УДК 621.325.5

В.А. РОМАНКЕВИЧ

Национальный технический университет Украины «КПИ», Украина

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ПОСТРОЕНИЯ GL-МОДЕЛЕЙ ОТКАЗОУСТОЙЧИВЫХ МНОГОПРОЦЕССОРНЫХ СИСТЕМ

В работе рассматриваются вопросы генерации реберных функций графо-логических моделей поведения отказоустойчивых многопроцессорных систем (ОМС) в потоке отказов, а также некоторые особенности преобразования этих моделей.

многопроцессорные системы, отказоустойчивость, графы, булевы функции

Введение

Использование новых всё более сложных технологий при производстве и конструировании интегральных схем, применяемых при проектировании и разработке сложных многопроцессорных вычислительных систем, повышение сложности и ответственности этих систем, чей отказ может привести к тяжелейшим последствиям экономического и экологического характера или даже к человеческим жертвам, обязывает создателей таких систем использовать различные аппаратные и программные методы и средства повышения надёжности и обеспечения отказоустойчивости, включая возможность реконфигурации.

Модель для расчёта надёжности систем без резервирования и иных средств повышения надёжности хорошо известна: мы можем поставить в соответствие такой системе двуполюсный граф, все вершины которого последовательно соединены рёбрами и каждое ребро соответствует одному модулю системы. Граф вырождается в элементарную цепь, что позволяет сравнительно несложно записать логическую структурную функцию и с её помощью рассчитать надёжность системы [1].

Можно сказать, что в этом случае каждому ребру приписана индикаторная булева переменная x_i, где $i = 1,\ldots,n$, n – количество модулей (процессоров) системы, определяющая наличие или отсутствие ребра и зависящая от того, отказал ($x_i = 0$) или работоспособен ($x_i = 1$) соответствующий модуль системы. Если хоть один модуль откажет, то исчезнет ребро в графе и связность между полюсами пропадёт, что отвечает отказу всей системы. Мы построили модель поведения 0-отказоустойчивой системы $K(0,n)$. Проведём интересный эксперимент – объединим оба полюса графа в одну вершину. Получился граф, имеющий вид элементарного цикла, причём он своей связностью (уже не относительно полюсов) моделирует отказ иной системы – системы, обладающей способностью выдерживать отказ одного любого модуля. Такие системы далее будем называть 1-отказоустойчивыми.

Цель работы – разработка способов построения и преобразования моделей ОМС на основе обобщения и развития результатов [1 – 7].

Построение моделей

Пусть стоит задача построения модели поведения m-отказоустойчивой системы $K(m,n)$. Продолжая развивать идею модификации модели, заменим переменные на рёбрах булевыми функциями, причём такими, что при появлении менее m отказов все функции всегда равны «1», а при появлении ровно m отказов только одна примет значение, равное «0». В этом случае цепь моделирует поведение $(m–1)$-отказоустойчивой системы. Если же в множестве наших функций при появлении более m отказов не менее двух функций примут нулевые значения, то переход от цепи к циклу позволит моделировать поведение m-отказоустойчивой системы. Отметим, что при переходе от цепочки к циклу мы получили аналогичный эффект: повышение степени отказоустойчивости на единицу. Задача построения описанных выше функций представляет определённый интерес, и одно из решений приведено в [2]. Поскольку составить логическую структурную функцию для такого графа достаточно сложно, расчет надежности на основе использования таких моделей осуществляется путем выполнения статистического эксперимента с ними.

Приведенная в [2] теорема и последующая методика получения булевых выражений могут показаться сложными и малопригодными для практического использования.

Однако на самом деле это не так, поскольку найденные выражения для $K'(m,n)$ можно использовать при получении выражений $K'(s,r)$, где $s \geq m$, а $r \geq n$. Покажем это на примере формирования GL-модели для $K(4,8)$ двумя способами. Здесь и далее под $K'(m,n)$ будем понимать совокупность рёберных функций модели $K(m,n)$. Два крайних случая – $K'(1,n)$ и $K'(n,n)$ – рассмотрим особо, поскольку GL-модели циклического вида для них не строятся.

Опираясь на результаты, полученные в [2], можем отметить, что рёберные функции для случаев $K'(1,r)$ и $K'(r,r)$ формируются как конъюнкция и дизъюнкция r переменных соответственно. Это свойство позволяет нам утверждать, что разбиение исходного множества переменных на подмножества по 2 переменных позволяет сразу выписывать все рёберные функции создаваемой модели. В самом деле, распределение отказов в множестве из двух переменных (1 или 2 отказа), приводит к конъюнкции или дизъюнкции этих двух переменных:

$$K'(1, 2) = x_i\, x_{i+1};$$

$$K'(2, 2) = x_i \vee x_{i+1}.$$

1. Для нашего примера $K(4,8)$ составим таблицу (табл. 1), каждая строка которой будет соответствовать распределению переменных по подмножествам и вариантам распределения отказов по этим же подмножествам. Ниже выпишем функции, соответствующие каждой строчке табл. 1.

Таблица 1

Распределению переменных по подмножествам для $K(4,8)$

$\{x_1, x_2\}$	$\{x_3, x_4\}$	$\{x_5, x_6\}$	$\{x_7, x_8\}$
$K(1,2)$	$K(1,2)$	$K(1,2)$	$K(1,2)$
$K(2,2)$		$K(1,2)$	$K(1,2)$
$K(2,2)$	$K(1,2)$		$K(1,2)$
$K(2,2)$	$K(1,2)$	$K(1,2)$	
$K(1,2)$	$K(2,2)$	$K(1,2)$	
$K(1,2)$	$K(2,2)$		$K(1,2)$
	$K(2,2)$	$K(1,2)$	$K(1,2)$
$K(1,2)$	$K(1,2)$	$K(2,2)$	
$K(1,2)$		$K(2,2)$	$K(1,2)$
	$K(1,2)$	$K(2,2)$	$K(1,2)$
$K(1,2)$	$K(1,2)$		$K(2,2)$
$K(1,2)$		$K(1,2)$	$K(2,2)$
	$K(1,2)$	$K(1,2)$	$K(2,2)$
$K(2,2)$	$K(2,2)$		
$K(2,2)$		$K(2,2)$	
$K(2,2)$			$K(2,2)$
	$K(2,2)$	$K(2,2)$	
	$K(2,2)$		$K(2,2)$
		$K(2,2)$	$K(2,2)$

В нашем примере разбиваем множество переменных $\{x_1, x_2, \ldots, x_8\}$ на 4 подмножества $\{x_1, x_2\}$, $\{x_3, x_4\}$, $\{x_5, x_6\}$ и $\{x_7, x_8\}$:

$$f_1 = x_1x_2 \vee x_3x_4 \vee x_5\, x_6 \vee x_7\, x_8;$$

$$f_2 = x_1 \vee x_2 \vee x_5\, x_6 \vee x_7\, x_8;$$

$$f_3 = x_1 \vee x_2 \vee x_3x_4 \vee x_7\, x_8;$$

$$f_4 = x_1 \vee x_2 \vee x_3x_4 \vee x_5\, x_6;$$

$$f_5 = x_1x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5\, x_6;$$

$$f_6 = x_1x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_7\, x_8;$$

$$f_7 = x_3 \vee x_4 \vee x_5\, x_6 \vee x_7\, x_8;$$

$$f_8 = x_1x_2 \vee x_3x_4 \vee x_5 \vee x_6;$$

$$f_9 = x_1x_2 \vee x_5 \vee x_6 \vee x_7\, x_8;$$

$$f_{10} = x_3x_4 \vee x_5 \vee x_6 \vee x_7\, x_8;$$

$$f_{11} = x_1x_2 \vee x_3x_4 \vee x_7 \vee x_8;$$

$$f_{12} = x_1x_2 \vee x_5\, x_6 \vee x_7 \vee x_8;$$

$$f_{13} = x_3x_4 \vee x_5\, x_6 \vee x_7 \vee x_8;$$

$$f_{14} = x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4;$$

$$f_{15} = x_1 \vee x_2 \vee x_5 \vee x_6;$$

$f_{16} = x_1 \vee x_2 \vee x_7 \vee x_8;$

$f_{17} = x_3 \vee x_4 \vee x_5 \vee x_6;$

$f_{18} = x_3 \vee x_4 \vee x_7 \vee x_8;$

$f_{19} = x_5 \vee x_6 \vee x_7 \vee x_8.$

Получилось 19 функций, и, следовательно, 19-реберный кольцевой граф.

2. Возможны и другие варианты разбиения. В частности, можно исходное множество переменных разбить на два равные по мощности подмножества: $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ и $B = \{x_5, x_6, x_7, x_8\}$. Комбинации различных $K'(i,j)$, соответствующие вариантам распределения отказов по подмножествам, приведены в табл. 2.

Таблица 2

Комбинации $K'(i,j)$, соответствующие вариантам распределения отказов по подмножествам

$\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$	$\{x_5, x_6, x_7, x_8\}$
$K'(4, 4)$	
$K'(3, 4)$	$K'(1, 4)$
$K'(2, 4)$	$K'(2, 4)$
$K'(1, 4)$	$K'(3, 4)$
	$K'(4, 4)$

В соответствии с таблицей можем записать группу строк:

$x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4;$

$K'_A\ (3,4) \vee x_5x_6x_7x_8;$

$K'_A(2,4) \vee\ K'_B\ (2,4);$

$x_1x_2x_3x_4 \vee\ K'_B\ (3,4);$

$x_5 \vee x_6 \vee x_7 \vee x_8.$

Первая и последняя строчки этой группы – готовые рёберные функции. Для определения остальных нужно найти совокупности функций $K'(3,4)$ и $K'(2,4)$, для чего строим аналогичные таблицы следующим образом. Разобъём каждое из подмножеств переменных на свои подмножества: подмножество A на $\{x_1, x_2\}$ и $\{x_3, x_4\}$, подмножество B на $\{x_5, x_6\}$ и $\{x_7, x_8\}$. Для случая $K'(3,4)$ можем составить свою таблицу распределения трёх отказов по подмножествам мощности 2 подмножества A.

Результа*т* приведен в табл. 3, которая даёт нам возможность выписать следующие рёберные функции, преобразуя вторую из строк приведенной выше группы:

$x_1 \vee x_2 \vee x_3\ x_4 \vee x_5x_6x_7x_8;$

$x_1x_2 \vee x_3 \vee\ x_4 \vee x_5x_6x_7x_8.$

Таблица 3

Распределение трёх отказов (подмножество A)

$\{x_1, x_2\}$	$\{x_3, x_4\}$
$K'_A(2,2)$	$K'_A\ (1,2)$
$K'_A\ (1,2)$	$K'_A\ (2,2)$

Используя тот же принцип, составим таблицу распределения двух отказов по тем же подмножествам (табл. 4):

Таблица 4

Распределение двух отказов (подмножество A)

$\{x_1, x_2\}$	$\{x_3, x_4\}$
$K'_A(2,2)$	
$K'_A(1,2)$	$K'_A(1,2)$
	$K'_A(2,2)$

Аналогично поступая с подмножеством B, получим табл. 5 и 6.

Таблица 5

Распределение трёх отказов (подмножество B)

$\{x_5, x_6\}$	$\{x_7, x_8\}$
$K'_B(2,2)$	$K'_B(1,2)$
$K'_B(1,2)$	$K'_B(2,2)$

Таблица 6

Распределение двух отказов (подмножество B)

$\{x_5, x_6\}$	$\{x_7, x_8\}$
$K'_B(2,2)$	
$K'_B(1,2)$	$K'_B(1,2)$
	$K'_B(2,2)$

Учитывая, что все $K'(i,j)$ удовлетворяют отмеченной выше особенности, нетрудно записать все реберные функции искомой GL-модели:

$f_1 = x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4;$

$f_2 = x_1 \vee x_2 \vee x_3\, x_4 \vee x_5x_6x_7x_8;$

$f_3 = x_1x_2 \vee x_3 \vee\; x_4 \vee x_5x_6x_7x_8;$

$f_4 = x_1 \vee x_2 \vee x_5 \vee x_6;$

$f_5 = x_1x_2 \vee x_3\, x_4 \vee x_5 \vee x_6;$

$f_6 = x_3 \vee x_4 \vee x_5 \vee x_6;$

$f_7 = x_1 \vee x_2 \vee x_5\, x_6 \vee x_7\, x_8;$

$f_8 = x_1x_2 \vee x_3\, x_4 \vee x_5\, x_6 \vee x_7\, x_8;$

$f_9 = x_3 \vee x_4 \vee x_5\, x_6 \vee x_7\, x_8;$

$f_{10} = x_1 \vee x_2 \vee x_7 \vee x_8;$

$f_{11} = x_1x_2 \vee x_3\, x_4 \vee x_7 \vee x_8;$

$f_{12} = x_3 \vee x_4 \vee x_7 \vee x_8;$

$f_{13} = x_1x_2x_3x_4 \vee x_5 \vee x_6 \vee x_7\, x_8;$

$f_{14} = x_1x_2x_3x_4 \vee x_5\, x_6 \vee x_7 \vee x_8;$

$f_{15} = x_5 \vee x_6 \vee x_7 \vee x_8.$

Как видим, в обоих случаях число функций (соответственно ребер графа) больше числа модулей ОМС, однако функции не только бесповторны, но и иногда зависят не от всех переменных, что облегчает работу с ними.

Преобразования моделей

Приведенные примеры подтверждают тот факт, что для одной и той же ОМС могут быть построены разные модели. Интерес представляют, безусловно, самые простые (например, по числу рёберных функций). Большое число экспериментов, выполненных автором, показывает, что наиболее простая модель получается при разбиении множества переменных на равные, или почти равные по мощности подмножества.

Возможно использование и других графов для построения GL-моделей, некоторые примеры рассмотрены в [3, 4]. Иногда они получаются с более простыми рёберными функциями, однако определение связности оказывается более сложной процедурой.

Нами исследована возможность преобразования моделей с целью их упрощения [5]. Преобразованные модели имеют, как правило, меньше рёбер и, несмотря на усложнение некоторых рёберных функций, меньшую их суммарную сложность. Это позволяет сокращать время анализа моделью каждого конкретного вектора состояния системы, и, следовательно, увеличить их количество в процессе выполнения статистического эксперимента, что приводит к повышению точности расчёта надёжности ОМС.

Рассмотренные выше модели отражают поведение так называемых базовых систем: они устойчивы к отказам, кратность которых не превышает определённой величины *m*.

Практический интерес представляют системы и их модели, отличающиеся от базовых, например, системы, которые устойчивы ко всем комбинациям *m* отказов и некоторым комбинациям из (*m*+1)-го отказа.

Построение моделей для подобных «небазовых» систем в общем виде описано в [6]. Одно из решений сводится к проведению дополнительных рёбер, связывающих пару вершин графа GL-модели, со своими функциями.

Отдельный интерес представляет задача определения количества рёбер, выпадающих из графа при появлении вектора состояния системы, имеющего более *m* нулей (а система при этом не теряет работоспособность), поскольку понятно, что от этого зависит число дополнительных рёбер, которые нужно провести для восстановления связности графа модели. Можно показать, что при появлении (*m* + 1)-го отказа модель базовой системы теряет от двух до (*m* + 1) ребер.

Действительно, в [2] доказано, что модель теряет не менее двух рёбер, с другой стороны, комбинация из (*m*+1)-го нуля в векторе состояния системы включает в себя (*m*+1)-ну возможную комбинацию *m* нулей, каждая из которых приводит к пропаданию в модели одного ребра. Последнее легко понять, если учесть, что для каждой комбинации из *m* нулей всегда найдётся строка в какой-то из таблиц, создаваемых при формировании рёберных функций, где распределение отказов по процессорам соответствует распределению нулей в векторе.

Следовательно, при формировании реберных функций найдется одна такая, где в каждом терме дизъюнктивной нормальной формы будет присутствовать по одной переменной, равной нулю при появлении рассматриваемого вектора состояния. Отметим также, что разные модели одной и той же ОМС могут терять разное количество ребер при появлении одного и того же вектора состояния. Например, рассмотренные выше модели $K(4,8)$ при появлении вектора 01010100 теряют, соответственно, 4 ребра – первая и 3 – вторая.

Заключение

Последний факт – лишь один из аспектов, свидетельствующих о существовании проблемы, аналогичной тестопригодному проектированию цифровых схем: проектирование ОМС, имеющих сравнительно простые модели их поведения в потоке отказов, с тем, чтобы их легче было тестировать в процессе выполнения статистических экспериментов при расчете надежности.

В заключение отметим, что исследованию так называемых систем «*k* из *n*» посвящено достаточно много работ особенно в последние годы (например, [7, 8]).

K-out-of-n: G-система работоспособна, если *k* модулей из *n* функционируют, т.е. в нашем определении это – базовая система. Этот интерес лишний раз подчеркивает теоретическую и практическую важность проблемы, с одной стороны, и сложность самой проблемы (а ОМС базовые – самые простые объекты) – с другой.

Литература

1. Райншке К., Ушаков И.А. Оценка надежности систем с использованием графов. – М.: Радио и связь, 1988. – 208 с.
2. Романкевич А.М., Карачун Л.Ф., Романкевич В.А. Графо-логические модели для анализа сложных отказоустойчивых вычисл. систем // Электронное моделирование. – 2001. – Т.23, № 1. – С. 102-111.
3. Романкевич В.А. Об одной модели поведения отказоустойчивой многопроцессорной системы // Радиоэлектроника и информатика. – 1999. – № 1. – С. 75-76.
4. Романкевич О.М, Романкевич В.О., Богуславський О.В., Ал Шбул Рабах. Аналіз відмовостійких багатопроцесорних систем на основі графо-логічних моделей нециклічного типу // Вісник ТУП. – Т. 2 "Технічні науки". – Хмельницький. – 2002. – С. 30-33.
5. Романкевич В.А., Рабах Мох'д Ахмад Ал Шбул, Назаренко В.В. О минимизации базовых циклических GL-моделей // Вісник ТУП. – Ч.1, т.2 "Технічні науки". – Хмельницький. – 2004. – С. 42-46.
6. Романкевич А.М., Иванов В.В., Романкевич В.А. Анализ отказоустойчивых многомодульных систем со сложным распределением отказов на основе циклических GL-моделей // Электронное моделирование. –2004. – Т. 26, № 5. – С. 67-81.
7. Amari S.V., Pham H., Dill G. Optimal Design of k-out-of-n: G Subsystems Subjected to Imperfect Fault-Coverage // IEEE Transaction on Reliability. – December 2004. – Vol.53. – P. 566-575.
8. Lui H. Reliability of a load-sharing k-out-of-n: G system: Non-id components with arbitrary distributions // IEEE Trans. on Reliability. – 1998. – Vol. 47, № 3. – P. 279-294.

Поступила в редакцию 15.02.2006
Рецензент: д-р техн. наук, проф. В.С. Харченко, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского "ХАИ", Харьков.