УДК 621.371.322

И.П. ЗАИКИН, А.А. ТКАЧЕНКО

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского "ХАИ", Украина

ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА СИММЕТРИЧНОМ СОЕДИНЕНИИ ДВУХ КРУГЛЫХ ВОЛНОВОДОВ С ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ РЕЗОНАТОРОМ. ЧАСТЬ I. ПОСТАНОВКА И СТРОГОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Рассмотрена задача рассеяния H_φ- и E_φ- поляризованных электромагнитных волн на симметричном стыке двух круглых волноводов с цилиндрическим резонатором. Предложен метод строгого решения такой внутренней краевой задачи. Получены выражения для коэффициентов преобразования на структуре.

рассеяние, поляризация, аналитический метод, коэффициенты преобразования

Введение

Необходимость тщательного изучения распределения электромагнитных полей (ЭМП) в структурах с осевой симметрией связана с развитием телекоммуникационных систем связи, используемых в аэропортах, на летательных аппаратах, надводных и подводных кораблях и т.п. Количественный расчет ЭМП важен, с одной стороны, для обеспечения надежной радиосвязи, а с другой – для обеспечения безопасности жизнедеятельности, связанной с устранением зон повышенной напряженности поля.

Целью работы является строгое решение задачи рассеяния и численный расчет коэффициентов преобразования электромагнитных волн (ЭМВ) на симметричном соединении двух круглых волноводов и цилиндрического резонатора.

Формулирование проблемы. Решение задачи дифракции ЭМП на стыке круглых волноводов с цилиндрическим резонатором позволяет с помощью метода матричных операторов решить более сложную задачу о последовательном соединении нескольких таких стыков (отсеков в подводных лодках или космических аппаратах). Но сначала необходимо найти коэффициенты матрицы рассеяния (коэффициенты преобразования) на одиночной структуре. В конечном счете это позволит найти практическое решение актуальной задачи по крайней мере в двух направлениях:

– определения зон уверенного приема сигналов по всему объему сложной цилиндрической структуры;

– разработки рекомендаций по безопасному расположению персонала в связи с возможным возникновением зон повышенной напряженности поля, обусловленных интерференцией сигналов при многократном их отражении внутри структуры.

Многомодовые волноводные системы к настоящему времени изучены наименее полно. Это обусловлено самой природой процессов распространения и рассеяния волн в этих линиях передачи. Появление на неоднородностях тракта (стыках) распространяющихся волн высших типов привносит существенные трудности в экспериментальные исследования.

Широкое внедрение численных методов решения задач электродинамики, опирающихся на современную математическую базу и вычислительную технику, привело к качественным сдвигам в теории волноводов, заключающимся в создании эффективных математических моделей процессов распространения и рассеяния волн. Появилась принципиальная возможность исследования свойств узла заданной конфигурации во всем объеме изменения параметров путем замены натурного эксперимента вычислительным [1 – 4].

В частности, в [1] методом полуобращения решена задача дифракции симметричных, а в [2] – несимметричных ЭМВ на скачке поперечного сечения круглого волновода. В [3, 4] методом частичных областей решена задача дифракции ЭМВ на несимметричном соединении двух структур прямоугольного сечения. Этот же метод использован и в данном случае.

Рассмотрим структуру, показанную на рис. 1.

Положим, что круглые волноводы и отверстия связи имеют единичные радиусы (R = 1), тогда их периметры будут равны $\ell = 2\pi R = 2\pi$.

Радиус цилиндрического резонатора обозначим через θ, а его высоту h – через $2\pi r$, где r – некоторый малый параметр, равный $r = h/\ell$.

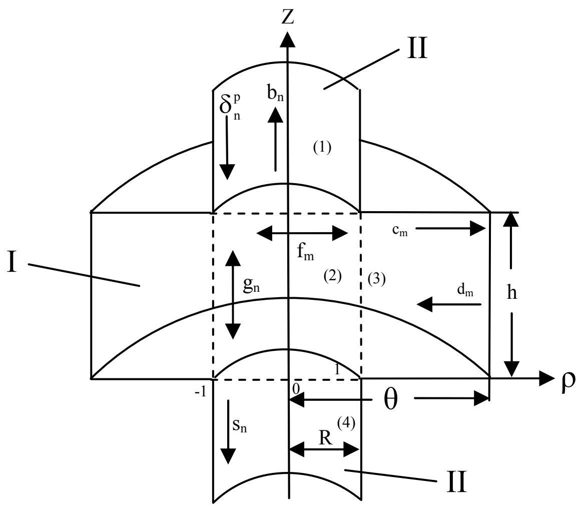

Рис. 1. Цилиндрический резонатор I
и связанные с ним через отверстия связи
круглые волноводы II

Области 1 и 4 на рис. 1 представляют собой регулярные участки волноводов, область 2 – нерегулярный, общий для волноводов и резонатора участок, область 3 – цилиндрический резонатор.

Пусть на соединение (рис. 1) со стороны области 1 (z > 0) набегают аксиально-симметричные электрические (или магнитные) волны порядка $\boldsymbol{p}$ единичной амплитуды ($a_n = \delta_n^p$, где δ_n^p – символ Кронекера). Тогда дифрагированное на соединении поле будет иметь вид набора волн, отраженных в область 1 и проникающих в область 2, а через нее – в области 3 и 4. Амплитуды дифрагированных волн обозначим через b_n (область 1), g_n, f_m (область 2), c_m, d_m (область 3) и s_n (область 4).

Зависимость от координаты z для волн, распространяющихся в круглых волноводах в направлениях $\pm z$, будем представлять в виде

$$\exp(\pm i \gamma_n z),$$

а зависимость от координаты ρ для цилиндрического резонатора в направлениях $\pm\rho$ – в виде

$$H_0^{(1)}(\Gamma_m \rho),\ H_0^{(2)}(\Gamma_m \rho)$$

соответственно, где

$$\gamma_n = \sqrt{æ^2 - j_{0n}^2} \text{ или } \gamma_n = \sqrt{æ^2 - j_{1n}^2} \qquad (1)$$

$$\Gamma_m = \sqrt{æ^2 - (m/2r)^2} \ – \qquad (2)$$

постоянные распространения в круглом и радиальном волноводах; $æ = kR = 2\pi/\lambda$ – безразмерное волновое число; j_{0n}, j_{1n} – поперечные волновые числа в круглом волноводе – корни уравнений $J_0(j_{0n}) = 0$ и $J_1(j_{1n}) = 0$; $m/2r$ – поперечные волновые числа в цилиндрическом резонаторе; $J_0(x)$ – функция Бесселя нулевого порядка; $H_0^{(1)}(x)$, $H_0^{(2)}(x)$ – функции Ханкеля нулевого порядка 1-го и 2-го рода.

Искомые поля должны удовлетворять следующим условиям [1]:

1) уравнениям Максвелла;

2) условиям непрерывности тангенциальных составляющих поля на границах частичных областей;

3) граничным условиям на металле;

4) условиям излучения, заключающимся в требовании отсутствия волн, приходящих из бесконечности, кроме $\boldsymbol{p}$-й волны в 1-м волноводе;

5) условиям конечности интеграла энергии

$$\int_v (\varepsilon |\vec{E}|^2 + \mu |\vec{H}|^2) dv < \infty$$

для любого конечного объема **v**, фактически определяющим характер особенностей поведения поля вблизи изломов границ (условиям на ребре [3]).

Однородность структуры по φ позволяет искать отдельно решения для волн, имеющих различную поляризацию в направлении распространения. Будем называть электрической такую волну, у которой φ-составляющая электрического поля тождественно равна нулю (H_φ-поляризация). Магнитной назовем волну, у которой только электрическое поле имеет отличную от нуля φ-составляющую (E_φ-поляризация).

Решение проблемы. H_φ-поляризация

Класс частных решений уравнений Максвелла будем искать с помощью электрического вектора Герца, выражения для которого в областях 1-4 структуры рис. 1 запишем в виде:

$$\Pi_E^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\delta_n^p e^{-i\gamma_n(z-2\pi r)} + b_n e^{i\gamma_n(z-2\pi r)}\right\} J_0(j_{0n}\rho);$$

$$\Pi_E^{(2)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m H_0^{(1)}(\Gamma_m) J_0(\Gamma_m\rho) e^{im(\frac{z}{2r}-\pi)} + \sum_{n=1}^{\infty} g_n H_0^{(1)}(j_{0n}) J_0(j_{0n}\rho)\left\{e^{i\gamma_n(2\pi r+z)} + e^{i\gamma_n(2\pi r-z)}\right\};$$

$$\Pi_E^{(3)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\left\{c_m \frac{H_0^{(1)}(\Gamma_m\rho)}{H_0^{(1)}(\Gamma_m)} + d_m \frac{H_0^{(2)}(\Gamma_m\rho)}{H_0^{(2)}(\Gamma_m)}\right\} e^{im(\frac{z}{2r}-\pi)}; \quad (3)$$

$$\Pi_E^{(4)} = \sum_{n=1}^{\infty} s_n H_0^{(1)}(j_{0n}) J_0(j_{0n}\rho) e^{-i\gamma_n z},$$

где $b_n, g_n, s_n \sim E_n^{(p)}$, $c_m, d_m, f_m \sim F_m^{(p)}$ – искомые элементы **p**-го столбца матрицы рассеяния на стыке.

Отличные от нуля составляющие поля определяются из уравнений Максвелла по формулам:

$$E_z = \left(æ^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Pi_E; \quad E_\rho = \frac{\partial^2}{\partial\rho\partial z}\Pi_E;$$

$$H_\varphi = i\,æ\frac{\partial}{\partial\rho}\Pi_E \quad (4)$$

и имеют вид:

– в области 1:

$$E_z^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} j_{0n}^2\left\{\delta_n^p e^{-i\gamma_n(z-2\pi r)} + b_n e^{i\gamma_n(z-2\pi r)}\right\} J_0(j_{0n}\rho);$$

$$E_\rho^{(1)} = i\sum_{n=1}^{\infty} j_{0n}\gamma_n\left\{\delta_n^p e^{-i\gamma_n(z-2\pi r)} - b_n e^{i\gamma_n(z-2\pi r)}\right\} J_1(j_{0n}\rho); \quad (5)$$

$$H_\varphi^{(1)} = -iæ\sum_{n=1}^{\infty} j_{0n}\left\{\delta_n^p e^{-i\gamma_n(z-2\pi r)} + b_n e^{i\gamma_n(z-2\pi r)}\right\} J_1(j_{0n}\rho);$$

– в области 2:

$$E_z^{(2)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m \Gamma_m^2 H_0^{(1)}(\Gamma_m) J_0(\Gamma_m\rho) e^{im(\frac{z}{2r}-\pi)} + \sum_{n=1}^{\infty} g_n j_{0n}^2 H_0^{(1)}(j_{0n}) J_0(j_{0n}\rho) \times \left\{e^{i\gamma_n(2\pi r+z)} + e^{i\gamma_n(2\pi r-z)}\right\};$$

$$E_\rho^{(2)} = -i\sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m \Gamma_m \frac{m}{2r} H_0^{(1)}(\Gamma_m) J_1(\Gamma_m\rho) e^{im(\frac{z}{2r}-\pi)} - i\sum_{n=1}^{\infty} g_n \gamma_n j_{0n} H_0^{(1)}(j_{0n}) J_1(j_{0n}\rho) \times \left\{e^{i\gamma_n(2\pi r+z)} - e^{i\gamma_n(2\pi r-z)}\right\}; \quad (6)$$

$$H_\varphi^{(2)} = -iæ\sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m \Gamma_m H_0^{(1)}(\Gamma_m) J_1(\Gamma_m\rho) e^{im(\frac{z}{2r}-\pi)} - iæ\sum_{n=1}^{\infty} g_n j_{0n} H_0^{(1)}(j_{0n}) J_1(j_{0n}\rho) \times \left\{e^{i\gamma_n(2\pi r+z)} + e^{i\gamma_n(2\pi r-z)}\right\},$$

где m = 0, 1, 2,…;

– в области 3:

$$E_z^{(3)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Gamma_m^2 \left\{ c_m \frac{H_0^{(1)}(\Gamma_m \rho)}{H_0^{(1)}(\Gamma_m)} + \right.$$

$$\left. + d_m \frac{H_0^{(2)}(\Gamma_m \rho)}{H_0^{(2)}(\Gamma_m)} \right\} e^{im(\frac{m}{2r} - \pi)}; \qquad (7)$$

$$E_\rho^{(3)} = -i \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Gamma_m \frac{m}{2r} \left\{ c_m \frac{H_0^{(1)}(\Gamma_m \rho)}{H_0^{(1)}(\Gamma_m)} + \right.$$

$$\left. + d_m \frac{H_0^{(2)}(\Gamma_m \rho)}{H_0^{(2)}(\Gamma_m)} \right\} e^{im(\frac{z}{2r} - \pi)};$$

$$H_\varphi^{(3)} = -i æ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Gamma_m \left\{ c_m \frac{H_1^{(1)}(\Gamma_m \rho)}{H_0^{(1)}(\Gamma_m)} + \right.$$

$$\left. + d_m \frac{H_1^{(2)}(\Gamma_m \rho)}{H_0^{(2)}(\Gamma_m)} \right\} e^{im(\frac{z}{2r} - \pi)}.$$

– в области 4:

$$E_z^{(4)} = \sum_{n=1}^{\infty} s_n j_{0n}^2 e^{-i\gamma_n z} H_0^{(1)}(j_{0n}) J_0(j_{0n}\rho);$$

$$E_\rho^{(4)} = i \sum_{n=1}^{\infty} s_n j_{0n} \gamma_n e^{-i\gamma_n z} H_0^{(1)}(j_{0n}) J_1(j_{0n}\rho); \qquad (8)$$

$$H_\varphi^{(4)} = -i æ \sum_{n=1}^{\infty} s_n j_{0n} e^{-i\gamma_n z} H_0^{(1)}(j_{0n}) J_1(j_{0n}\rho).$$

Для удовлетворения условий непрерывности необходимо также выполнение между амплитудами f_m промежуточной области 2 соотношения

$$f_m = f_{-m}. \qquad (9)$$

Из условия непрерывности $E_\rho^{(1)} = E_\rho^{(2)}$ при $z = 2\pi r$ следует

$$\sum_{n=1}^{\infty} j_{0n} \gamma_n \left\{ \delta_n^p - b_n + g_n H_0^{(1)}(j_{0n})(e_n^2 - 1) \right\} \times$$

$$\times J_1(j_{0n}\rho) = - \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m \frac{m}{2r} \Gamma_m H_0^{(1)}(\Gamma_m) J_1(\Gamma_m \rho),$$

а так как, с учетом соотношения (9),

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m \frac{m}{2r} \Gamma_m H_0^{(1)}(\Gamma_m) J_1(\Gamma_m \rho) \equiv 0,$$

получим связь между b_n и g_n:

$$b_n = \delta_n^p + g_n (e_n^2 - 1) H_0^1(j_{0n}), \qquad (10)$$

где $e_n^2 = e^{4i\gamma_n \pi r}$.

Из граничного условия $E_z^{(3)} = 0$ при $\rho = \theta$ имеем

$$c_m \frac{H_0^{(1)}(\Gamma_m \theta)}{H_0^{(1)}(\Gamma_m)} + d_m \frac{H_0^{(2)}(\Gamma_m \theta)}{H_0^{(2)}(\Gamma_m)} = 0,$$

или

$$d_m = -c_m \sigma_m, \qquad (11)$$

где $\sigma_m = \dfrac{H_0^{(1)}(\Gamma_m \theta) H_0^{(2)}(\Gamma_m)}{H_0^{(2)}(\Gamma_m \theta) H_0^{(1)}(\Gamma_m)}$.

Выполнение условия непрерывности составляющих E_z на границе $\rho = 1$ приводит к соотношению

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \Gamma_m^2 \left\{ f_m H_0^{(1)}(\Gamma_m) J_0(\Gamma_m) - (c_m + d_m) \right\} \times$$

$$\times e^{im(\frac{z}{2r} - \pi)} = \sum_{n=1}^{\infty} g_n j_{0n}^2 H_0^{(1)}(j_{0n}) J_0(j_{0n}) \times$$

$$\times \left\{ e^{i\gamma_n (2\pi r + z)} + e^{i\gamma_n (2\pi r - z)} \right\},$$

а так как $J_0(j_{0n}) = 0$ – к связи между амплитудами f_m и c_m:

$$f_m = c_m \tau_m, \qquad (12)$$

где $\tau_m = \dfrac{1 - \sigma_m}{H_0^{(1)}(\Gamma_m) J_0(\Gamma_m)}$.

Сшивание составляющих H_φ на границе областей 1 и 2 приводит, с учетом (10), к функциональному уравнению

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ g_n - \frac{\delta_n^p}{H_0^{(1)}(j_{0n})} \right\} 2 j_{0n} H_0^{(1)}(j_{0n}) J_1(j_{0n}\rho) =$$

$$= - \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m \Gamma_m H_0^{(1)}(\Gamma_m) J_1(\Gamma_m \rho). \qquad (13)$$

Переразложим в (13) функции, полные на интервале $[-2\pi r, 2\pi r]$ по функциям, полным на интервале $[0,1]$:

$$-\Gamma_m H_0^{(1)}(\Gamma_m) J_1(\Gamma_m \rho) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^m 2 j_{0n} H_0^{(1)}(j_{0n}) J_1(j_{0n}\rho), \qquad (14)$$

где коэффициенты переразложения β_n^m определяются как

$$\beta_n^m = -\frac{\Gamma_m H_0^{(1)}(\Gamma_m)}{2 j_{0n} H_0^{(1)}(j_{0n})} \times$$

$$\times \frac{\int_0^1 \rho J_1(\Gamma_m \rho) J_1(j_{0n}\rho) d\rho}{\int_0^1 \rho J_1^2(j_{0n}\rho) d\rho}$$

и равны

$$\beta_n^m = \begin{cases} -\frac{\pi i}{2} \frac{\Gamma_m^2 J_0(\Gamma_m) H_0^{(1)}(\Gamma_m)}{\Gamma_m^2 - j_{0n}^2}, \\ \qquad \Gamma_m \neq j_{0n}; \\ -1/2, \quad \Gamma_m = j_{0n}. \end{cases} \qquad (15)$$

При вычислении β_n^m использованы интегралы Ломмеля

$$\int_0^1 \rho J_1(\Gamma_m \rho) J_1(j_{0n}\rho) d\rho =$$

$$= \frac{1}{\Gamma_m^2 - j_{0n}^2} \{ j_{0n} J_0(j_{0n}) J_1(\Gamma_m) -$$

$$- \Gamma_m J_0(\Gamma_m) J_1(j_{0n}) \} = -\frac{\Gamma_m J_0(\Gamma_m) J_1(j_{0n})}{\Gamma_m^2 - j_{0n}^2},$$

$$\int_0^1 \rho J_1^2(j_{0n}\rho) d\rho = \frac{1}{2} J_1^2(j_{0n}),$$

и Вронскиан

$$J_0(j_{0n}) H_1^{(1)}(j_{0n}) - H_0^{(1)}(j_{0n}) J_1(j_{0n}) = \frac{2}{\pi i j_{0n}},$$

откуда

$$j_{0n} H_0^{(1)}(j_{0n}) J_1(j_{0n}) = -\frac{2}{\pi i}.$$

Тогда, подставляя выражение (14) в (13) и используя (12), получим бесконечную систему алгебраических уравнений относительно амплитуд g_n и c_m:

$$g_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \tau_m \beta_n^m + \frac{\delta_n^p}{H_0^{(1)}(j_{0n})}. \qquad (16)$$

Сшивание составляющих H_φ на границе областей 2 и 3 приводит, с учетом (11) и (12), к функциональному уравнению

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \Gamma_m \Delta_m e^{im(\frac{z}{2r} - \pi)} =$$

$$= -\frac{2}{\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} g_n \left\{ e^{i\gamma_n(2\pi r + z)} + e^{i\gamma_n(2\pi r - z)} \right\}, \qquad (17)$$

где

$$\Delta_m = \frac{H_1^{(1)}(\Gamma_m)}{H_0^{(1)}(\Gamma_m)} - \sigma_m \frac{H_1^{(2)}(\Gamma_m)}{H_0^{(2)}(\Gamma_m)} -$$

$$- \tau_m H_0^{(1)}(\Gamma_m) J_1(\Gamma_m).$$

Переразложим в (17) функции, полные на интервале $[0,1]$ по функциям, полным на интервале $[-2\pi r, 2\pi r]$:

$$\left\{ e^{i\gamma_n(2\pi r + z)} + e^{i\gamma_n(2\pi r - z)} \right\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m^n e^{im(\frac{z}{2r} - \pi)}, \qquad (18)$$

где коэффициенты переразложения α_m^n определяются как

$$\alpha_m^n = \frac{1}{4\pi r} \int_{-2\pi r}^{2\pi r} \left\{ e^{i\gamma_n(2\pi r + z)} + e^{i\gamma_n(2\pi r - z)} \right\} \times$$

$$\times e^{-im(\frac{z}{2r} - \pi)} dz = \frac{e^{2i\gamma_n \pi r}(-1)^m}{4\pi r} \times$$

$$\times \int_{-2\pi r}^{2\pi r} \left\{ e^{i(\gamma_n - \frac{m}{2r})z} + e^{-i(\gamma_n + \frac{m}{2r})z} \right\} dz$$

и равны

$$\alpha_m^n = \begin{cases} \frac{e_n^2 - 1}{2\pi r i} \frac{\gamma_n}{\gamma_n^2 - (m/2r)^2}, \\ \qquad \gamma_n \neq m/2r; \\ 1 + \delta_m^0, \ \gamma_n = m/2r. \end{cases} \qquad (19)$$

Подставив (18) в (16), получим бесконечную систему алгебраических уравнений относительно амплитуд c_m и g_n:

$$c_m = -\frac{2}{\pi i \Delta_m \Gamma_m} \sum_{n=1}^{\infty} g_n \alpha_m^n. \qquad (20)$$

Выполняя условие непрерывности составляющих H_φ на границе областей 2 и 4, получим функциональное уравнение

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m e^{-im\pi} \Gamma_m H_0^{(1)}(\Gamma_m) J_1(\Gamma_m \rho) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{s_n}{2} - e_n g_n \right) 2 j_{0n} H_0^{(1)}(j_{0n}) J_1(j_{0n}\rho),$$

откуда, после использования переразложения (14), для волн, прошедших в область 4, находим

$$s_n = 2\left[g_n e_n - \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m (-1)^m \beta_n^m \right]. \qquad (21)$$

После подстановки (20) в (16) получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений второго рода (БСЛАУ) относительно амплитуд g_n:

$$g_\nu + \sum_{n=1}^{\infty} g_n P_{n\nu} = \frac{\delta_\nu^p}{H_0^{(1)}(j_{0\nu})}, \qquad (22)$$

с матричными коэффициентами

$$P_{n\nu} = \frac{1}{\pi i} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m^n \beta_\nu^m \frac{\tau_m}{\Gamma_m \Delta_m}. \qquad (23)$$

Коэффициенты b_n, c_m, d_m, f_m и s_n вычисляются по формулам (10), (20), (11), (12) и (21).

E_φ-поляризация

В этом случае класс частных решений уравнений Максвелла будем искать с помощью магнитного потенциала Герца, выражения для которого в областях 1 – 4 запишем в виде:

$$\Pi_H^{(1)} = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \delta_n^p e^{-i\gamma_n (z-2\pi r)} + \right.$$

$$\left. + b_n e^{i\gamma_n (z-2\pi r} \right\} J_0(j_{1n}\rho);$$

$$\Pi_H^{(2)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m H_1^{(1)}(\Gamma_m) J_0(\Gamma_m \rho) e^{im(\frac{z}{2r}-\pi)} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} g_n H_1^{(1)}(j_{1n}) J_0(j_{1n}\rho) \times$$

$$\times \left\{ e^{i\gamma_n (2\pi r+z)} - e^{i\gamma_n (2\pi r-z)} \right\};$$

$$\Pi_H^{(3)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ c_m \frac{H_0^{(1)}(\Gamma_m \rho)}{H_1^{(1)}(\Gamma_m)} + \right.$$

$$\left. + d_m \frac{H_0^{(2)}(\Gamma_m \rho)}{H_1^{(2)}(\Gamma_m)} \right\} e^{im(\frac{z}{2r}-\pi)};$$

$$\Pi_H^{(4)} = \sum_{n=1}^{\infty} s_n H_1^{(1)}(j_{1n}) J_0(j_{1n}\rho) e^{-i\gamma_n z}.$$

Отличные от нуля составляющие поля определяются из уравнений Максвелла по формулам

$$H_z = \left(æ^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Pi_H ; H_\rho = \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial z} \Pi_H ;$$

$$E_\varphi = -iæ \frac{\partial}{\partial \rho} \Pi_H$$

и имеют вид:

– в области 1:

$$H_z^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} j_{1n}^2 \left\{ \delta_n^p e^{-i\gamma_n (z-2\pi r)} + \right.$$

$$\left. + b_n e^{i\gamma_n (z-2\pi r)} \right\} J_0(j_{1n}\rho);$$

$$H_\rho^{(1)} = i \sum_{n=1}^{\infty} j_{1n} \gamma_n \left\{ \delta_n^p e^{-i\gamma_n (z-2\pi r)} - \right. \qquad (24)$$

$$\left. - b_n e^{i\gamma_n (z-2\pi r)} \right\} J_1(j_{1n}\rho);$$

$$E_\varphi^{(1)} = iæ \sum_{n=1}^{\infty} j_{1n} \left\{ \delta_n^p e^{-i\gamma_n (z-2\pi r)} + \right.$$

$$\left. + b_n e^{i\gamma_n (z-2\pi r)} \right\} J_1(j_{1n}\rho),$$

где $\gamma_n = \sqrt{æ^2 - j_{1n}^2}$,

– в области 2:

$$H_z^{(2)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m \Gamma_m^2 H_1^{(1)}(\Gamma_m) J_0(\Gamma_m \rho) e^{im(\frac{z}{2r}-\pi)} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} g_n j_{1n}^2 H_1^{(1)}(j_{1n}) J_0(j_{1n}\rho) \times$$

$$\times \left\{ e^{i\gamma_n (2\pi r+z)} - e^{i\gamma_n (2\pi r-z)} \right\};$$

$$H_\rho^{(2)} = -i \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m \Gamma_m \frac{m}{2r} H_1^{(1)}(\Gamma_m) \times$$

$$\times J_1(\Gamma_m \rho) e^{im(\frac{z}{2r}-\pi)} - \qquad (25)$$

$$-i\sum_{n=1}^{\infty} g_n j_{1n}\gamma_n H_1^{(1)}(j_{1n})J_1(j_{1n}\rho)\times$$

$$\times\left\{e^{i\gamma_n(2\pi r+z)}+e^{i\gamma_n(2\pi r-z)}\right\};$$

$$E_\varphi^{(2)}=iæ\sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m\Gamma_m H_1^{(1)}(\Gamma_m)J_1(\Gamma_m\rho)e^{im(\frac{z}{2r)}-\pi)}+$$

$$+iæ\sum_{n=1}^{\infty} g_n j_{1n}H_1^{(1)}(j_{1n})J_1(j_{1n}\rho)\times$$

$$\times\left\{e^{i\gamma_n(2\pi r+z)}-e^{i\gamma_n(2\pi r-z)}\right\},$$

где Γ_m определяются выражением (2), в котором $m = 1, 2, 3,\ldots$;

– в области 3:

$$H_z^{(3)}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\Gamma_m^2\left\{c_m\frac{H_0^{(1)}(\Gamma_m\rho)}{H_1^{(1)}(\Gamma_m)}+\right.$$

$$\left.+d_m\frac{H_0^{(2)}(\Gamma_m\rho)}{H_1^{(2)}(\Gamma_m)}\right\}e^{im(\frac{z}{2r}-\pi)};$$

$$H_\rho^{(3)}=-i\sum_{m=-\infty}^{\infty}\Gamma_m\frac{m}{2r}\left\{c_m\frac{H_1^{(1)}(\Gamma_m\rho)}{H_1^{(1)}(\Gamma_m)}+\right.$$

$$\left.+d_m\frac{H_1^{(2)}(\Gamma_m\rho)}{H_1^{(2)}(\Gamma_m)}\right\}e^{im(\frac{z}{2r}-\pi)};$$

$$E_\varphi^{(3)}=iæ\sum_{m=-\infty}^{\infty}\Gamma_m\left\{c_m\frac{H_1^{(1)}(\Gamma_m\rho)}{H_1^{(1)}(\Gamma_ь)}+\right. \qquad (26)$$

$$\left.+d_m\frac{H_1^{(2)}(\Gamma_m\rho)}{H_1^{(2)}(\Gamma_m)}\right\}e^{im(\frac{z}{2r}-\pi)};$$

– в области 4:

$$H_z^{(4)}=\sum_{n=1}^{\infty}s_n j_{1n}^2 H_1^{(1)}(j_{1n})J_0(j_{1n}\rho)e^{-i\gamma_n z};$$

$$H_\rho^{(4)}=i\sum_{n=1}^{\infty}s_n j_{1n}\gamma_n H_1^{(1)}(j_{1n})J_1(j_{1n}\rho)e^{-i\gamma_n z}; \quad (27)$$

$$E_\varphi^{(4)}=iæ\sum_{n=1}^{\infty}s_n j_{1n}H_1^{(1)}(j_{1n})J_1(j_{1n}\rho)e^{-i\gamma_n z}.$$

Выполняя граничное условие $E_\varphi^{(3)}=0$ при $\rho=\theta$, получим соотношение между d_m и c_m:

$$d_m=-c_m\lambda_m, \qquad (28)$$

где

$$\lambda_m=\frac{H_1^{(1)}(\Gamma_m\theta)H_1^{(2)}(\Gamma_m)}{H_1^{(2)}(\Gamma_m\theta)H_1^{(1)}(\Gamma_m)}.$$

Сшивая составляющие E_φ на границе $z=2\pi r$, получим функциональное уравнение

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\delta_n^p+b_n-g_nH_1^{(1)}(j_{1n})(e_n^2-1)\right\}j_{1n}J_1(j_{1n}\rho)=$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}f_m\Gamma_mH_1^{(1)}(\Gamma_m)J_1(\Gamma_m\rho),$$

но так как в случае E_φ-поляризованных волн для амплитуд f_m выполняется соотношение

$$f_m=-f_{-m},$$

то

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}f_m\Gamma_mH_1^{(1)}(\Gamma_m)J_1(\Gamma_m\rho)\equiv 0,$$

и

$$b_n=g_n(e_n^2-1)H_1^{(1)}(j_{1n})-\delta_n^p. \qquad (29)$$

Выполняя условие непрерывности $E_\varphi^{(2)}=E_\varphi^{(3)}$ при $\rho=1$ получаем функциональное уравнение

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\Gamma_m\left\{c_m+d_m-f_mH_1^{(1)}(\Gamma_m)J_1(\Gamma_m)\right\}\times$$

$$\times e^{im(\frac{z}{2r}-\pi)}=\sum_{n=1}^{\infty}g_nj_{1n}H_1^{(1)}(j_{1n})J_1(j_{1n})\times$$

$$\times\left\{e^{i\gamma_n(2\pi r+z)}-e^{i\gamma_n(2\pi r-z)}\right\}. \qquad (30)$$

Но поскольку $J_1(j_{1n})=0$, из (30), с учетом (28), следует соотношение

$$f_m=c_m\eta_m, \qquad (31)$$

где $$\eta_m=\frac{1-\lambda_m}{H_1^{(1)}(\Gamma_m)J_1(\Gamma_m)}.$$

Выполнив условие $H_\rho^{(1)}=H_\rho^{(2)}$ при $z=2\pi r$ и учитывая (29), получим функциональное уравнение

$$\sum_{n=1}^{\infty}j_{1n}\gamma_n\left\{\frac{\delta_n^p}{H_1^{(1)}(j_{1n})}+g_n\right\}\times$$

$$\times 2H_1^{(1)}(j_{1n})J_1(j_{1n}\rho)=$$

$$= -\sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m \Gamma_m \frac{m}{2r} H_1^{(1)}(\Gamma_m) J_1(\Gamma_m \rho). \qquad (32)$$

Используем переразложение

$$-\Gamma_m \frac{m}{2r} H_1(\Gamma_m) J_1(\Gamma_m \rho) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^m j_{1n} \gamma_n 2 H_1^{(1)}(j_{1n}) J_1(j_{1n}\rho), \qquad (33)$$

в котором коэффициенты переразложения β_n^m определяются как

$$\beta_n^m = -\frac{\Gamma_m \frac{m}{2r} H_1^{(1)}(\Gamma_m)}{2 j_{1n} \gamma_n H_1^{(1)}(j_{1n})} \times$$

$$\times \frac{\int_0^1 \rho J_1(\Gamma_m \rho) J_1(j_{1n}\rho) d\rho}{\int_0^1 \rho J_1^2(j_{1n}\rho) d\rho}$$

и равны

$$\beta_n^m = \begin{cases} -\dfrac{\pi i}{2} \dfrac{j_{1n} \Gamma_m \frac{m}{2r} H_1^{(1)}(\Gamma_m) J_1(\Gamma_m)}{\gamma_n^2 (\Gamma_m^2 - j_{1n}^2)} \\ -1/2, \qquad \Gamma_m = j_{1n} \end{cases}.$$

При вычислении β_n^m использованы интегралы Ломмеля

$$\int_0^1 \rho J_1(\Gamma_m \rho) J_1(j_{1n}\rho) d\rho =$$

$$= \frac{1}{\Gamma_m^2 - j_{1n}^2} \{ j_{1n} J_0(j_{1n}) J_1(\Gamma_m) -$$

$$- \Gamma_m J_0(\Gamma_m) J_1(j_{1n}) \} = \frac{j_{1n} J_0(j_{1n}) J_1(\Gamma_m)}{\Gamma_m^2 - j_{1n}^2},$$

$$\int_0^1 \rho J_1^2(j_{1n}\rho) d\rho = \frac{1}{2} J_0^2(j_{1n})$$

и Вронскиан

$$J_0(j_{1n}) H_1^{(1)}(j_{1n}) - J_1(j_{1n}) H_0^{(1)}(j_{1n}) = \frac{2}{\pi i j_{1n}},$$

откуда

$$j_{1n} J_0(j_{1n}) H_0^{(1)}(j_{1n}) = \frac{2}{\pi i}.$$

Подставив выражение переразложения (33) в (32), получим бесконечную систему алгебраических уравнений

$$g_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \eta_m \beta_n^m - \frac{\delta_n^p}{H_1^{(1)}(j_{1p})}. \qquad (34)$$

Выполнив условие $H_z^{(2)} = H_z^{(3)}$ при $\rho = 1$ и учтя (28) и (31), получим функциональное уравнение

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \Gamma_m^2 \Omega_m e^{im(\frac{z}{2r} - \pi)} =$$

$$= \frac{2}{\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} g_n j_{1n} \left\{ e^{i\gamma_n (2\pi r + z)} - e^{i\gamma_n (2\pi r - z)} \right\}, \qquad (35)$$

где

$$\Omega_m = \eta_m H_1^{(1)}(\Gamma_m) J_0(\Gamma_m) -$$

$$- \frac{H_0^{(1)}(\Gamma_m)}{H_1^{(1)}(\Gamma_m)} - \lambda_m \frac{H_0^{(2)}(\Gamma_m)}{H_1^{(2)}(\Gamma_m)}.$$

Используем переразложение

$$e^{i\gamma_n (2\pi r + z)} - e^{i\gamma_n (2\pi r - z)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m^n e^{im(\frac{z}{2r} - \pi)}, \qquad (36)$$

где коэффициенты α_m^n определяются как

$$\alpha_m^n = \frac{1}{4\pi r} \int_{-2\pi r}^{2\pi r} \left\{ e^{i\gamma_n (2\pi r + z)} - e^{i\gamma_n (2\pi r - z)} \right\} e^{-im(\frac{z}{2r} - \pi)} dz$$

и равны

$$\alpha_m^n = \begin{cases} \dfrac{e_n^2 - 1}{2\pi r i} \dfrac{m/2r}{\gamma_n^2 - (m/2r)^2}, \\ \qquad \gamma_n \neq m/2r; \\ 1, \ \gamma_n = m/2r. \end{cases}.$$

Подставляя (36) в (35), получим бесконечную систему уравнений для определения c_m:

$$c_m = \frac{2}{\pi i \Gamma_m^2 \Omega_m} \sum_{n=1}^{\infty} g_n j_{1n} \alpha_m^n. \qquad (37)$$

Наконец, выполняя условие непрерывности E_φ-составляющих на границе $z = 0$, получим функциональное уравнение

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m \frac{(-1)^m}{m/2r} \Gamma_m H_1^{(1)}(\Gamma_m) J_1(\Gamma_m \rho) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n}{2\gamma_n} 2 j_{1n} \gamma_n H_1^{(1)}(j_{1n}) J_1(j_{1n}\rho). \qquad (38)$$

Подставляя в (38) представление (33) и соотношение (31), получим бесконечную систему уравнений, связывающую амплитуды s_n и c_m :

$$s_n = -2\gamma_n \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \frac{(-1)^m \eta_m}{m/2r} \beta_n^m . \qquad (39)$$

Подставив (37) в (34), имеем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений второго рода для определения амплитуд g_ν :

$$g_\nu = \sum_{\nu=1}^{\infty} g_n P_{n\nu} - \frac{\delta_\nu^p}{H_1^{(1)}(j_{1\nu})} \qquad (40)$$

с матричными коэффициентами

$$P_{n\nu} = \frac{2}{\pi i} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\eta_m j_{1n}}{\Gamma_m^2 \Omega_m} \alpha_m^n \beta_\nu^m . \qquad (41)$$

Амплитуды b_n, c_m, d_m, f_m и s_n вычисляются по формулам (29), (37), (28), (31) и (39).

Заключение

В результате строгого решения получены выражения для амплитуд волн дифракционного спектра – элементов матрицы рассеяния, являющихся окончательными для одиночного соединения и обязательными для сложных структур, требующих применения метода матричных операторов.

Решение получено для обеих поляризаций и без ограничений на параметры структуры.

Литература

1. Шестопалов В.П., Кириленко А.А., Рудь Л.А. Резонансное рассеяние волн. Т.2. Волноводные неоднородности. – К.: Наук. думка, 1986. – 216 с.

2. Васильева Т.И., Кириленко А.А., Рудь Л.А. Дифракция несимметричных волн на скачке поперечного сечения круглого волновода. – В кн: Физика и техника миллиметровых и субмиллиметровых волн. – К.: Наук. думка, 1986. – С. 67-75.

3. Заикин И.П., Удачин Д.В. Дифракция электромагнитных волн на несимметричном соединении двух структур прямоугольного сечения. Часть I. Постановка и строгое решение задачи // Радіоелектронні і комп'ютерні системи. – 2006. – Вип. 1 (13). – С. 20-27.

4. Заикин И.П., Удачин Д.В. Дифракция электромагнитных волн на несимметричном соединении двух структур прямоугольного сечения. Часть II. Существование и единственность решения. Геометрооптическое и длинноволновое приближения // Радіоелектронні і комп'ютерні системи. – 2006. – Вип. 2 (14). – С. 23-30.

Поступила в редакцию 29.08.2007

Рецензент: д-р техн. наук, проф. В.В. Лукин, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского "ХАИ", Харьков.