

УДК 629.7.058

О.В. ЗБРУЦЬКИЙ, В.В. ГАВРИЛЕНКО, Т.В. СТЕЦЕНКО

*Національний технічний університет України „Київський політехнічний інститут”,
Україна***ДИНАМІКА ВІБРАЦІЙНИХ ГІРОСКОПІВ**

Проаналізовано властивості основних кінематичних схем вібраційних гіроскопів при рівномірному обертанні та гармонічних коливаннях основи. Показано можливість та побудовано узагальнену математичну модель таких гіроскопів. Досліджено та показано можливість підвищення стабільності коефіцієнта передачі гіроскопа введенням нелінійних законів керування.

вібраційний гіроскоп, частотні характеристики, узагальнена динамічна модель, динамічна похибка, функція керування коливаннями, синхронізація автоколивань

Вступ

Мікромеханічні та мікроелектромеханічні (МЕМС) технології широко застосовують при створенні різноманітних сенсорів, у тому числі й вимірювачів кінематичних параметрів рухомих об'єктів [1]. В останньому випадку вони є чутливими елементами навігаційних систем або систем керування [1,2]. При цьому бажано мати передавальну функцію такого елемента. Але ця задача ускладнюється тим, що вимірювана кутова швидкість стає модульованою з частотою збуджуваних у системі коливань [3]. Питання побудови динамічної моделі вібраційних гіроскопів, зручної для використання в системах керування, розглянуто в літературі недостатньо, хоча іншим питанням динаміки присвячено багато публікацій [4...9].

1. Постановка задачі

У більшості випадків вібраційні гіроскопи являють собою системи з двома степенями вільності, або можуть бути представлені такими. При цьому заданий рух чутливого елемента може бути як коливальним, так і обертальним. Покажемо можливість побудови узагальненої математичної моделі основних типів вібраційних гіроскопів і зведення її до зручного вигляду для застосування в системах керування. Для виникнення в системі коріолісівського ефекту по одній із координат збуджують коливання. Оскільки параметри

збуджуваних коливань визначають коефіцієнт передачі вимірювача, має бути забезпечена їх висока стабільність.

2. Отримання узагальненої математичної моделі вібраційних гіроскопів

На рис. 1-4 зображені основні кінематичні схеми вібраційних гіроскопів та їх математичні моделі [3,4,5].

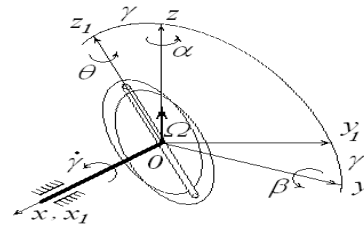


Рис. 1. Роторний вібраційний гіроскоп

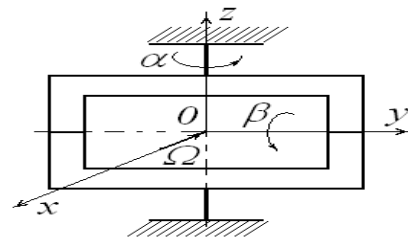


Рис. 2. Кардановий вібраційний гіроскоп

$$B\ddot{\theta} + f_{\theta}\dot{\theta} + [c_{\theta} + (A-B)\dot{\gamma}^2]\theta = A\dot{\gamma}\Omega\sin\gamma - B\dot{\Omega}\cos\gamma, \quad (1)$$

де A, B – моменти інерції ротора відносно осей $x_1, y_1(z_1)$; c_{θ} – коефіцієнт жорсткості пружної осі на кручення при повороті ротора на кут θ ; f_{θ} – коефіцієнт моменту сил опору;

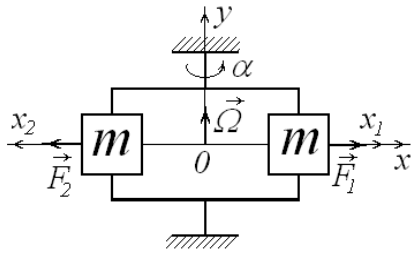


Рис. 3. Камертонний вібраційний гіроскоп

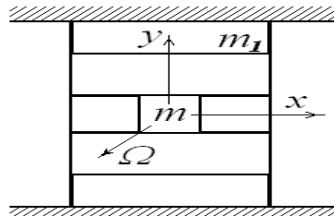


Рис. 4. Вібраційний гіроскоп з поступальним рухом чутливого елемента

Ω – кутова швидкість переносного руху основи, що підлягає виміру.

$$B\ddot{\beta} + (B + C - A)\Omega\dot{\alpha} + f_{\beta}\dot{\beta} + c_{\beta}\beta = M_2, \quad (2)$$

$$(C + c)\ddot{\alpha} - (B + C - A)\Omega\dot{\beta} + f_{\alpha}\dot{\alpha} + c_{\alpha}\alpha = M_1,$$

де A, B, C – моменти інерції маси відносно осей x, y, z ; c – момент інерції карданової рамки відносно осі z ; c_{α}, c_{β} – коефіцієнти жорсткості пружної осі на кручення при повороті ротора на кути α, β ; інші позначення аналогічні позначенням формули (1).

$$m\ddot{x} + f_x\dot{x} + c_x x = 2F,$$

$$I_y\ddot{\alpha} + f_{\alpha}\dot{\alpha} + c_{\alpha}\alpha = -2m\Omega\dot{x}, \quad (3)$$

де I_y – момент інерції системи при $y_1 = y_2 = 0$,

c_x – коефіцієнт жорсткості пружних елементів на прогин у напрямку осі x .

$$(m + m_1)\ddot{x} - 2m\Omega\dot{y} + f_x\dot{x} + c_x x = F_x, \quad (4)$$

$$m\ddot{y} + 2m\Omega\dot{x} + f_y\dot{y} + c_y y = F_y.$$

де c_y і c_x – коефіцієнти жорсткості пружних елементів на прогин.

Всі динамічні моделі можуть бути записані у вигляді

$$\ddot{x} - m_c\Omega\dot{y} + 2n_x\dot{x} + k_1^2 x = F_1, \quad (5)$$

$$\ddot{y} + m_c\Omega\dot{x} + 2n_y\dot{y} + k_2^2 y = F_2,$$

де позначено

$$m_c = \left\{ \frac{B + C - A}{C + c}, \frac{B + C - A}{B}, \frac{2m}{m}, \frac{2m}{m + m_1} \right\},$$

$$k_1 = \left\{ \frac{c_2}{c}, \frac{c_x}{m + m_1} \right\}, k_2 = \left\{ \frac{c_{\beta}}{B}, \frac{c_y}{m} \right\},$$

$$2n_x = \left\{ \frac{f_{\beta}}{C + c}, \frac{f_x}{m + m_1} \right\},$$

$$2n_y = \left\{ \frac{f_{\alpha}}{B}, \frac{f_y}{m} \right\}, \quad F_1 = \left\{ \frac{M_1}{B}, \frac{F_x}{m + m_1} \right\}.$$

Розв'язок системи рівнянь (5) в операторному вигляді для вимушених коливань

$$x(p) = \frac{p^2 + 2n_x p + k_2^2}{\Delta_1 \Delta_2} F_1(p) + \frac{2\Omega p}{\Delta_1 \Delta_2} F_2(p),$$

$$y(p) = -\frac{2\Omega p}{\Delta_1 \Delta_2} F_1 + \frac{p^2 + 2n_y p + k_1^2}{\Delta_1 \Delta_2} F_2, \quad (6)$$

$$\text{де } \Delta_1 = p^2 + 2n_1 p + \omega_1^2,$$

$$\Delta_2 = p^2 + 2n_2 p + \omega_2^2, n_1 \approx n_x, n_2 \approx n_y$$

показує, що збурення вимушених коливань (заданий рух) і вимірювання вихідної координати (рух, що спостерігається) мають відбуватися по взаємно перпендикулярних осях. Це неважко встановити також із фізичних закономірностей роботи системи.

Будемо вважати в подальшому, що $F_2 = 0$. Тоді вимушений рух системи описується формулами

$$x(t) = a_x \sin(\lambda t - \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_y), \quad (7)$$

$$y(t) = -a_y \cos(\lambda t - \alpha_1 - \alpha_2),$$

де

$$a_x = \frac{\sqrt{(k_2^2 - \lambda^2)^2 + 4\xi^2 k_2^2 \lambda^2}}{\sqrt{(\omega_2^2 - \lambda^2)^2 + 4\xi^2 \omega_2^2 \lambda^2}} \cdot \frac{a_1}{\sqrt{(\omega_1^2 - \lambda^2)^2 + 4\xi^2 \omega_1^2 \lambda^2}} \approx$$

$$\approx \frac{a_1}{\sqrt{(\omega_1^2 - \lambda^2)^2 + 4\xi^2 \omega_1^2 \lambda^2}} \approx a_{xm},$$

$$a_y = \frac{2\Omega\lambda}{\sqrt{(\omega_1^2 - \lambda^2)^2 + 4\xi^2 \omega_1^2 \lambda^2}} \cdot \frac{a_1}{\sqrt{(\omega_2^2 - \lambda^2)^2 + 4\xi^2 \omega_2^2 \lambda^2}},$$

$$\text{tg } \alpha_x = \frac{2\xi\omega_1\lambda}{\omega_1^2 - \lambda^2}; \text{tg } \alpha_y = \frac{2\xi k_2 \lambda}{k_2^2 - \lambda^2};$$

$$\xi = \frac{n_1}{\omega_1} = \frac{n_2}{\omega_2} = \frac{n_y}{k_2}.$$

Для збільшення чутливості системи до вимірюваної кутової швидкості Ω потрібно збільшити амплітуду спостережуваних коливань a_y , що можливо при резонансному режимі на частоті $\lambda = \omega_1$, або $\lambda = \omega_2$. При цьому знайдемо

$$\frac{a_y(\lambda = \omega_1 \approx k_1)}{a_y(\lambda = \omega_2 \approx k_2)} = \frac{\omega_2}{\omega_1},$$

звідки впливає доцільність збурення коливань на нижчій із власних частот ($\lambda \approx \omega_1 \approx k_1$). Із (7) також слідує, що в динаміці системи по збурюваній координаті x можна не враховувати впливу на неї руху по другій координаті y . Тоді диференціальне рівняння заданого руху чутливого елемента гіроскопів має вигляд

$$\ddot{x} + 2n_x \dot{x} + k_1^2 x = F_1 = a_1 \sin \lambda t, \quad (8)$$

частинний розв'язок якого (вимушені коливання) запишемо як

$$x = a_{xn} \sin(\lambda t - \alpha_x) = -a_{xn} \cos \lambda t,$$

$$(\lambda \approx \omega_1 \approx k_1, \alpha_x \approx \frac{\pi}{2}), a_{xn} = \frac{a_1}{2\xi k_1 \lambda}.$$

Приймаючи в більш загальному випадку рух основи за законом

$$\Omega = \Omega_0 \cos v t, \quad (9)$$

з врахуванням розв'язку рівняння (8) отримаємо математичну модель руху гіроскопа за вихідною координатою

$$\ddot{y} + 2n_y \dot{y} + k_2^2 y = -\Omega_0 a_v [\sin(v + \lambda)t - \sin(v - \lambda)t], \quad (10)$$

$$a_v = \frac{1}{2} a_{xn} \lambda m_c = \frac{a_1 m_c}{4\xi k_1}.$$

Таким же рівнянням описується рух камертонного гіроскопа (4), для якого $\alpha = y$,

$$m_c = \frac{2m}{I_y}.$$

Перетворивши праву частину рівняння (1), запишемо його для $\dot{\gamma} = const$ у аналогічному (10) вигляді

$$\ddot{y} + 2n_y \dot{y} + k_2^2 y = \Omega_0 [a_{v+} \sin(v + \lambda)t - a_{v-} \sin(v - \lambda)t], \quad (11)$$

$$a_{v\pm} = \frac{a\lambda \pm v}{2}; a = \frac{A}{B}; k_2^2 = \frac{C_0 + (A - B)\lambda^2}{B};$$

$$\theta = y; \lambda = \dot{\gamma} \approx k_1.$$

Рівняння (11), таким чином, можна розглядати як узагальнену математичну модель вібраційних гіроскопів при змінній переносній кутовій швидкості. Особливістю отриманої динамічної

моделі (11) вібраційного гіроскопа є те, що за наявності змінної кутової переносної швидкості в ній присутнє двочастотне збурення. Частоти цього збурення дорівнюють сумі та різниці частоти зміни переносної кутової швидкості та частоти збурення заданого вимушеного руху чутливого елемента. Така структура диференціальних рівнянь руху гіроскопа має особливості аналізу його динамічних властивостей як реакції на переносну кутову швидкість (9). Розв'язок рівняння (10) та (11) після демодуляції частоти збурення коливань, нехтуючи малою квадратурною складовою, наведемо як

$$y = \frac{1}{2} (b_1 + b_2) \cos(vt - \alpha) = b \cos(vt - \alpha), \alpha = \alpha_+ - \frac{1}{2}\pi. \quad (12)$$

Частотні характеристики гіроскопа показані на рис. 5, 6 і 7.

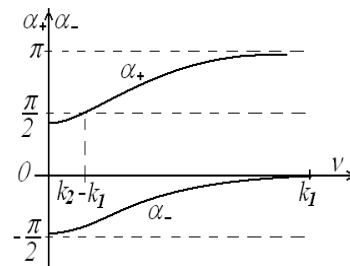


Рис. 5. Фазово-частотні характеристики

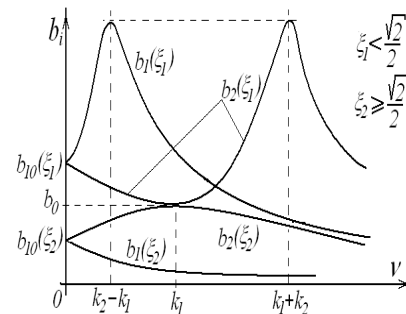


Рис. 6. Амплітудно-частотні характеристики

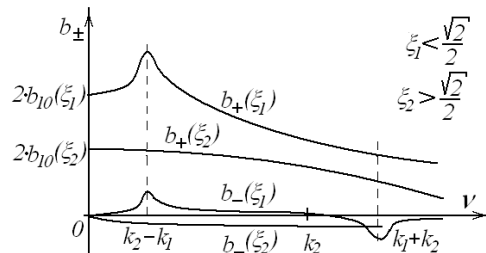


Рис. 7. Результуючі амплітудно-частотні характеристики гіроскопа

3. Еквівалентна математична модель. Динамічні похибки

Неважно бачити із рис. 7 і рівняння (12), що властивості вібраційного гіроскопа відповідають властивостям коливальної системи з одним ступенем вільності. Це дозволило запропонувати еквівалентну математичну або динамічну модель вібраційного гіроскопа, що описує рух системи по вихідній координаті для переносної кутової швидкості, яка змінюється за гармонічним законом

$$y + 2n_e y + \omega_e^2 y = a_{ve} \Omega_{z_0} \cos \nu t. \quad (13)$$

Для забезпечення адекватності моделі її коефіцієнти мають бути вибрані з таких співвідношень:

$$n_e = n_2 = \xi_2 k_2, \quad \omega_e = k_2 - k_1, \quad (14)$$

$$\omega_e = \{k - \gamma, k_2 - \lambda\}, \quad \xi_e = \xi_2.$$

Тоді передавальна функція гіроскопа як вимірювача кутової швидкості матиме вигляд

$$W(s) = \frac{y(s)}{\Omega(s)} = \frac{a_{ve}}{s^2 + 2n_e s + \omega_e^2}. \quad (15)$$

Відповідні частотні характеристики

$$W(\nu) = \frac{a_{ve}}{\sqrt{(\omega_e^2 - \nu^2)^2 + 4\xi_e^2 k_2^2 \nu^2}}, \quad \alpha(\nu) = -\arctg \frac{2\xi_e k_2 \nu}{k^2 - \nu^2}.$$

У випадку, якщо $\nu \ll k_2$, то $\alpha \approx -\arctg \frac{2\xi_e \nu}{k^2}$.

Математична модель (13) та передавальна функція (15) дозволяють легко застосувати методи теорії автоматичного управління для аналізу систем, які включають у себе такі гіроскопічні сенсори.

У роботі отримана модель коефіцієнта передачі гіроскопа b є нелінійною функцією частоти зміни кутової швидкості (9), яку можна подати у вигляді ряду

$$b(\nu) = b(0) + \frac{\partial b}{\partial \nu} \Big|_{\nu=0} \nu + \dots = b_{10} + b_{12} \nu^2 + \dots, \quad (16)$$

$$b_{12} = 2\Omega_0 a_{\nu} \left\{ \frac{6(k_2^2 - k_1^2 - 2\xi_2^2 k_2^2) k_1^2}{\left[(k_2^2 - k_1^2)^2 + 4\xi_2^2 k_2^2 k_1^2 \right]^2} + 2 \frac{k_2^2 - 2\xi_2^2 k_2^2 - 3k_1^2}{\left[(k_2^2 - k_1^2)^2 + 4\xi_2^2 k_2^2 k_1^2 \right]^2} \right\}$$

У разі роторного вібраційного гіроскопа у виразі b_{12}

$$\text{маємо } a_{\nu} = a_{\nu+}(0) = a_{\nu-}(0) = \frac{a\dot{\gamma}}{2}.$$

Динамічна похибка системи $\Delta b = b - b_{10} = b_{12} \nu^2$ характеризує відхилення коефіцієнта передачі від його статичного значення b_{10} при вимірюванні змінної кутової швидкості. Для динамічної похибки при $k_2 \gg k_1$ одержимо

$$\Delta b \approx \frac{2\Omega_0 a_{\nu} (k_2^2 - 2k_1^2)}{(k_2^2 - k_1^2)^3} \nu^2,$$

$$\text{а при } k_2 = k_1 \quad \Delta b \approx -\frac{\Omega_0 a_{\nu}}{2\xi_2^2 k_1^4} \nu^2.$$

Динамічну похибку вимірювання кутової швидкості основи можна апроксимувати квадратичною функцією її частоти.

Підвищення чутливості вимірювача досягається збільшенням амплітуди a_y коливань по вихідній координаті y (8), для чого в системі реалізують резонансний режим роботи. У цьому випадку

$$\varphi \approx \varphi_2 \approx 0, \quad \varphi_1 \approx \frac{\pi}{2},$$

$$x = -\frac{F_x}{2h_1 \lambda} \cos \lambda t = -a_x \cos \lambda t, \quad (17)$$

$$y = \frac{\Omega F_x}{h_1 \sqrt{(\omega_2^2 - \lambda^2)^2 + 4h_2^2 \lambda^2}} \sin \lambda t =$$

$$= a_y \sin \lambda t,$$

$$a_y = \frac{2\Omega \nu}{h_1 \sqrt{(\omega_2^2 - \nu^2)^2 + 4h_2^2 \lambda^2}} a_x.$$

4. Підвищення стабільності коефіцієнта передачі

Амплітуда коливань a_y (17) вихідної координати вимірювача у випадку лінійної системи (8) обмежується силами в'язкого опору, пропорційними швидкостям переміщення чутливого елемента в першому ступені. Забезпечення дешевизни вимірювача для масового застосування вимагає максимального спрощення технології виготовлення, у тому числі відсутності спеціального газонаповнення. Це, у свою чергу, породжує нестабільність коефіцієнта в'язких втрат (коефіцієнта демпфування). Тому виникає проблема зменшення впливу цієї нестабільності на коефіцієнт передачі гіроскопа без технологічних ускладнень конструкції. Досягти цього можна організацією автоколивального режиму роботи системи (8) за збуджуваною координатою x [10]. В цьому випадку

необхідно ввести спеціальний закон управління в контурі збудження.

Вибір законів управління автоколиваннями має бути таким, щоб усунути вплив у системі в'язкого тертя. Вводячи функцію управління коливаннями $f(x, \dot{x})$, що включає в себе для компактності запису демпфірування системи, рівняння (8) наведемо у вигляді

$$\ddot{x} + k_1^2 x = f(x, \dot{x}) + F_{x_0} \sin \lambda t, \quad (18)$$

де $f(x, \dot{x})$ – у загальному випадку нелінійна функція.

Оскільки коливання в системі (18) відповідають головному резонансу $\lambda \approx k$, розв'язання рівняння (18) у першому наближенні будемо шукати у вигляді [11]

$$x = a \cos(\lambda t + \vartheta) = a \cos \psi, \quad (19)$$

де a і ϑ визначаються з рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\delta_e a - \frac{F_x}{k + \lambda} \cos \vartheta, \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= k_e - \lambda + \frac{F_x}{a(k + \lambda)} \sin \vartheta. \end{aligned} \quad (20)$$

Тут δ_e і k_e – є відповідно, еквівалентний декремент загасання й еквівалентна частота нелінійних власних коливань системи (18)

$$\begin{aligned} \delta_e &= \frac{1}{2\pi a k} \int_0^{2\pi} f(x, \dot{x}) \sin \psi d\psi, \\ k_e &= k - \frac{1}{2\pi a k} \int_0^{2\pi} f(x, \dot{x}) \cos \psi d\psi. \end{aligned} \quad (21)$$

Для стаціонарних коливань, що викликають найбільший інтерес, виключивши в (20) фазу ϑ , знайдемо залежність між амплітудою a і частотою v зовнішньої сили

$$a^2 [(k_e^2 - \lambda^2)^2 + 4\lambda^2 \delta_e^2] = F_x^2. \quad (22)$$

Як бачимо з рівняння (22), для зменшення впливу на амплітуду стаціонарних коливань в'язкого опору, нелінійна функція управління коливаннями $f(x, \dot{x})$ має, у першу чергу, формувати структуру еквівалентного декременту загасання δ_e (21).

З можливої множини функцій управління зупинимося на тих із них, що представляють

найбільший інтерес, та з (22) визначимо для них еквівалентні декременти загасання:

$$\begin{aligned} 1) \quad & f(x, \dot{x}) = 2h\dot{x} - u\dot{x}^3, \\ & \delta_e = -h + \frac{3}{8}u\lambda^2 a^2, \quad k_e = k, \\ 2) \quad & f(x, \dot{x}) = 2h\dot{x} - u\dot{x}x^2, \\ & \delta_e = -h + \frac{1}{16}ua^2, \quad k_e = k, \\ 3) \quad & f(x, \dot{x}) = -2h\dot{x} + u \operatorname{sign} \dot{x}, \\ & \delta_e = h - \frac{2u}{\pi a v}, \quad k_e = k. \end{aligned} \quad (23)$$

У цих випадках вибором величини керуючого впливу можна зменшувати вплив сил в'язкого опору в системі на амплітуду стаціонарних коливань. При дії на автоколивальну систему гармонійної збуджуючої сили (18) буде відбуватися синхронізація автоколивань [10]. З рівнянь (22), (23) визначимо рівняння амплітудно-частотних кривих, які з точністю до величин більш високого порядку малості мають вигляд

$$\lambda_0 = \sqrt{1 \pm \sqrt{\frac{F_x^2}{k^4 a^2} - 4(\zeta - \frac{3}{8}uka^2)^2}}, \quad (24)$$

$$\lambda_0 = \sqrt{1 \pm \sqrt{\frac{F_x^2}{k^4 a^2} - 4(\zeta - \frac{1}{16k}a^2)^2}}, \quad (25)$$

$$\lambda_0 = \frac{2u\xi \pm \sqrt{[(1-v_0^2)^2 + \zeta^2]\pi^2 k^4 F_x^2 - 4(1-v_0^2)^2 u^2}}{\pi k^2 [(1-v_0^2)^2 + \xi^2]},$$

$$v_0 = \frac{\lambda}{k}. \quad (26)$$

Амплітудно-частотні характеристики коливальної системи схожі на відповідні для лінійної системи. Дослідження стійкості стаціонарних коливань не виявляє в них яких-небудь особливостей.

Максимальне значення амплітуди синхронних автоколивань досягає при частоті збуджуючого впливу $\lambda = k$ ($v_0 = 1$), коли еквівалентна власна частота (23) нелінійної системи збігається з частотою збурення, та визначається як

$$1) \quad 2a_{\max} k^2 \left| \zeta - \frac{3}{8}uka_{\max}^2 \right| = F_x, \quad (27)$$

$$2) 2a_{\max} \left| \zeta - \frac{u}{16k} a_{\max}^2 \right| = F_x, \quad (28)$$

$$3) a_{\max} = \frac{1}{\zeta} \left(\frac{2u}{\pi k^2} + F_x \right). \quad (29)$$

Як бачимо з (29), для досягнення поставленої мети необхідно обмежитися першими двома функціями управління (23). У цих випадках при умовах

$$\zeta_e = \frac{3}{8} u k a_{\max}^2 \gg \zeta, \zeta_e = \frac{u}{16k} a_{\max}^2 \gg \zeta$$

максимальне значення амплітуд приблизно буде визначатися виразами

$$a_{\max}^3 = \frac{4F_x}{3uk^3}, a_{\max}^3 = \frac{8vF_x}{uk}. \quad (30)$$

Амплітуди коливань (30) є амплітудами збуджуваних коливань за координатою x системи (8): $a_{\max} = a_x$. Тоді на амплітуду вихідних коливань a_y , яка залежить від амплітуди a_x (30), сили в'язкого опору помітно не впливають (у першому наближенні).

Висновки

Вібраційні гіроскопи різних кінематичних схем можуть описуватися узагальненою математичною моделлю, яка відображає їх функціональні динамічні властивості. Запропонована узагальнена математична модель дозволяє дослідити амплітудні та фазові частотні характеристики, а еквівалентна математична модель дає можливість отримати передавальну функцію вібраційного гіроскопа. Сформувавши закони управління автоколивальним контуром, можна синхронізувати автоколивання, амплітуда яких буде визначатися переважно параметрами системи та функції управління, а вплив сил в'язкого тертя, що діють на систему ззовні, вдасться виключити та підвищити стабільність коефіцієнта передачі.

Література

1. Gai E. Guiding munitions with micromechanical INS/GPS system// Интегрированные системы навигации: Сб. статей.- Ст.-Петербург.-2004.-С.101-109.
2. Daved – LL – a novel gyroscope in SOI –

technology / W. Geiger, J. Freuch, M. Bramaier etc. // Symposium Gyro Technology, 2001. – Stuttgart. – P. 5.0 – 5.8.

3. Вибрационные датчики угловой скорости / Коновалов С.Ф., Кулешов А.В., Носов Н.А. и др. // 10 Санкт-Петербургская международ. конф. по интегрированным навигационным системам.-2003. – С. 261 – 271.

4. Збруцький А.В., Гавриленко В.В., Стеценко Т.В. Измерение угловых перемещений вибрационными гироскопами// Вісник Черкаського держ. техн. ун-ту. Спецвипуск.-2006.-С.29-35.

5. Брозгуль Л.И., Смирнов Е.Л. Вибрационные гироскопы. – М.: Машиностроение, 1970. – 216 с.

6. Апостолюк В.О., Збруцький О.В. Динаміка чутливих елементів мікромеханичних гіроскопів// Наук. вісті Нац. техн. ун-ту України «КПІ».-1998.– №3. – С.13-23.

7. Lynch D.D. Vibratory gyro analysis by the method of averaging// 2-nd St.-Petersburg Conf. of Gyroscopic Technology and Navigation.-1995.-P.18-26.

8. Lynch D.D. Coriolis vibratory gyros// Symposium Gyro Technology.- Stuttgart, Germany.-1998. – P. 1.1-1.14.

9. Apostolyuk V., Tay F. Dynamics of micromechanical coriolis vibratory gyros// Sensor Letters.- 2004.-V.2.– №3-4. – P.252-259.

10. Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний. – М.: Наука, 1971. – 239 с.

11. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 501с.

Надійшла до редакції 25.03.2007

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Л.М. Рижков, Національний технічний університет України «КПІ», Київ