\alpha) = (a_2 - a_0)(b_2 - b_0)\alpha^2 -$ $-\left[a_2(b_2 - b_0) + b_2(a_2 - a_0)\right]\alpha + a_2 b_2$
(:)	$c_1(\alpha) = \dfrac{a_1 + \alpha(a_0 - a_1)}{b_2 - \alpha(b_2 - b_0)}$ $c_2(\alpha) = \dfrac{a_2 - \alpha(a_2 - a_0)}{b_1 + \alpha(b_0 - b_1)}$

Задача синтезу аналітичних моделей полягає в формуванні відповідних аналітичних залежностей, згідно з якими можна безпосередньо обчислювати значення результуючих функцій належності $\mu_{\underset{\sim}{C}}(x)$ відповідних нечітких множин $\underset{\sim}{C}$ на основі параметрів a_0, a_1, a_2 та b_0, b_1, b_2 нечітких трикутних чисел $\underset{\sim}{A}$ та $\underset{\sim}{B}$ без використання відповідних α-перерізів та їх параметрів.

Нижче наведені синтезовані автором [4 – 7, 12] аналітичні моделі для результуючих функцій належності $\mu_{\underset{\sim}{C}}(x)$ при здійсненні вищезазначених операцій нечіткої арифметики.

Як правило, алгоритм реалізації обчислювальної операції додавання нечітких чисел $\underset{\sim}{A}$ та $\underset{\sim}{B}$ [4, 11] базується на використанні відповідних α-перерізів A_α та B_α, зокрема:

$$C_\alpha = A_\alpha(+)B_\alpha = \left[a_1(\alpha), a_2(\alpha)\right](+)\left[b_1(\alpha), b_2(\alpha)\right] =$$

$$= \left[a_1(\alpha) + b_1(\alpha), a_2(\alpha) + b_2(\alpha)\right].$$

Синтезована на основі попередніх результатів [4, 12] аналітична модель результуючої функції належності $\mu_{\underset{\sim}{C}}(x)$ для операції додавання $\underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{A}(+)\underset{\sim}{B}$ може бути представлена у вигляді:

$\forall x \in R$:

$$\mu_{\underset{\sim}{C}}(x) = \begin{cases} 0, \forall\left(x \le a_1 + b_1\right) \mathrm{U} \left(x \ge a_2 + b_2\right); \\ \dfrac{x - a_1 - b_1}{a_0 + b_0 - a_1 - b_1}, \forall\left(a_1 + b_1 < x \le a_0 + b_0\right); \\ \dfrac{a_2 + b_2 - x}{a_2 + b_2 - a_0 - b_0}, \forall\left(a_0 - b_0 < x < a_2 + b_2\right). \end{cases}$$

Алгоритм реалізації операції віднімання нечітких чисел $\underset{\sim}{A}$ та $\underset{\sim}{B}$ [5, 11] при використанні відповідних α-перерізів A_α та B_α можна записати наступним чином:

$$C_\alpha = A_\alpha(-)B_\alpha = \left[a_1(\alpha), a_2(\alpha)\right](-)\left[b_1(\alpha), b_2(\alpha)\right] =$$

$$= \left[a_1(\alpha) - b_1(\alpha), a_2(\alpha) - b_2(\alpha)\right].$$

Для здійснення операції віднімання [5, 12] нечітких множин $\underset{\sim}{A}$ та $\underset{\sim}{B}$ синтезована аналітична модель $\mu_{\underset{\sim}{C}}(x)$ результуючої нечіткої множини $\underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{A}(-)\underset{\sim}{B}$ має наступний вигляд:

$\forall x \in R$:

$$\mu_{\underset{\sim}{C}}(x) = \begin{cases} 0, \forall\left(x \le a_1 - b_2\right) \mathrm{U} \left(x \ge a_2 - b_1\right); \\ \dfrac{x - a_1 + b_2}{a_0 - b_0 - a_1 + b_2}, \forall\left(a_1 - b_1 < x \le a_0 + b_0\right); \\ \dfrac{a_2 - b_1 - x}{a_2 - b_2 - a_0 + b_0}, \forall\left(a_0 - b_0 < x < a_2 + b_1\right). \end{cases}$$

Алгоритм реалізації операції множення нечітких чисел $\underset{\sim}{A}$ та $\underset{\sim}{B}$ [6, 11] при використанні відповідних α-перерізів A_α та B_α можна записати наступним чином:

$$C_\alpha = A_\alpha(\cdot)B_\alpha = \left[a_1(\alpha), a_2(\alpha)\right](\cdot)\left[b_1(\alpha), b_2(\alpha)\right] =$$

$$= \left[a_1(\alpha) \times b_1(\alpha), a_2(\alpha) \times b_2(\alpha)\right].$$

Процедура синтезу відповідної аналітичної моделі результуючої функції належності $\mu_{\underset{\sim}{C}}(x)$ базується на аналізі коренів квадратних рівнянь [6, 12], сформованих на основі результатів табл. 1, зокрема коренів α_1 та α_2 рівняння

$$(a_0-a_1)(b_0-b_1)\alpha^2+\left[b_1(a_0-a_1)+a_1(b_0-b_1)\right]\alpha+ \\ +a_1b_1-x=0$$

та коренів α_3, α_4 рівняння

$$(a_2-a_0)(b_2-b_0)\alpha^2-\left[a_2(b_2-b_0)+b_2(a_2-a_0)\right]\alpha+ \\ +a_2b_2-x=0,$$

що мають задовольняти умову $\alpha_i \in [0,1],\ i=1,2,3,4$

Для нечіткої операції множення $\underset{\sim}{C}=\underset{\sim}{A}(\cdot)\underset{\sim}{B}$ синтезована аналітична модель результуючої функції належності $\mu_{\underset{\sim}{C}}(x)$ має вигляд:

$\forall x \in R^+$:

$$\mu_{\underset{\sim}{C}}(x)=\begin{cases} 0,\ \forall\left(x\le a_1b_2\right)\mathrm{U}\left(x\ge a_2b_1\right); \\ \dfrac{-[(a_0-a_1)b_1+(b_0-b_1)a_1]}{2(a_0-a_1)(b_0-b_1}+ \\ +\dfrac{\sqrt{[(a_0-a_1)b_1-(b_0-b_1)a_1]^2+4(a_0-a_1)(b_0-b_1)x}}{2(a_0-a_1)(b_0-b_1)}, \\ \qquad \forall\left(a_1-b_1<x\le a_0+b_0\right); \\ \dfrac{-[(a_0-a_2)b_2+(b_0-b_2)a_2]}{2(a_0-a_1)(b_0-b_1}- \\ -\dfrac{\sqrt{[(a_0-a_2)b_2-(b_0-b_2)a_2]^2+4(a_0-a_2)(b_0-b_2)x}}{2(a_0-a_2)(b_0-b_2)}, \\ \qquad \forall\left(a_0-b_0<x<a_2+b_1\right). \end{cases}$$

Дослідження показують [6], що результатом операції множення двох нечітких трикутних чисел $\underset{\sim}{A}$ та $\underset{\sim}{B}$ є нечітка множина $\underset{\sim}{C}=\underset{\sim}{A}(\cdot)\underset{\sim}{B}$ з функцією належності $\mu_{\underset{\sim}{C}}(x)$, яка не належить до сімейства нечітких трикутних чисел.

Алгоритм реалізації операції ділення нечітких чисел $\underset{\sim}{A}$ та $\underset{\sim}{B}$ [7, 11] при використанні відповідних α-перерізів A_α та B_α буде мати наступний вигляд:

$$C_\alpha=A_\alpha(:)B_\alpha=\left[a_1(\alpha),a_2(\alpha)\right](:)\left[b_1(\alpha),b_2(\alpha)\right]= \\ =\left[a_1(\alpha)/b_1(\alpha),a_2(\alpha)/b_2(\alpha)\right]..$$

Для операції ділення синтезовану аналітичну модель $\mu_{\underset{\sim}{C}}(x)$ результуючої функції належності $\underset{\sim}{C}=\underset{\sim}{A}(:)\underset{\sim}{B}$ можна представити [7, 12] наступним чином:

$\forall x \in R^+$:

$$\mu_{\underset{\sim}{C}}(x)=\begin{cases} 0,\ \forall\left(\left(x\le(a_1/b_2)\right)\mathrm{U}\left(x\ge(a_2/b_1)\right)\right); \\ \dfrac{b_2x-a_1}{(a_0-a_1)-(b_0-b_2)x},\ \forall\left(a_1/b_1<x\le a_0/b_0\right); \\ \dfrac{b_1x-a_2}{(a_0-a_2)-(b_0-b_1)x},\ \forall\left(a_0/b_0<x<a_2/b_1\right). \end{cases}$$

Детальні дослідження [4 – 7, 12] арифметичних операцій над нечіткими числами трикутної форми показують, що результатом обчислення операцій додавання $\underset{\sim}{C}=\underset{\sim}{A}(+)\underset{\sim}{B}$ та віднімання $\underset{\sim}{C}=\underset{\sim}{A}(-)\underset{\sim}{B}$ є також нечіткі числа $\underset{\sim}{C}$ з трикутною формою функцій належності $\mu_{\underset{\sim}{C}}(x)$, а результатом обчислення нечіткої операції ділення – нечіткі числа з більш складною, в загальному випадку нелінійною формою функцій належності $\mu_{\underset{\sim}{C}}(x)$.

Висновок

Використання розроблених аналітичних моделей для побудови результуючих функцій належності $\mu_{\underset{\sim}{C}}(x)$ та для визначення параметрів α-перерізів $\{c_1(\alpha),c_2(\alpha)\}$ результуючих нечітких множин $\underset{\sim}{C}$ при здійсненні вищезазначених операцій нечіткої арифметики дозволяє суттєво підвищити точність та швидкодію обчислювальних процесів. Ці характеристики дозволяють відповідним чином підвищити гарантоздатність нечітких моделей та алгоритмів, знизити складність та програмно-апаратну реалізацію цифрових пристроїв, що реалізують операції нечіткої арифметики. Викладений в даній статті підхід щодо створення гарантоздатних аналітичних моделей є одним з методів підвищення надійності програмних засобів систем контролю та керування складними динамічними системами і комплексами. В подальшому доцільним є проведення досліджень, пов’язаних з синтезом аналітичних моделей результуючих функцій належності для операцій нечіткої арифметики над нечіткими числами з трапецiйною формою функцій належності.

Література

1. Азарсков В.М., Блохин Л.Н., Житецкий Л.С., Куссуль Н.Н. Робастные методы оценивания, идентификации и адаптивного управления. – К.: НАУ, 2004. – 500 с.

2. Беллман Р., Заде Л. Принятие решений в расплывчатых условиях. В кн.: Вопросы анализа и процедуры принятия решений // Сб. пер. – М.: Мир. – 1976. – С. 172-215.

3. Зотов М.Г. Многокритериальное конструирование систем автоматического управления. – М.: БИНОМ, Лаборатория знаний, 2004. – 375 с.

4. Кондратенко В.Ю. Дослідження особливостей нечіткої арифметики для нечітких множин з функціями належності трикутної форми. В кн.: Науково-методологічні аспекти розвитку творчого потенціалу науковців // Матеріали обласної науково-практичної школи-семінару. – Миколаїв. – 2003. – С. 48-54.

5. Кондратенко В.Ю. Нечіткі аналітичні моделі для підвищення швидкодії процесів обробки нечіткої інформації. В кн.: Інформаційно-керуючі системи і комплекси // Матеріали Міжнародної науково-технічної конференції аспірантів, молодих науковців і студентів ІКСК-2005. – Миколаїв. – 2005. – С. 145-155.

6. Кондратенко В.Ю. Синтез аналітичних моделей для обчислювальних процесів з нечіткими числами: операція множення // Технічні вісті. – 2005. – № 1(20), 2(21). – С. 85-90.

7. Кондратенко В.Ю. Аналітичні моделі результуючих функцій належності для автоматизації обчислювальних процесів з нечіткими множинами: операція ділення // Наукові праці МДГУ им. П.Могили, Серія “Комп’ютерні технології”. – Миколаїв: МДГУ, 2006. – Т. 57, вип. 44. – С. 81-91.

8. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта / Под ред. Д.А. Поспелова. – М.: Наука. Гл. ред. физ. мат. лит., 1986. – 312 с.

9. Новак В., Перфильева И., Мочкорж И. Математические принципы нечеткой логики: Пер. с англ. / Под ред. А.Н. Аверкина. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 352 с.

10. Основи цифрових систем / За ред. М.П. Благодарного, В.С. Харченка. – Х.: НАКУ “ХАІ”, 2002. – 672 с.

11. Kaufmann A., Gupta. M.M. Introduction to Fuzzy Arithmetic: Theory and Applications. – New York: Van Nostrand Reinhold Company, 1985. – 351 p.

12. Kondratenko V. Fuzzy Arithmetic Analytic Models For Triangular Uncertain Numbers. 77th Annual Meeting of the Gessellschaft fur Angewante Mathematik und Mechanik e.V., GAMM’2006. Book of Abstracts. – Berlin:Technische Universitat, 2006. – 523 p.

Надійшла до редакції 15.02.2007

Рецензент: д-р техн. наук, проф. І.І. Коваленко, Національний університет кораблебудування ім. адмірала Макарова, Миколаїв.