УДК 621.391: 517. 518:510.52

В.М. УДОВИЧЕНКО

Національний технічний університет "ХПІ", Україна

ТРИВИМІРНІ ОПЕРАТОРИ ПЕРЕТВОРЕНЬ ФУР'Є ТА ХАРТЛІ НА ПРЯМОКУТНІЙ СІТЦІ НА ОСНОВІ МЕТОДУ ФАЙЛОНА ТА B-СПЛАЙНУ ТРЕТЬОГО СТЕПЕНЯ

Побудовано тривимірні оператори дискретно-неперервних і дискретних перетворень Фур'є і Хартлі на основі методу Файлона і B-сплайну третього степеня, що мають специфічні характеристики точності в порівнянні з відомими "класичними" тривимірними дискретно-неперервними і дискретними перетвореннями Фур'є і тривимірними дискретно-неперервними і дискретними перетвореннями Хартлі. Наведені теореми, що установлюють властивості операторів і співвідношення між операторами та тестовий приклад.

оператор, тривимірне перетворення Хартлі, тривимірне перетворення Фур'є, метод Файлона, B-сплайн, функціонал, властивості тривимірних операторів Фур'є та Хартлі

Вступ

Формулювання проблеми. Проблема, яку ми розв'язуємо в даній статті, полягає в побудові інструментарію інформаційних технологій в базисах Фур'є та Хартлі [1, 2] – тривимірних фінітних операторів перетворень Фур'є та Хартлі (скорочено: оператори $F\&H$), на прямокутній сітці на основі методу Файлона (Filon) [3] та B-сплайну [4] третього степеня для дійсних або комплексних функцій трьох дійсних змінних на основі фіксованої кількості відліків наближуваної функції $f(x, y, z)$, які б мали більш якісні характеристики точності, ніж "класичні" тривимірні оператори $F\&H$. Тому проблема є актуальною.

В літературі, присвяченій перетворенням $F\&H$, основними напрямками досліджень є різноманітні варіанти реалізації швидких алгоритмів дискретного перетворення Фур'є (ДПФ) [5 – 7], порівняння швидких алгоритмів ДПФ та дискретного перетворення Хартлі (ДПХ) [8], створення багатовимірних варіантів ДПФ та ДПХ [9]. "Класичні" тривимірні перетворення $F\&H$:

$$Z^{F\backslash H}(u,v,t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y,z)\times$$

$$\times\begin{Bmatrix} \exp[-j(ux+vy+tz)] \\ cas\,(ux+vy+tz) \end{Bmatrix} dx\,dy\,dz\,,$$

$$f(x,y,z) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} Z^{F\backslash H}(u,v,t)\times$$

$$\times\begin{Bmatrix} \exp[\,j(ux+vy+tz)] \\ cas\,(ux+vy+tz) \end{Bmatrix} du\,dv\,dt\,,$$

де $cas(t) = \cos(t) + \sin(t)$,

$F \backslash H$ – скорочено: Фур'є або Хартлі.

Наведені формули в прикладних задачах, орієнтовані на інформаційні технології, використовують у вигляді операторів прямих та обернених тривимірних дискретних перетворень $F\&H$ [9]:

$$Z^{F\backslash H}[\nu_1,\nu_2,\nu_3] = \frac{1}{N_1 N_2 N_3}\sum_{\tau_1=0}^{N_1-1}\sum_{\tau_2=0}^{N_2-1}\sum_{\tau3=0}^{N_3-1} f[\tau_1,\tau_2,\tau_3]\times$$

$$\times\left[\exp\left(-j\,2\pi\sum_{s=1}^{3}\frac{\nu_s\,\tau_s}{N_s}\right)\backslash cas\left(2\pi\sum_{s=1}^{3}\frac{\nu_s\,\tau_s}{N_s}\right)\right], \quad (1)$$

$$\nu_s = \overline{0,\, N_s - 1},\; s = \overline{1,\,3}\,;$$

$$f[\tau_1,\tau_2,\tau_3] = \sum_{\nu_1=0}^{N_1-1}\sum_{\nu_2=0}^{N_2-1}\sum_{\nu_3=0}^{N_3-1} Z^{F\backslash H}[\nu_1,\nu_2,\nu_3]\times$$

$$\times\left[\exp\left(j\,2\pi\sum_{s=1}^{3}\frac{\nu_s\,\tau_s}{N_s}\right)\backslash cas\left(2\pi\sum_{s=1}^{3}\frac{\nu_s\,\tau_s}{N_s}\right)\right], \quad (2)$$

$$\tau_s = \overline{0,\, N_s - 1},\; s = \overline{1,\,3}\,.$$

Тривимірні “класичні” дискретні перетворення $F\&H$ (1), (2) з точки зору характеристик точності мають недоліки, які аналогічні розглянутим в [10] для “класичного” двовимірного ДПФ.

Метою роботи є побудова тривимірних операторів фінітних дискретно-неперервних та дискретних перетворень $F\&H$ на основі методу Файлона та В-сплайну третього степеня по кожній змінній, з $\prod_{s=1}^{3}(2Mp_s+1)$ вузлами прямокутної сітки:

$$S(x_{p_1}, y_{p_2}, z_{p_3}),\ x_{p_1}=p_1\Delta_1,\ y_{p_2}=p_2\Delta_2,$$

$$z_{p_3}=p_3\Delta_3,\ \Delta_s=\frac{2\pi}{2Mp_s+1},\ p_s=\overline{-Mp_s, Mp_s},$$

$Mp_s=M_s+1$, $s=\overline{1,3}$, в області $D=(-\pi,\pi)^3$, які мали б нову, порівняно з “класичними” дискретно-неперервними та дискретними тривимірними операторами $F\&H$ властивість – можливість забезпечувати більш якісні характеристики точності, порівняно з “класичними” тривимірними дискретно-неперервними та дискретними операторами $F\&H$ (при однаковій кількості вузлів).

1. Вирішення проблеми

Під фінітними операторами $F\&H$ ми розуміємо оператори $F\&H$ від фінітної функції. Не зменшуючи загальності, ми вважаємо, що носій цих функції $supp\ f(x,y,z)=C^r(D),\ D=[-\pi,\pi]^3$ та $supp\, Z^{F\backslash H}(u,v,t)=C^r(D)$, $D=[-\pi,\pi]^3$. Хай $f(x,y,z)\in C^r(D)\bigcap L_p(D)$, $r=1,2,3..;\ p=1,2$ задовольняє вимогам тривимірної теореми Найквіста [11]. (Умова 1). Областю визначення дискретизованої функції $f(x_{p_1}, y_{p_2}, z_{p_3})$ є вузли прямокутної сітки $S(x_{p_1}, y_{p_2}, z_{p_3})$, $x_{p_1}=p_1\Delta_1$, $y_{p_2}=p_2\Delta_2$, $z_{p_3}=p_3\Delta_3$, $\Delta_s=\frac{2\pi}{2Mp_s+1}$, $p_s=\overline{-Mp_s, Mp_s}$, $s=\overline{1,3}$, в області $D=(-\pi,\pi)^3$. (Умова 2). Для подальшого застосування умови 1 та 2 позначимо як умову "V".

Для наближеного обчислення коефіцієнтів тривимірних фінітних дискретно-неперервних та дискретних операторів перетворень $F\&H$ комплексної функції дійсного аргумента $f(x,y,z)=$ $=\mathrm{Re}\, f(x,y,z)+j\,\mathrm{Im}\, f(x,y,z),\ f(x,y,z)\in L_2(D)$, $D=[-\pi,\pi]^3$, для якої виконується умова "V":

$$a_{N,k_1,k_2,k_3}^{F\backslash H,3d}(f)=\frac{1}{8\pi^3}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x,y,z)\times$$
$$\times\left\{\begin{matrix}\exp\left[-j(k_1x+k_2y+k_3z)\right]\\ cas(k_1x+k_2y+k_3z)\end{matrix}\right\}dx\,dy\,dz, \qquad (3)$$

$$N=\{N_s\},\ k_s=\overline{-N_s, N_s},\ s=\overline{1,3},$$

в тривимірних сумах $F\&H$:

$$S_N^{F\backslash H,3d}(u,v,t)=\sum_{k_1=-N_1}^{N_1}\sum_{k_2=-N_2}^{N_2}\sum_{k_3=-N_3}^{N_3} a_{N,k_1,k_2,k_3}^{F\backslash H,3d}(f)\times$$
$$\times\left\{\begin{matrix}\exp\left[j(k_1u+k_2v+k_3t)\right]\\ cas(k_1u+k_2v+k_3t)\end{matrix}\right\},$$

послідовно до кожної змінної $f(x,y,z)$ застосовуємо підхід Файлона, сформульований в [3] і модифікований в [12]. При цьому ми замінюємо в (3) $f(x,y,z)$ тривимірним В-сплайном третього степеня. Внаслідок цього отримуємо наближення $a_{N,k_1,k_2}^{F\backslash H,3d}(f)$ функціоналом [13]:

$$b3_{M,N,k_1,k_2,k_3}^{F\backslash H,3d,Sp3}(f)=\frac{1}{8\pi^3}\sum_{p_1=-Mp_1}^{Mp_1}\int_{(p_1-2)\Delta_1}^{(p_1+2)\Delta_1} h3(x,p_1\Delta_1)\times$$
$$\times\sum_{p_2=-Mp_2}^{Mp_2}\int_{(p_2-2)\Delta_2}^{(p_2+2)\Delta_2} h3(y,p_2\Delta_2)\times$$
$$\times\sum_{p_3=-Mp_3}^{Mp_3} R_{p_1,p_2,p_3}^{3d,Sp3}(f)\int_{(p_3-2)\Delta_3}^{(p_3+2)\Delta_3} h3(z,p_3\Delta_3)\times$$
$$\times\left\{\begin{matrix}\exp\left[-j(k_1x+k_2y+k_3z)\right]\\ cas(k_1x+k_2y+k_3z)\end{matrix}\right\}dx\,dy\,dz, \qquad (4)$$

де [4]: $R^{3d,\,Sp3}_{p_1,p_2,p_3}(f)=C^{3d,\,Sp3}_{1}f(x_{p_1},y_{p_2},z_{p_3})+$

$$+C^{3d,\,Sp3}_{2}\Big[f(x_{p_1},y_{p_2},z_{p_3-1})+f(x_{p_1},y_{p_2},z_{p_3+1})+ +f(x_{p_1},y_{p_2-1},z_{p_3})+f(x_{p_1},y_{p_2+1},z_{p_3})+ +f(x_{p_1-1},y_{p_2},z_{p_3})+f(x_{n_1+1},y_{p_2},z_{p_3})\Big]+$$

$$+C^{3d,\,Sp3}_{3}\Big[f(x_{p_1-1},y_{p_2-1},z_{p_3})+f(x_{p_1-1},y_{p_2+1},z_{p_3}) +f(x_{p_1+1},y_{p_2-1},z_{p_3})+f(x_{p_1+1},y_{p_2+1},z_{p_3})+ +f(x_{p_1},y_{p_2-1},z_{p_3-1})+f(x_{p_1},y_{p_2-1},z_{p_3+1})+ +f(x_{p_1},y_{p_2+1},z_{p_3-1})+f(x_{p_1},y_{p_2+1},z_{p_3+1})+ +f(x_{p_1-1},y_{p_2},z_{p_3-1})+f(x_{p_1-1},y_{p_2},z_{p_3+1})+ +f(x_{p_1+1},y_{p_2},z_{p_3-1})+f(x_{p_1+1},y_{p_2},z_{p_3+1})\Big]+$$

$$+C^{3d,\,Sp3}_{4}\Big[f(x_{p_1-1},y_{p_2-1},z_{p_3-1})+ +f(x_{p_1-1},y_{p_2-1},z_{p_3+1})+f(x_{p_1-1},y_{p_2+1},z_{p_3-1})+ +f(x_{p_1-1},y_{p_2+1},z_{p_3+1})+f(x_{p_1+1},y_{p_2-1},z_{p_3-1})+ +f(x_{p_1+1},y_{p_2-1},z_{p_3+1})+f(x_{p_1+1},y_{p_2+1},z_{p_3-1})+ +f(x_{p_1+1},y_{p_2+1},z_{p_3+1})\Big];\ C^{3d,\,Sp3}_{1}=\frac{64}{27},$$

$$C^{3d,\,Sp3}_{2}=-\frac{8}{27},\ C^{3d,\,Sp3}_{3}=\frac{1}{27},\ C^{3d,\,Sp3}_{4}=-\frac{1}{216};$$

$$h3(x,p,\Delta)=$$

$$=\frac{1}{6}\begin{cases}0,\ x\le x_{p-2};\\ t^3,\ x_{p-2}<x\le x_{p-1},\ t=(x-x_{p-2})/\Delta;\\ 1+3t+3t^2(1-t),\ x_{p-1}<x\le x_p,\ t=(x-x_{p-1})/\Delta;\\ 1+3(1-t)+3t(1-t)^2,\ x_p<x\le x_{p+1},\ t=(x-x_p)/\Delta;\\ (1-t)^3,\ x_{p+1}<x\le x_{p+2},\ t=(x-x_{p+1})/\Delta;\\ 0,\ x>x_{p+2},\ p=-(M+1),-M,..-1,0,1,...,M,\ (M+1).\end{cases}$$

Обчисливши функціонал (4), отримуємо:

$$b3^{F\backslash H,\,3d,\,Sp3}_{M,N,k_1,k_2,k_3}(f)=$$

$$=\Big[B1^{F\backslash H,3d,\,Sp3}_{M,N,k_1,k_2,k_3}(f),(k_1\ne0)\wedge(k_2\ne0)\wedge(k_3\ne0)\Big]\vee$$
$$\vee\Big[B2^{F\backslash H,3d,Sp3}_{M,N,k_1,k_2,0}(f),(k_1\ne0)\wedge(k_2\ne0)\wedge(k_3=0)\Big]\vee$$
$$\vee\Big[B3^{F\backslash H,3d,Sp3}_{M,N,k_1,0,k_3}(f),(k_1\ne0)\wedge(k_2=0)\wedge(k_3\ne0)\Big]\vee$$
$$\vee\Big[B4^{F\backslash H,3d,Sp3}_{M,N,0,k_2,k_3}(f),(k_1=0)\wedge(k_2\ne0)\wedge(k_3\ne0)\Big]\vee$$
$$\vee\Big[B5^{F\backslash H,3d,Sp3}_{M,N,k_1,0,0}(f),(k_1\ne0)\wedge(k_2=0)\wedge(k_3=0)\Big]\vee$$
$$\vee\Big[B6^{F\backslash H,3d,Sp3}_{M,N,0,k_2,0}(f),(k_1=0)\wedge(k_2\ne0)\wedge(k_3=0)\Big]\vee$$
$$\vee\Big[B7^{F\backslash H,3d,Sp3}_{M,N,0,0,k_3}(f),(k_1=0)\wedge(k_2=0)\wedge(k_3\ne0)\Big]\vee$$
$$\vee\Big[B8^{F\backslash H,3d,Sp3}_{M,N,0,0,0}(f),(k_1=0)\wedge(k_2=0)\wedge(k_3=0)\Big],\quad(5)$$

де $B1^{F\backslash H,3d,\,Sp3}_{M,N,k_1,k_2,k_3}(f)=Q_3(1)Q_3(2)Q_3(3)\times$

$$\times\sum_{p_1=-Mp_1}^{Mp_1}\sum_{p_2=-Mp_2}^{Mp_2}\sum_{p_3=-Mp_3}^{Mp_3}R^{3d,\,Sp3}_{p_1,p_2,p_3}(f)\times\left[\exp\left(-j\sum_{s=1}^{3}p_sk_s\Delta_s\right)\backslash cas\left(\sum_{s=1}^{3}p_sk_s\Delta_s\right)\right],$$

$$B2^{F\backslash H,3d,Sp3}_{M,N,k_1,k_2,0}(f)=Q_3(1)Q_3(2)e_3\times$$
$$\times\sum_{p_1=-Mp_1}^{Mp_1}\sum_{p_2=-Mp_2}^{Mp_2}\sum_{p_3=-Mp_3}^{Mp_3}R^{3d,\,Sp3}_{p_1,p_2,p_3}(f)\times\left[\exp\left(-j\sum_{s=1}^{2}p_sk_s\Delta_s\right)\backslash cas\left(\sum_{s=1}^{2}p_sk_s\Delta_s\right)\right],$$

$$B3^{F\backslash H,3d,Sp3}_{M,N,k_1,0,k_3}(f)=Q_3(1)e_2Q_3(3)\times$$
$$\times\sum_{p_1=-Mp_1}^{Mp_1}\sum_{p_2=-Mp_2}^{Mp_2}\sum_{p_3=-Mp_3}^{Mp_3}R^{3d,\,Sp3}_{p_1,p_2,p_3}(f)\times\left[\exp\left(-j\sum_{\substack{s=1\\ s\ne2}}^{3}p_sk_s\Delta_s\right)\backslash cas\left(\sum_{\substack{s=1\\ s\ne2}}^{3}p_sk_s\Delta_s\right)\right],$$

$$B4^{F\backslash H,3d,Sp3}_{M,N,0,k_2,k_3}(f)=e_1Q_3(2)Q_3(3)\times$$
$$\times\sum_{p_1=-Mp_1}^{Mp_1}\sum_{p_2=-Mp_2}^{Mp_2}\sum_{p_3=-Mp_3}^{Mp_3}R^{3d,\,Sp3}_{p_1,p_2,p_3}(f)\times\left[\exp\left(-j\sum_{s=2}^{3}p_sk_s\Delta_s\right)\backslash cas\left(\sum_{s=2}^{3}p_sk_s\Delta_s\right)\right],$$

$$B5^{F\backslash H,3d,Sp3}_{M,N,k_1,0,0}(f)=Q_3(1)e_2e_3\times$$
$$\times\sum_{p_1=-Mp_1}^{Mp_1}\sum_{p_2=-Mp_2}^{Mp_2}\sum_{p_3=-Mp_3}^{Mp_3}R^{3d,\,Sp3}_{p_1,p_2,p_3}(f)\begin{bmatrix}\exp(-j\,p_1k_1\Delta_1)\\ cas\,(p_1k_1\Delta_1)\end{bmatrix},$$

$$B6^{F\backslash H,3d,Sp3}_{M,N,0,k_2,0}(f)=e_1Q_3(2)e_3\times$$
$$\times\sum_{p_1=-Mp_1}^{Mp_1}\sum_{p_2=-Mp_2}^{Mp_2}\sum_{p_3=-Mp_3}^{Mp_3}R^{3d,\,Sp3}_{p_1,p_2,p_3}(f)\begin{bmatrix}\exp(-j\,p_2k_2\Delta_2)\\ cas\,(p_2k_2\Delta_2)\end{bmatrix},$$

$$B7_{M,N,0,0,k_3}^{F\backslash H,3d,Sp3}(f)=e_1 e_2 Q_3(3)\times$$

$$\times\sum_{p_1=-Mp_1}^{Mp_1}\sum_{p_2=-Mp_2}^{Mp_2}\sum_{p_3=-Mp_3}^{Mp_3}R_{p_1,p_2,p_3}^{3d,Sp3}(f)\begin{bmatrix}\exp(-j\,p_3 k_3\Delta_3)\\ cas\,(p_3 k_3\Delta_3)\end{bmatrix},$$

$$B8_{M,N,0,0,0}^{F\backslash H,3d,Sp3}(f)=e_1 e_2 e_3\times$$

$$\times\sum_{p_1=-Mp_1}^{Mp_1}\sum_{p_2=-Mp_2}^{Mp_2}\sum_{p_3=-Mp_3}^{Mp_3}R_{p_1,p_2,p_3}^{3d,Sp3}(f),$$

$$Q_3(s)=\frac{\cos(2k_s\Delta_s)-4\cos(k_s\Delta_s)+3}{\pi(\Delta_s)^3(k_s)^4},$$

$$N_s\le Mp_s,\ \Delta_s=2\pi e_s,\ e_s=\frac{1}{2Mp_s+1},$$

$$k_s=\overline{-N_s,N_s},\ s=\overline{1,3}.$$

Оператори тривимірних фінітних дискретно-неперервних перетворень $F\&H$, побудовані на прямокутній сітці на основі методу Файлона та B-сплайну третього степеня мають вигляд:

$$L_{M,N}^{F\backslash H,3d,Sp3}(f)=$$

$$=\sum_{k_1=-N_1}^{N_1}\sum_{k_2=-N_2}^{N_2}\sum_{k_3=-N_3}^{N_3}b_{M,N,k_1,k_2,k_3}^{F\backslash H,3d,\mathrm{Sp}3}(f)\times$$

$$\times\begin{Bmatrix}\exp\left[\,j(k_1x+k_2y+k_3z)\right]\\ cas(k_1x+k_2y+k_3z)\end{Bmatrix},$$

$$N_s\le Mp_s,\ s=\overline{1,3}, \tag{6}$$

де $(x,y,z)\in D$, $b_{M,N,k_1,k_2,k_3}^{F\backslash H,3d,Sp3}(f)$ визначено в (5). При застосуванні (6) враховуємо вимоги тривимірної теореми дискретизації [11] для вибору необхідних Mp_1, Mp_2, Mp_3 для даної функції $f(x,y,z)$.

Оператори тривимірних фінітних дискретних перетворень $F\&H$, побудовані на прямокутній сітці на основі методу Файлона та B-сплайну третього степеня отримуємо з (6), замінивши неперервні x,y,z на їх відповідні дискретні значення :

$$L_{M,N}^{F\backslash H,3d,Sp3}\left[f(x_{p_1},y_{p_2},z_{p_3})\right]=$$

$$=\sum_{k_1=-N_1}^{N_1}\sum_{k_2=-N_2}^{N_2}\sum_{k_3=-N_3}^{N_3}b_{M,N,k_1,k_2}^{F\backslash H,3d,Sp3}(f)\times$$

$$\times\left[\exp\left(j\sum_{s=1}^{3}k_s p_s\Delta_s\right)\backslash cas\left(\sum_{s=1}^{3}k_s p_s\Delta_s\right)\right], \tag{7}$$

$$p_s=\overline{-Mp_s,Mp_s},\ s=\overline{1,3}.$$

При застосуванні (7) враховуємо вимоги тривимірної теореми дискретизації.

Теорема 1. Оператори тривимірних перетворень $F\&H$, побудовані на прямокутній сітці на основі методу Файлона обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій та B-сплайну третього степеня, якщо $f(x,y,z)$ задовольняє умову "V", мають властивості:

$$L_{M,N}^{F,3d,Sp3}(f)=L_{M,N}^{H,3d,Sp3}(f). \tag{8}$$

Доведення виконується безпосереднім обчисленням.

Теорема 2. Оператори тривимірних дискретно-неперервних перетворень $F\&H$, побудовані на прямокутній сітці на основі методу Файлона обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій та B-сплайну третього степеня, якщо $f(x,y,z)$ задовольняє умову "V":

$$U_{M,N}^{F\backslash H,3d,Sp3}(f)=$$

$$=\sum_{k_1=-N_1}^{N_1}\sum_{k_2=-N_2}^{N_2}\sum_{k_3=-N_3}^{N_3}g_{M,N,k_1,k_2,k_3}^{F\backslash H,3d,Sp3}(f)\times$$

$$\times\begin{Bmatrix}\exp\left[\,j(k_1x+k_2y+k_3z)\right]\\ cas(k_1x+k_2y+k_3z)\end{Bmatrix}, \tag{9}$$

$$N_s\le Mp_s,\ s=\overline{1,3},\ (x,y,z)\in\Re,$$

де $g_{M,N,k_1,k_2,k_3}^{F\backslash H,3d,Sp3}(f)=$

$$=\left[G1_{M,N,k_1,k_2,k_3}^{F\backslash H,3d,Sp3}(f),(k_1\ne0)\wedge(k_2\ne0)\wedge(k_3\ne0)\right]\vee$$

$$\vee\left[G2_{M,N,k_1,k_2,0}^{F\backslash H,3d,Sp3}(f),(k_1\ne0)\wedge(k_2\ne0)\wedge(k_3=0)\right]\vee$$

$$\vee\left[G3_{M,N,k_1,0,k_3}^{F\backslash H,3d,Sp3}(f),(k_1\ne0)\wedge(k_2=0)\wedge(k_3\ne0)\right]\vee$$

$$\vee\left[G4_{M,N,0,k_2,k_3}^{F\backslash H,3d,Sp3}(f),(k_1=0)\wedge(k_2\ne0)\wedge(k_3\ne0)\right]\vee$$

$$\vee\left[G5_{M,N,k_1,0,0}^{F\backslash H,3d,Sp3}(f),(k_1\neq 0)\wedge(k_2=0)\wedge(k_3=0)\right]\vee$$
$$\vee\left[G6_{M,N,0,k_2,0}^{F\backslash H,3d,Sp3}(f),(k_1=0)\wedge(k_2\neq 0)\wedge(k_3=0)\right]\vee$$
$$\vee\left[G7_{M,N,0,0,k_3}^{F\backslash H,3d,Sp3}(f),(k_1=0)\wedge(k_2=0)\wedge(k_3\neq 0)\right]\vee$$
$$\vee\left[G8_{M,N,0,0,0}^{F\backslash H,3d,Sp3}(f),(k_1=0)\wedge(k_2=0)\wedge(k_3=0)\right],\quad(10)$$

$$G1_{M,N,k_1,k_2,k_3}^{F\backslash H,3d,Sp3}(f)=\overline{Q_3(1)}\,\overline{Q_3(2)}\,\overline{Q_3(3)}\times$$
$$\times\sum_{p_1=-Mp_1}^{Mp_1}\sum_{p_2=-Mp_2}^{Mp_2}\sum_{p_3=-Mp_3}^{Mp_3}R_{p_1,p_2,p_3}^{3d,Sp3}(f)\times$$
$$\times\left[\exp\left(-j\sum_{s=1}^{3}p_sk_s\Delta_s\right)\backslash cas\left(\sum_{s=1}^{3}p_sk_s\Delta_s\right)\right],$$

$$G2_{M,N,k_1,k_2,0}^{F\backslash H,3d,Sp3}(f)=\overline{Q_3(1)}\,\overline{Q_3(2)}\,e_3\times$$
$$\times\sum_{p_1=-Mp_1}^{Mp_1}\sum_{p_2=-Mp_2}^{Mp_2}\sum_{p_3=-Mp_3}^{Mp_3}R_{p_1,p_2,p_3}^{3d,Sp3}(f)\times$$
$$\times\left[\exp\left(-j\sum_{s=1}^{2}p_sk_s\Delta_s\right)\backslash cas\left(\sum_{s=1}^{2}p_sk_s\Delta_s\right)\right],$$

$$G3_{M,N,k_1,0,k_3}^{F\backslash H,3d,Sp3}(f)=\overline{Q_3(1)}\,e_2\,\overline{Q_3(3)}\times$$
$$\times\sum_{p_1=-Mp_1}^{Mp_1}\sum_{p_2=-Mp_2}^{Mp_2}\sum_{p_3=-Mp_3}^{Mp_3}R_{p_1,p_2,p_3}^{3d,Sp3}(f)\times$$
$$\times\left[\exp\left(-j\sum_{\substack{s=1\\ s\neq 2}}^{3}p_sk_s\Delta_s\right)\backslash cas\left(\sum_{\substack{s=1\\ s\neq 2}}^{3}p_sk_s\Delta_s\right)\right],$$

$$G4_{M,N,0,k_2,k_3}^{F\backslash H,3d,Sp3}(f)=e_1\,\overline{Q_3(2)}\,\overline{Q_3(3)}\times$$
$$\times\sum_{p_1=-Mp_1}^{Mp_1}\sum_{p_2=-Mp_2}^{Mp_2}\sum_{p_3=-Mp_3}^{Mp_3}R_{p_1,p_2,p_3}^{3d,Sp3}(f)\times$$
$$\times\left[\exp\left(-j\sum_{s=2}^{3}p_sk_s\Delta_s\right)\backslash cas\left(\sum_{s=2}^{3}p_sk_s\Delta_s\right)\right],$$

$$G5_{M,N,k_1,0,0}^{F\backslash H,3d,Sp3}(f)=\overline{Q_3(1)}\,e_2\,e_3\times$$
$$\times\sum_{p_1=-Mp_1}^{Mp_1}\sum_{p_2=-Mp_2}^{Mp_2}\sum_{p_3=-Mp_3}^{Mp_3}R_{p_1,p_2,p_3}^{3d,Sp3}(f)\begin{bmatrix}\exp(-j\,p_1k_1\Delta_1)\\ cas\,(p_1k_1\Delta_1)\end{bmatrix},$$

$$G6_{M,N,0,k_2,0}^{F\backslash H,3d,Sp3}(f)=e_1\,\overline{Q_3(2)}\,e_3\times$$
$$\times\sum_{p_1=-Mp_1}^{Mp_1}\sum_{p_2=-Mp_2}^{Mp_2}\sum_{p_3=-Mp_3}^{Mp_3}R_{p_1,p_2,p_3}^{3d,Sp3}(f)\begin{bmatrix}\exp(-j\,p_2k_2\Delta_2)\\ cas\,(p_2k_2\Delta_2)\end{bmatrix},$$

$$G7_{M,N,0,0,k_3}^{F\backslash H,3d,Sp3}(f)=e_1\,e_2\,\overline{Q_3(3)}\times$$
$$\times\sum_{p_1=-Mp_1}^{Mp_1}\sum_{p_2=-Mp_2}^{Mp_2}\sum_{p_3=-Mp_3}^{Mp_3}R_{p_1,p_2,p_3}^{3d,Sp3}(f)\begin{bmatrix}\exp(-j\,p_3k_3\Delta_3)\\ cas\,(p_3k_3\Delta_3)\end{bmatrix},$$

$$G8_{M,N,0,0,0}^{F\backslash H,3d,Sp3}(f)=$$
$$=e_1e_2e_3\sum_{p_1=-Mp_1}^{Mp_1}\sum_{p_2=-Mp_2}^{Mp_2}\sum_{p_3=-Mp_3}^{Mp_3}R_{p_1,p_2,p_3}^{3d,Sp3}(f),$$

$$\overline{Q_3(s)}=\frac{3}{(2Mp_s+1)\left[4-\cos(k_s,\Delta_s)\right]},\ N_s\leq Mp_s,\infty$$

$$\Delta_s=2\pi e_s,\ e_s=\frac{1}{2Mp_s+1},\ k_s=\overline{-Mp_s,Mp_s},\ s=\overline{1,3},$$

отримані як результат обчислення функціоналу [13]:

$$g_{M,N,k_1,k_2,k_3}^{F\backslash H,3d,Sp3}(f)=$$
$$=\frac{b3_{M,N,k_1,k_2,k_3}^{F\backslash H,3d,Sp3}(f)}{b3_{M,N,k_1,k_2,k_3}^{F\backslash H,3d,Sp3}\begin{Bmatrix}\exp\left[j(k_1x+k_2y+k_3z)\right]\\ cas(k_1x+k_2y+k_3z)\end{Bmatrix}},$$

де функціонал $b3_{M,N,k_1,k_2,k_3}^{F\backslash H,3d,Sp3}(\circ)$ визначається (4), мають властивості:

$$U_{M,N}^{F,3d,Sp3}(f)=U_{M,N}^{H,3d,Sp3}(f).\qquad(11)$$

Доведення виконується безпосереднім обчисленням.

Теорема 3. Оператори $U_{M,N}^{F\backslash H,3d,Sp3}(f)$ тривимірних дискретно-неперервних перетворень $F\&H$, побудовані на основі методу Файлона обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій та B-сплайну третього степеня, якщо $f(x,y,z)$ задовольняє умову "V", а також $f(x,y,z)\in T_N$, $N=\{N_s\}$, $s=\overline{1,3}$, де T_N є множина тригонометричних поліномів степеня N, при $N=Mp$ мають властивості:

$$U_{Mp,Mp}^{F\backslash H,3d,Sp3}(f)=f,\qquad(12)$$

тобто є точні на тригонометричних поліномах заданого степеня в області $D=(-\pi, \pi)^3$.

Доведення виконується безпосереднім обчисленням.

Оператори трьохвимірних фінітних дискретних перетворень $F\&H$ на прямокутній сітці на основі методу Файлона та B-сплайну третього степеня, точні на тригонометричних поліномах заданого степеня, отримуємо з (11) замінивши неперервні x, y, z на їх відповідні дискретні значення:

$$U_{Mp,\,Mp}^{F\backslash H,3d,Sp3}\left[f(x_{p_1}, y_{p_2}, z_{p_3})\right]=$$

$$\times\left[\exp\left(j\sum_{s=1}^{3} k_s p_s \Delta_s\right)\backslash cas\left(\sum_{s=1}^{3} k_s p_s \Delta_s\right)\right], \quad (13)$$

$$p_s=\overline{-Mp_s, Mp_s},\ s=\overline{1,3}.$$

При застосуванні (13) враховуємо вимоги тривимірної теореми дискретизації для вибору необхідних Mp_s, $s=\overline{1,3}$ для даної функції $f(x, y, z)$.

Теорема 4. Оператори $U_{M,N}^{F\backslash H,3d,Sp3}(f)$ тривимірних дискретних перетворень $F\&H$, побудовані на прямокутній сітці на основі методу Файлона обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій та B-сплайну третього степеня точні на тригонометричних поліномах заданого степеня, якщо $f(x, y, z)$ задовольняє умову "V", мають властивості:

$$U_{M,N}^{F\backslash H,3d,Sp3}\left[f(x_{p_1}, y_{p_2}, z_{p_3})\right]=f(x_{p_1}, y_{p_2}, z_{p_3}),$$

$$p_s=\overline{-Mp_s, Mp_s},\ s=\overline{1,3}. \quad (14)$$

Доведення виконується безпосереднім обчисленням.

Для наступного застосування скористаємося теоремами 3, 4 [14, с. 185], з урахуванням яких маємо:

Теорема 5. Для операторів тривимірних перетворень $F\&H$, побудованих на прямокутній сітці на основі методу Файлона обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій та B-сплайну третього степеня, якщо $f(x, y, z)$ задовольняє умову "V", в області $D=(-\pi, \pi)^3$ виконується наступне:

$$u_{Mp,\,Mp,\left[\begin{smallmatrix}\Omega(n)\\ \Psi(n)\end{smallmatrix}\right]}^{F,3d,Sp3}(f)=\left(\frac{1\mp j}{2}\right)u_{Mp,\,Mp,\left[\begin{smallmatrix}\Omega(n)\\ \Psi(n)\end{smallmatrix}\right]}^{H,3d,Sp3}(f)+$$

$$+\left(\frac{1\pm j}{2}\right)u_{Mp,\,Mp,\left[\begin{smallmatrix}\Psi(n)\\ \Omega(n)\end{smallmatrix}\right]}^{H,3d,Sp3}(f), \quad (15)$$

$$u_{Mp,\,Mp,(\circ),(\circ),(\circ)}^{F\backslash H,3d,Sp3}(f)=$$

$$=\left\{b_{Mp,\,Mp,(\circ),(\circ),(\circ)}^{F\backslash H,3d,Sp3}(f),\ g_{Mp,\,Mp,(\circ),(\circ),(\circ)}^{F\backslash H,3d,Sp3}(f)\right\},$$

$$\Omega(n)=\left\{\begin{array}{l}(-k_1,0,0)_0,(0,-k_2,0)_1,(0,0,-k_3)_2,\\ (-k_1,-k_2,0)_3,\ (0,-k_2,-k_3)_4,\\ (-k_1,+k_2,0)_5,\ (-k_1,-k_2,-k_3)_6,\\ (-k_1,+k_2,+k_3)_7,\ (-k_1,-k_2,+k_3)_8,\\ (-k_1,+k_2,-k_3)_9,\ (-k_1,0,-k_3)_{10},\\ (-k_1,0,+k_3)_{11},\ (0,-k_2,+k_3)_{12},\\ (0,-k_2,+k_3)_{13};\end{array}\right\}$$

$$\Psi(n)=\left\{\begin{array}{l}(+k_1,0,0)_0,,(0,+k_2,0)_1,(0,0,+k_3)_2,\\ (+k_1,+k_2,0)_3,\ (0,+k_2,+k_3)_4,\\ (+k_1,-k_2,0)_5,\ (+k_1,+k_2,+k_3)_6,\\ (+k_1,-k_2,-k_3)_7,\ (+k_1,+k_2,-k_3)_8,\\ (+k_1,-k_2,+k_3)_9,\ (+k_1,0,+k_3)_{10},\\ (+k_1,0,-k_3)_{11},(0,+k_2,-k_3)_{12},\\ (0,+k_2,-k_3)_{13};\end{array}\right\}$$

$$n=\overline{0,13},\ k_s=\overline{1, Mp_s},\ s=\overline{1,3}.$$

Доведення отримуємо при застосуванні до $u_{Mp,\,Mp,(\circ),(\circ),(\circ)}^{F\backslash H,3d,Sp3}(f)$ теореми 3 [14, С.185].

Теорема 6. Для операторів тривимірних перетворень $F\&H$, побудованих на прямокутній сітці на основі методу Файлона обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій та B-сплайну третього степеня, якщо $f(x, y, z)$ задовольняє умову "V", в області $D=(-\pi, \pi)^3$ виконується наступне:

$$u_{Mp,\,Mp,\left[\begin{smallmatrix}\Omega(n)\\ \Psi(n)\end{smallmatrix}\right]}^{H,3d,Sp3}(f)=\left(\frac{1\pm j}{2}\right)u_{Mp,\,Mp,\left[\begin{smallmatrix}\Omega(n)\\ \Psi(n)\end{smallmatrix}\right]}^{F,3d,Sp3}(f)+$$

$$+\left(\frac{1\mp j}{2}\right)u_{Mp,\,Mp,\left[\begin{smallmatrix}\Psi(n)\\ \Omega(n)\end{smallmatrix}\right]}^{F,3d,Sp3}(f), \quad (16)$$

$$u_{Mp,\,Mp,(\circ),(\circ),(\circ)}^{F\backslash H,3d,Sp3}(f)=$$

$$=\left\{b_{Mp,\,Mp,(\circ),(\circ),(\circ)}^{F\backslash H,3d,Sp3}(f),\ g_{Mp,\,Mp,(\circ),(\circ),(\circ)}^{F\backslash H,3d,Sp3}(f)\right\},$$

$$k_s = \overline{1,\ Mp_s}\ ,\ s = \overline{1,\ 3},\ \ n = \overline{0,\ 13}\ .$$

$\Omega(n)$ та $\Psi(n)$ визначаються в (15). Доведення отримуємо при застосуванні до $u^{F\backslash H,\ 3d,\ Sp3}_{Mp,\ Mp,\ (\circ),\ (\circ)}(f)$ теореми 4 [14, с. 185].

Тестовий приклад. В табл. 1 наведені результати обчислення оцінки приведених похибок наближення модуля функції

$$f(x,\ y,\ z) =$$
$$= \left[\cos(x)\sin(y)\sin(z) + j\sin(x)\cos(y)\cos(z)\right]\times$$
$$\times \exp\left[-(|x|+|y|+|z|)\right]$$

за допомогою розглянутих операторів.

Таблиця 1

Результати обчислення оцінки приведених похибок наближення модуля функції $f(x,\ y,\ z)$

Mp_1, Mp_2, Mp_3	$\max\_E2$	$\max\_e2$	$\max\_E3$	$\max\_e3$
4, 4, 4	0,3659	0,3800	1,5 E–15	0,4058
5, 5, 5	0,3191	0,3191	3,6 E–15	0,3872
6 , 6, 6	0,2802	0,2826	2,8 E–15	0,3679

В табл. 1 використанні наступні позначення:

$$\max\_e2 = \max_{\substack{-R_1 \le r \le R_1 \\ -R_2 \le s \le R_2 \\ -R_3 \le t \le R_3}} \left|\mu(x_r\ ,\ y_s\ ,\ z_t)\right| / \Theta\ ,$$

$$\max\_E2 = \max_{\substack{-Mp_1 \le r \le Mp_1 \\ -Mp_2 \le s \le Mp_2 \\ -Mp_3 \le t \le Mp_3}} \left|\mu(x_r\ ,\ y_s\ ,\ z_t)\right| / \Theta\ ,$$

$$\mu(x_r, y_s, z_t) = f(x_r, y_s, z_t) - L^{F\backslash H3d,\ Sp3}_{Mp_1, Mp_2, Mp_3} f(x_r, y_s, z_t)$$

$$\max\_e3 = \max_{\substack{-R_1 \le r \le R_1 \\ -R_2 \le s \le R_2 \\ -R_3 \le t \le R_3}} \left|\lambda(x_r, y_s, z_t)\right| / \Theta,$$

$$\max\_E3 = \max_{\substack{-Mp_1 \le r \le Mp_1 \\ -Mp_2 \le s \le Mp_2 \\ -Mp_3 \le t \le Mp_3}} \left|\lambda(x_r, y_s, z_t)\right| / \Theta,$$

$$\lambda(x_r\ ,\ y_s\ ,\ z_t) = f(x_r\ ,\ y_s\ ,\ z_t) -$$

$$-U^{F\backslash H3d,\ Sp3}_{Mp_1, Mp_2, Mp_3} f(x_r\ ,\ y_s\ ,\ z_t),\ Mp = \left\{Mp_s\right\},$$

$$\Theta = \max_{\substack{-R_1 \le r \le R_1 \\ -R_2 \le s \le R_2 \\ -R_3 \le t \le R_3}} \left|f(x_r, y_s, z_t)\right|,\ R = \left\{R_s\right\},\ R_s = k\,Mp_s, s = \overline{1,\ 3},$$

де $k = 5$ – кількість інтервалів інтерполяції.

Висновки

1. Побудовано оператори тривимірних дискретно-неперервних та оператори тривимірних дискретних перетворень $F\&H$ на прямокутній сітці на основі методу Файлона обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій та B-сплайну третього степеня (5), (6), (7). Визначено їх властивості (8).

2. Побудовано оператори тривимірних дискретно-неперервних та оператори тривимірних дискретних перетворень $F\&H$ на прямокутній сітці на основі методу Файлона обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій та B-сплайну третього степеня, точні на тригонометричних поліномах заданого степеня (9), (10), (13). Визначено їх властивості (11), (12), (14).

3. Наведено теореми, які визначають зв'язок між операторами $b^{F,\ 3d,\ Sp3}_{Mp,\ N,\ \Omega}(f)$ – $b^{H,\ 3d,\ Sp3}_{Mp,\ N,\ \Omega}(f)$, та $g^{F,\ 3d,\ Sp3}_{Mp,\ N,\ \Omega}(f)$ – $g^{H,\ 3d,\ Sp3}_{Mp,\ N,\ \Omega}(f)$ – (15), (16).

4. Наведено тестовий приклад, який підтверджує отримані теоретичні твердження.

5. Отримані оператори доповнюють існуючий інструментарій інформаційних технологій в базисах $F\&H$.

6. Побудовані оператори $F\&H$ є подальшим розвитком методу Файлона [3] обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій.

Перспективи досліджень у даному напрямку автор вбачає у створені швидких алгоритмів обчислення запропонованих операторів $F\&H$ та їх застосуванні при вирішені деяких задач інформаційних технологій, наприклад, в авіаційних системах автоматичного управління та регулювання, які застосовують сигнальні методи; при досліджені об'єктів різноманітної фізичної природи за допомогою комп'ютерного моделювання елементів літальних апаратів, в радіотехніці при досліджені радіотехнічних систем на етапі їх проектування, у відомих непараметричних та параметричних методах спектрального оцінювання сигналів у цифровій обробці сигналів, у комп'ютерній діагностиці, у вимірювальній техніці при побудові комп'ютерних вимірювальних засобів, при побудові різноманітних систем криптографії тощо.

Література

1. Литвин О.М., Удовиченко В.М. Інструментарій інформаційних технологій в базисі Хартлі // Вестник Национального технического университета "ХПИ": Сб. научн. тр. – Х.: ХПИ, 2006. – Вып. 38. Тематический выпуск "Приборы и методы неразрушающего контроля". – С. 69-74.

2. Литвин О.М., Удовиченко В.М. Інструментарій інформаційних технологій в базисі Фур'є // Вестник Национального технического университета "ХПИ": Сб. научн. тр. – Х.: ХПИ, 2007. – Вып. 10. Тематический выпуск "Автоматика и приборостроение". – С. 119-127.

3. Filon L.N.G. On a quadrature formula for trigonometric integrals //Proc. Roy.Soc. Edinburgh. 1928. – P. 38-47.

4. Литвин О.М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування. – Х.: Основа, 2002. – 541 с.

5. Рабинер Л., Голд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. – М.: Мир, 1978. – 848 с.

6. Марпл-мл. С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. – М.: Мир, 1990. – 684 с.

7. Брейсуэлл Р. Преобразование Хартли. – М.: Мир, 1990. – 175 с.

8. Болд Э.Дж. Сравнение времени вычисления БПХ и БПФ // ТИИЭР. – 1985. – № 12. – С. 184-185.

9. Даджион Д., Мерсеро Р. Цифровая обработка многомерных сигналов. – М.: Мир, 1988. – 334 с.

10. Удовиченко В.Н. Точностные характеристики прямоугольного двумерного дискретного преобразования Фурье // Методы и микроэлектронные средства цифрового преобразования и обработки сигналов, SIAP-89. – Рига, 1989. – С. 204-206.

11. Отнес Р., Эноксон Л. Прикладной анализ временных рядов. – М.: Мир, 1982. – 428 с.

12. Литвин О.М., Удовиченко В.М. Оператори обчислення одновимірного фінітного дискретно-неперервного перетворення Хартлі на основі В-сплайнів третього степеня // Вестник Национального технического университета "ХПИ": Сб. научн. тр. – Х.: ХПИ, 2003. – Вып. 19. Тематический выпуск "Информатика и моделирование". – С. 95-100.

13. Балакришнан А.В. Прикладной функциональный анализ. – М.: Наука, 1980. – 383 с.

14. Удовиченко В.М. Оператори Фур'є та Хартлі, побудовані на основі методу Файлона та кубічних В-сплайнів, точні на тригонометричних поліномах заданого степеня // Вестник Национального технического университета "ХПІ": Сб. научн. тр. – Х.: ХПИ, 2007. – Вып. 19. Тематический выпуск "Информатика и моделирование". – С. 182-190.

Надійшла до редакції 5.11.2007

Рецензент: д-р техн. наук, проф. С.І. Кондрашов, Національний технічний університет "ХПІ", Харків.