УДК 519.859:514.1

Л.Г. ЕВСЕЕВА

Полтавский военный институт связи, Украина

УЧЕТ ПОГРЕШНОСТЕЙ ПРИ МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ЗАДАЧ КОМПОНОВКИ

Строится математическая модель комбинаторной оптимизационной задачи размещения, в которой размещаемые ориентированные объекты и область размещения имеют пространственную форму прямоугольного параллелепипеда. Учет погрешностей осуществляется на основе использования элементов интервального анализа.

комбинаторная оптимизационная задача размещения, интервальная математическая модель, интервальный анализ, интервальная гиперплоскость, учет погрешностей исходных данных

Введение

При тестировании программного обеспечения (задача сегментации исходных данных), в задачах синтеза технических систем возникает проблема компоновки сложных объектов нескольких видов, которые можно аппроксимировать с наперед заданной точностью объединением параллелепипедов, метрические характеристики которых заданы с погрешностями.

Задачи компоновки относятся к классу задач геометрического проектирования [1]. Однако математические модели идеализированных (без учета погрешностей) задач [2] не являются адекватными и не отражают важных особенностей задачи в исходной постановке. Поэтому получаемое решение, в общем случае, является лишь допустимым решением.

Учет погрешностей может быть выполнен на основе применения теории интервального анализа [3] в моделях и методах геометрического проектирования. Построению в интервальном пространстве $\mathbf{I}_s^3\mathbf{R} = \mathbf{I}_s\mathbf{R} \times \mathbf{I}_s\mathbf{R} \times \mathbf{I}_s\mathbf{R}$ [4] интервальной математической модели комбинаторной оптимизационной задачи упаковки параллелепипедов посвящена работа [5].

В данной работе предлагается подход к учету погрешностей на основе применения таких понятий интервального анализа [3], как интервальная прямая, интервальная гиперплоскость, интервальный параллелепипед, интервальное касание и интервальное расстояние между выпуклыми интервальными множествами.

Кроме того, задача цветной упаковки параллелепипедов рассматривается как комбинаторная оптимизационная задача, что позволит в дальнейшем для реализации ее математической модели использовать известные методы комбинаторной оптимизации.

Постановка задачи. Рассмотрим оптимизационную задачу геометрического проектирования [1] в следующей постановке. Пусть имеется конечное множество ориентированных прямоугольных параллелепипедов (в дальнейшем, – параллелепипедов) $P_i \subset R^3$, $i \in J_n$, $J_n = \{1, 2, ..., n\}$, высотой c_1^λ, c_2^λ,…, $c_{n_\lambda}^\lambda$, заданных с погрешностями $\nu_{c_1}^\lambda$, $\nu_{c_2}^\lambda$,..., $\nu_{c_{n_\lambda}}^\lambda$ соответственно, τ разных цветов $(\tau \le n)$, $\lambda \in J_\tau$, $\sum_{\lambda=1}^{\tau} n_\lambda = n$, $n_\lambda \in J_n$, одинаковой длины $a_i^\lambda = a^\lambda = a$, $i \in J_{n_\lambda}$, и ширины $b_i^\lambda = b^\lambda = b$, $i \in J_{n_\lambda}$, $n_\lambda \in J_n$.

Область размещения $P_0 \subset R^3$, имеющая форму параллелепипеда длины $a_0 \geq a$, ширины $b_0 \geq b$, заданными с погрешностями ν_{a_0} и ν_{b_0} соответственно, имеет зоны запрета (зоны, в которых упаковка невозможна).

За высоту c_0 параллелепипеда P_0 принимаем величину

$$c_0 = \max\left\{c_t, \sum_{i=1, i\neq t}^{n} c_i\right\}, \text{ где } c_t = \max_{1\leq\lambda\leq\tau}\max_{1\leq i\leq n_\lambda} c_i^\lambda.$$

Пусть параллелепипеды $P_i^\lambda, i \in J_{n_\lambda}$, $n_\lambda \in J_n$, $\lambda \in J_\tau$, ориентированы так, что их основания параллельны основанию параллелепипеда P_0. Полагаем, что начала собственной системы координат параллелепипедов расположены в вершинах нижнего основания.

Исходя из особенностей задачи (все параллелепипеды имеют одинаковую длину и одинаковую ширину), выполним разбиение области размещения $P_0 \subset R^3$ конечным числом плоскостей, параллельных координатным плоскостям xOz и yOz на максимально возможное число $k' \cdot m'$ параллелепипедов $P_{ij} \subset P_0 \subset R^3$, $i \in J_k$, $j \in J_m$, с метрическими характеристиками (a, b, c_0), причем каждая область P_{ij} имеет $\xi_{ij} \leq n$ зон запрета. Заданы расстояния от основания P_0 до начала и конца зоны запрета в $P_{ij} \subset R^3$: d_{ij}^η и l_{ij}^η соответственно, $0 \leq d_{ij}^\eta \leq l_{ij}^\eta$, $\eta \in J_{\rho_{ij}}$, $i \in J_k$, $j \in J_m$, имеющие исходные погрешности $\nu_{d_{ij}^\eta}$ и $\nu_{l_{ij}^\eta}$ соответственно.

Полагаем, что все исходные погрешности положительны (кроме $v_{c_0} = 0$) и не превосходят некоторого числа ν^*, значение которого зависит от смысла конкретной задачи. Необходимо, приняв во внимание погрешности исходных данных, упаковать параллелепипеды $P_i, i \in J_n$, в полученных подобластях так, чтобы минимизировать высоту h занятой части области P_0 и ее погрешность ν_h при условии, что выполняются ограничения одного из следующих типов: в подобласти P_{ij} после зоны запрета η до следующей (если она есть) размещено параллелепипедов цвета λ:

1) не более чем $Q_{ij}^{\eta\lambda}$, $Q_{ij}^{\eta\lambda} \in J_n$, $\eta \in J_{\rho_{ij}}$, $i \in J_k$, $j \in J_m$, $\lambda \in J_\tau$, где $Q_{ij}^{\eta\lambda}$ – число параллелепипедов цвета λ от зоны запрета η до зоны запрета $\eta+1$ в подобласти P_{ij};

2) ровно $Q_{ij}^{\eta\lambda} \in J_n$, $i \in J_k$, $j \in J_m$, $\lambda \in J_\tau$, $\eta \in J_{\rho_{ij}}$, ($Q_{ij}^{\eta\lambda} \leq n$).

Допустим, не нарушая общности дальнейших рассуждений, что выполняются следующие положения:

1) $d_{ij}^1 = 0$, $d_{ij}^{\rho_{ij}+1} = c_0$; в противном случае за c_0 можно взять число $\sum_{i=1}^{n} c_i + \max \sum_{j=1}^{m} (l_{ij}^\eta - d_{ij}^\eta)$

2) $c_1^\lambda \leq c_2^\lambda \leq \ldots \leq c_{n_\lambda}^\lambda$, $\lambda \in J_\tau$;

3) зоны запрета размещены так, что до решения задачи можно считать $l_{ij}^\eta < \lambda^*$, где λ^* – минимальная высота занятой части параллелепипеда.

Результаты исследований

Учитывая гомеоморфизм евклидова пространств R^2 и расширенного пространства центрированных интервалов $\mathbf{I}_s\mathbf{R}$ [3], зададим биекцию вида:

$$R^2 \ni (x, \nu_x) \leftrightarrow \langle x, \nu_x \rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R};$$

$$(x, \nu_x, y, \nu_y, z, \nu_z) \leftrightarrow (\langle x, \nu_x \rangle, \langle y, \nu_y \rangle, \langle z, \nu_z \rangle);$$

$$(x, \nu_x, y, \nu_y, z, \nu_z) \in R^6; \ (\langle x, \nu_x \rangle, \langle y, \nu_y \rangle, \langle z, \nu_z \rangle) \in \mathbf{I}_s^3\mathbf{R}.$$

Тогда соответствия между элементами множества исходных данных поставленной задачи и элементами пространства $\mathbf{I}_s\mathbf{R}$ примут вид:

$$(a_i^\lambda, \nu_{a_i}^\lambda) \leftrightarrow \langle a_i^\lambda, \nu_{a_i}^\lambda \rangle = \langle a, \nu_{a_i}^\lambda \rangle = \langle A_i^\lambda \rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R};$$

$$(b_i^\lambda, \nu_{b_i}^\lambda) \leftrightarrow \langle b_i^\lambda, \nu_{b_i}^\lambda \rangle = \langle b, \nu_{b_i}^\lambda \rangle = \langle B_i^\lambda \rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R};$$

$$(c_i^\lambda, \nu_{c_i}^\lambda) \leftrightarrow \langle c_i^\lambda, \nu_{c_i}^\lambda \rangle = \langle C_i^\lambda \rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}, \ \forall i \in J_{n_\lambda},$$

$$\forall n_\lambda \in J_n, \ \forall \lambda \in J_\tau; \ (d_{ij}^\eta, \nu_{d_{ij}^\eta}) \leftrightarrow \langle d_{ij}^\eta, \nu_{d_{ij}^\eta} \rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R};$$

$$(l_{ij}^\eta, \nu_{l_{ij}^\eta}) \leftrightarrow \langle l_{ij}^\eta, \nu_{l_{ij}^\eta} \rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}, \ \eta \in J_{\rho_{ij}}, \ i \in J_k, \ j \in J_m.$$

Из постановки задачи, а также в соответствии с отношением линейного порядка в $\mathbf{I}_s\mathbf{R}$ [3] следует справедливость интервальных неравенств:

$$\langle A_i^\lambda \rangle > \mathbf{0}, \langle B_i^\lambda \rangle > \mathbf{0}, \langle C_i^\lambda \rangle > \mathbf{0},$$

$$\mathbf{0} = \langle 0,0 \rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}, \ i \in J_n, \ \lambda \in J_\tau.$$

С учетом условий на погрешности исходных данных поставленная задача рассматривается на множестве $\mathbf{\Omega} = \mathbf{I}_{s1} \times \mathbf{I}_{s1} \times \mathbf{I}_{s1} \subset \mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$ [4], где

$$\mathbf{I}_{s1} = \operatorname{int} \mathbf{I}_{s1} = \{\langle x, \nu_x \rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R} \,|\, x - |\nu_x| > 0\}.$$

Следуя работе [5], на множестве $\mathbf{\Omega}$ зададим интервальную метрику вида:

$$\boldsymbol{\rho}(U_1, U_2) = \langle f, \nu_f \rangle = \sqrt{\langle W \rangle},$$

$$\langle W \rangle = \langle w, \nu_w \rangle = \boldsymbol{\rho}_x^2(\langle X_1 \rangle, \langle X_2 \rangle) + \\ + \boldsymbol{\rho}_y^2(\langle Y_1 \rangle, \langle Y_2 \rangle) + \boldsymbol{\rho}_z^2(\langle Z_1 \rangle, \langle Z_2 \rangle),$$

где

$$\boldsymbol{\rho}_x(\langle X_1 \rangle, \langle X_2 \rangle) = \langle |x_1 - x_2|, |\nu_{x_1} - \nu_{x_2}| \rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R},$$

$$\boldsymbol{\rho}_y(\langle Y_1 \rangle, \langle Y_2 \rangle) = \langle |y_1 - y_2|, |\nu_{y_1} - \nu_{y_2}| \rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R},$$

$$\boldsymbol{\rho}_z(\langle Z_1 \rangle, \langle Z_2 \rangle) = \langle |z_1 - z_2|, |\nu_{z_1} - \nu_{z_2}| \rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$$

– интервальные расстояния по осям $O\langle X \rangle$, $O\langle Y \rangle$ и $O\langle Z \rangle$ соответственно между точками

$$U_i = (\langle X_i \rangle, \langle Y_i \rangle, \langle Z_i \rangle) \in \mathbf{I}_s^3\mathbf{R}, \ \langle X_i \rangle = \langle x_i, \nu_{x_i} \rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R},$$

$$\langle Y \rangle = \langle y_i, \nu_{y_i} \rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}, \ \langle Z_i \rangle = \langle z_i, \nu_{z_i} \rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}, \ i = 1,2.$$

В арифметическом евклидовом пространстве R^3 границу frP параллелепипеда $P \subset R^3$ с метрическими характеристиками $m = (a,b,c)$ можно представить в виде

$$frC(u) = \{u \in R^3 \,|\, \varphi(u) = 0\},$$

где
$$\varphi(u) = \max_{i=1,2,\ldots,6} \chi_i(u),$$

$$\chi_1(u) = x - a, \ \chi_2(u) = y - b, \ \chi_3(u) = z - c, \quad (1)$$

$$\chi_4(u) = -x, \ \chi_5(u) = -y, \ \chi_6(u) = -z,$$

$u_0 = (0,0,0)$ – начало собственной системы координат параллелепипеда.

При этом уравнения (1) ориентированы таким образом, что $\chi_i(u_0) \le 0, \forall i \in J_6$. Тогда параллелепипед $P \subset R^3$ можно определить таким образом:

$$P(u) = \{u \in R^3 \,|\, \varphi(u) \le 0\}.$$

Используя полученное представление параллелепипеда, построим математическую модель параллелепипеда с учетом погрешностей исходных данных в интервальном пространстве $\mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$. С этой целью рассмотрим интервальное уравнение интервальной гиперплоскости (например, [5]):

$$\varphi(a \cdot \langle X \rangle) + \varphi(b \cdot \langle Y \rangle) + \varphi(c \cdot \langle Z \rangle) + \langle D \rangle = \mathbf{0}, \qquad (2)$$

где $U = (\langle X \rangle, \langle Y \rangle, \langle Z \rangle) \in \mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$, $a,b,c \in R^1$,

$$\varphi(\mu \cdot \langle X \rangle) = \begin{cases} \mu \cdot \langle X \rangle, & \text{если } \mu \ge 0; \\ \mu \cdot \overline{\langle X \rangle}, & \text{если } \mu < 0, \end{cases}$$

$\langle D \rangle = \langle d, \nu_d \rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$, $\mu \in R^1$, $\langle X \rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$.

За интервальный параллелепипед примем интервальное множество вида

$$\mathbf{P} = \{U \in \mathbf{I}_s^3\mathbf{R} \,|\, \boldsymbol{\chi}(U) \le \mathbf{0}\},$$

$$\mathbf{P} = (\mathbf{I}_s^3\mathbf{R} \setminus \operatorname{cl}\mathbf{P}) \cup \mathbf{frP} \subset \mathbf{I}_s^3\mathbf{R},$$

где интервальная граница $\mathbf{frP}$ определяется интервальным уравнением

$$\boldsymbol{\chi}(U) = \mathbf{0},$$

$$\boldsymbol{\chi}(U) = \max_{j=1,2,\ldots,6} \boldsymbol{\chi}_j(U),$$

где $\boldsymbol{\chi}_j(U)$ – интервальные уравнения интервальных гиперплоскостей $\mathbf{\Pi}_j$, $j \in J_6$, участвующих в формировании интервальной границы $\mathbf{fr\,P}$.

Полагаем, что полюс $(\langle 0, \nu_{a_i} \rangle, \langle 0, \nu_{b_i} \rangle, \langle 0, \nu_{c_i} \rangle)$, $\nu_{a_i}, \nu_{b_i}, \nu_{c_i} \in R^+$, интервального параллелепипеда $\mathbf{P}_i$, $i \in J_n^0 = \{0,1,\ldots n\}$, совпадает с началом собственной системы координат.

Пусть интервальные уравнения интервальных гиперплоскостей $\mathbf{\Pi}_{ij}$, $i \in J_n$, $j \in J_6$, имеют вид:

$$\boldsymbol{\chi}_{ij}(U) = \mathbf{0}, \ \boldsymbol{\chi}_{i1}(U) = \langle X \rangle - \overline{\langle A_i \rangle}, \ \boldsymbol{\chi}_{i2}(U) = \langle Y \rangle - \overline{\langle B_i \rangle},$$

$$\chi_{i3}(U)=\langle Z\rangle-\overline{\langle C_i\rangle}\,,\ \chi_{i4}(U)=-\overline{\langle X\rangle}+\langle 0,\nu_{a_i}\rangle\,,\quad (3)$$

$$\chi_{i5}(U)=-\overline{\langle Y\rangle}+\langle 0,\nu_{b_i}\rangle\,,\ \chi_{i6}(U)=-\overline{\langle Z\rangle}+\langle 0,\nu_{c_i}\rangle\,,$$

$$U=(\langle X\rangle,\langle Y\rangle,\langle Z\rangle)\in \mathbf{I}_s^3\mathbf{R}\,,\ i\in J_n\,.$$

Выбираем ориентацию интервальных уравнений (3) таким образом, чтобы $\chi_{ij}(U_0)\le \mathbf{0}$, $i\in J_n$, $j\in J_6$.

Тогда интервальным параллелепипедом будем считать интервальное множество

$$\mathbf{P}_i=(\mathbf{I}_s^3\mathbf{R}\setminus \mathrm{cl}\,\mathbf{P}_i)\cup \mathbf{fr}\mathbf{P}_i\subset \mathbf{I}_s^3\mathbf{R}\,,\qquad (4)$$

$$\mathbf{P}_i=\{U\in \mathbf{I}_s^3\mathbf{R}\,|\,\chi_{ij}(U_0)<\mathbf{0},\ j=1,\ldots 6\}\,,\ i\in J_{n_\lambda}\,,$$

интервальные уравнения (3) интервальных гиперплоскостей.

В качестве математической модели параллелепипеда $P_i^\lambda\subset R^3$, $i\in J_n$, цвета $\lambda\in J_\tau$ длиной a_i, имеющей исходную погрешность ν_{a_i} по оси абсцисс, шириной b_i, имеющей исходную погрешность ν_{b_i} по оси ординат, и высотой c_i, имеющей исходную погрешность ν_{c_i} по оси аппликат, в пространстве $\mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$ можно принять интервальный параллелепипед $\mathbf{P}_i^\lambda\subset \mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$, $\mathbf{P}_i^\lambda=(\mathbf{I}_s^3\mathbf{R}\setminus \mathrm{cl}\,\mathbf{P}_i^\lambda)\cup \mathbf{fr}\mathbf{P}_i^\lambda$, $i\in J_n$, цвета $\lambda\in J_\tau$, который задается выражениями (3), (4).

В качестве математической модели области размещения $P_0\subset R^3$, метрические характеристики которого (a_0,b_0,c_0) имеют исходные погрешности ν_{a_0}, ν_{b_0}, ν_{c_0} в пространстве $\mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$ возьмем интервальный параллелепипед $\mathbf{P}_0=(\mathrm{int}\,\mathbf{P}_0\cup \mathbf{fr}\mathbf{P}_0)\subset \mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$.

За математическую модель η-й зоны запрета $\upsilon_{ij\eta}\subset P_{ij}\subset P_0\subset R^3$ $i\in J_k$, $j\in J_m$, $\eta\in J_q$, с учетом погрешностей исходных данных примем интервальный параллелепипед $\boldsymbol{\upsilon}_{ij\eta}\subset \mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$.

Определим

$$\langle A_\alpha\rangle=\max_{1\le i\le n}\max_{1\le\lambda\le\tau}\langle A_i^\lambda\rangle\,,\ \langle B_\beta\rangle=\max_{1\le i\le n}\max_{1\le\lambda\le\tau}\langle B_i^\lambda\rangle\,,$$

которые берутся в соответствии с определением максимума конечного набора элементов пространства $\mathbf{I}_s\mathbf{R}$ (например, [5]).

Основываясь на введенной в $\mathbf{I}_s\mathbf{R}$ операции интервального деления [3] и определении целой части интервального числа, осуществим разбиение интервального параллелепипеда $\mathbf{P}_0$ на $p=k\cdot m$ интервально касающихся по осям $O\langle X\rangle$ и $O\langle Y\rangle$ подобластей $\mathbf{P}_{ij}\subset \mathbf{P}_0$, $i\in J_k$, $j\in J_m$, где $\langle k\rangle=[\langle A_0\rangle/\langle A_\alpha\rangle]$, $\langle m\rangle=[\langle B_0\rangle/\langle B_\beta\rangle]$, $[\langle\cdot\rangle]$ – целая часть $\langle\cdot\rangle\in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$.

На основе разбиения интервальной области $\mathbf{P}_0$ на подобласти $\mathbf{P}_{ij}\subset \mathbf{P}_0$, $i\in J_k$, $j\in J_m$, с учетом наличия интервальных зон запрета, область размещения $\bigcup_{i=1}^{k}\bigcup_{j=1}^{m}(\mathbf{P}_{ij}\setminus(\bigcup_{\eta=1}^{r_{ij}}\boldsymbol{\upsilon}_{ij\eta}))\subset \mathbf{P}_0$.

На основании введенных понятий и определений оптимизационную задачу размещения цветных параллелепипедов $P_i^\lambda\subset R^3$, $i\in J_n$, $\lambda\in J_\tau$, в параллелепипеде $P_0\subset R^3$, имеющем зоны запрета, с учетом погрешностей исходных данных можно рассматривать как задачу размещения цветных интервальных параллелепипедов $\mathbf{P}_i^\lambda\subset \mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$, $i\in J_n$, $\lambda\in J_\tau$, в интервальной области $\mathbf{P}_0\subset \mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$, которые определяются соотношениями (3) – (4).

Исходя из того, интервальное расстояние между интервально параллельными интервальными гиперплоскостями $\mathbf{\Pi}_1,\mathbf{\Pi}_2$ вычисляется по формуле $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{\Pi}_1,\mathbf{\Pi}_2)=\langle |d_1-d_2|,|\nu_{d_1}-\nu_{d_2}|\rangle$, где $\langle D_i\rangle=\langle d_i,\nu_{d_i}\rangle$, $i=1,2$, есть интервальные свободные члены в (2), интервальная высота $\langle H_i\rangle$ интервального параллелепипеда $\mathbf{P}_i^\lambda\subset \mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$, $i\in J_n^0$, $\lambda\in J_\tau$, как интервальное расстояние между $\mathbf{\Pi}_{i3},\mathbf{\Pi}_{i6}$, равна $\langle H_i\rangle=\langle c_i,2\nu_{c_i}\rangle$.

Аналогично, интервальная длина интервального параллелепипеда $\boldsymbol{\upsilon}_{ij\eta}\subset \mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$, $\eta\in J_{\rho_{ij}}$, $i\in J_k$,

$j \in J_m$, будет равна $\langle H_{ij\eta} \rangle = \langle d_{ij}^{\eta} - l_{ij}^{\eta}, \nu_{d_{ij}^{\eta}} + \nu_{l_{ij}^{\eta}} \rangle$.

Пусть в $\mathbf{P}_{ij}$, $i \in J_k, j \in J_m$, размещены интервальные параллелепипеды $\mathbf{P}_{ij}^1, ..., \mathbf{P}_{ij}^t, \mathbf{P}_{ij}^{t+1}, ..., \mathbf{P}_{ij}^{r_{ij}}$, $r_{ij} \in J_n$.

Исходя из того, что для интервально касающихся интервальных гиперплоскостей, интервально параллельных интервальной координатной плоскости $\langle X \rangle O \langle Y \rangle$, выполняется $|z_1 - z_2| = |\nu_{z_1} + \nu_{z_2}|$, с учетом интервального расстояния между $\mathbf{P}_{ij}^t \subset \mathbf{P}_{ij}$ и $\mathbf{P}_{ij}^{t+1} \subset \mathbf{P}_{ij}$, $i \in J_k$, $i \in J_m$, $i \neq j$, получим

$$\boldsymbol{\rho}(\mathbf{P}_{ij}^t, \mathbf{P}_{ij}^{t+1}) = \langle \left| \nu_{d_{ij}^{t+1}} + \nu_{d_{ij}^t} \right|, \left| \nu_{d_{ij}^{t+1}} - \nu_{d_{ij}^t} \right| \rangle,$$

где $\nu_{d_{ij}^{t+1}}, \nu_{d_{ij}^t}$, $i \in J_k, j \in J_m$, $t \in J_{r_{ij}}$ – погрешности свободных членов интервальных уравнений гиперплоскостей $\mathbf{\Pi}_{t3}, \mathbf{\Pi}_{(t+1)6}$, участвующих в формировании интервальной границы параллелепипедов $\mathbf{P}_{ij}^t, \mathbf{P}_{ij}^{t+1}$.

За интервальную высоту $\langle H_{ij} \rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$, $i \in J_k, j \in J_m$, занятой части интервальной области $\mathbf{P}_{ij} \subset \mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$ принимаем интервальное расстояние между интервальной координатной плоскостью $\langle X \rangle O \langle Y \rangle$ и интервальными гиперплоскостями, участвующими в формировании интервальной границы $\mathbf{fr}\,\mathbf{P}_{ij}^{r_{ij}}$, здесь $\mathbf{P}_{ij}^{r_{ij}}$ – интервальный параллелепипед, помещенный в $\mathbf{P}_{ij}$ последним.

Очевидно, величина $\langle H_{ij} \rangle$ равна сумме интервальных высот интервальных параллелепипедов, помещенных в $\mathbf{P}_{ij}$, с учетом интервального расстояния между ними по оси $O\langle Z \rangle$ при условии, что данные интервальные параллелепипеды интервально касаются [5]:

$$\langle H_{ij} \rangle = \sum_{t=1}^{r_{ij}} (\langle H_{ij}^t \rangle + \boldsymbol{\rho}(\mathbf{P}_{ij}^{t-1}, \mathbf{P}_{ij}^t) + \boldsymbol{\rho}(\mathbf{v}_{ij\eta}, \mathbf{v}_{ij\eta})), \quad \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} r_{ij} = n,$$

где $\langle H_{ij}^t \rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$, $t \in J_{r_{ij}}$, $i \in J_k, j \in J_m$, – интервальная высота интервального параллелепипеда $\mathbf{P}_{ij}^t$, упакованного в $\mathbf{P}_{ij} \subset \mathbf{P}_0$ на t-е место.

За интервальную высоту $\langle H \rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$ занятой части интервальной области $\mathbf{P}_0$ примем

$$\langle H \rangle = \max_{1 \le i \le k} (\max_{1 \le j \le m} \langle H_{ij} \rangle),$$

где $\langle H_{ij} \rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$, $i \in J_k, j \in J_m$.

Осуществим погружение [1] множества всех интервальных полиперестановок вида $\mathbf{P}_{ng}(\mathbf{G}, W) \subset \mathbf{I}_s\mathbf{R}$ в n-мерное интервальное пространство $\mathbf{I}_s^n\mathbf{R}$. Для этого всякому элементу $\boldsymbol{\pi} \in \mathbf{P}_{ng}(\mathbf{G}, W)$ поставим в соответствие элемент

$$U = \mathbf{X} = (\langle X_1 \rangle, \langle X_2 \rangle, ..., \langle X_n \rangle) =$$
$$= (\langle X_{11}^1 \rangle, ..., \langle X_{11}^{r_{11}} \rangle, ..., \langle X_{km}^1 \rangle, ..., \langle X_{km}^{r_{km}} \rangle) \in \mathbf{I}_s^n\mathbf{R}$$

по следующему закону $\boldsymbol{\theta} : \boldsymbol{\pi} \to \mathbf{X}$,

$$\langle \pi_j \rangle = \langle X_j \rangle, \ \forall \boldsymbol{\pi} = (\langle \pi_1 \rangle, \langle \pi_2 \rangle, ..., \langle \pi_n \rangle),$$

$$\langle X_j \rangle = \langle G_{\alpha_i} \rangle, \ j \in J_n, \ \langle G_{\alpha_i} \rangle \in \mathbf{G}, \ \alpha_i \in J_n, \ i \in J_n.$$

Обозначим через $\mathbf{E}_{ng}(\mathbf{G}, W) = \boldsymbol{\theta}(\mathbf{P}_{ng}(\mathbf{G}, W))$, $\mathbf{E}_{ng}(\mathbf{G}, W) \subset \mathbf{I}_s^n\mathbf{R}$ образ множества всех интервальных полиперестановок) $\mathbf{P}_{ng}(\mathbf{G}, W) \subset \mathbf{I}_s\mathbf{R}$ при отображении $\boldsymbol{\theta}$.

Пусть $n_{ij}^{\eta\lambda} \in J_n$ – максимальное количество [2] параллелепипедов цвета λ, $\lambda \in J_\tau$, которые могут быть упакованы после η-й зоны запрета до следующей (если она есть) зоны запрета в области $\mathbf{P}_{ij}$, $i \in J_k$, $j \in J_m$.

Поставим в соответствие некоторому размещению разбиение индексного множества J_n на τ множеств по количеству цветов размещаемых параллелепипедов $n_1, n_2, ..., n_\tau$ так, что $n_i \cap n_j = \varnothing$, $n_i \neq \varnothing$, $\forall i, j \in J_\tau$, $n_\lambda = |n_\lambda|$, $\lambda \in J_\tau$.

Положим

$$n_\lambda = \{\gamma_{ij}^{\eta\lambda}, \gamma_{ij}^{\eta\lambda} + 1, ..., \gamma_{ij}^{\eta\lambda} + n_{ij}^{\eta\lambda} - 1 | \forall i \in J_k, \ \forall j \in J_m, \forall \eta \in J_{r_{ij}}\}, \ \forall \lambda \in J_\tau, \quad (5)$$

где величины $n_{ij}^{\eta\lambda}$ и $\gamma_{ij}^{\eta\lambda}$ вычисляются следующим образом:

$$\gamma_{ij}^{\eta\lambda} = \sum_{t=1}^{i-1}\sum_{j=1}^{r_{ij}} n_{ij}^{\eta\lambda} + \sum n_{ij}^{\eta\lambda} + 1 \cdot$$

Очевидно, $\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}\sum_{\eta=1}^{r_{ij}} n_{ij}^{\eta\lambda} = n_{\lambda}$, $\forall\lambda \in J_{\tau}$.

Обозначим через $\mathbf{G} \subset \mathbf{I}_s\mathbf{R}$ интервальное мультимножество:

$$\mathbf{G} = \{\langle H_{11}^{1}\rangle,...,\langle H_{11}^{r_{11}}\rangle,\langle H_{12}^{1}\rangle,\langle H_{12}^{2}\rangle,...,\langle H_{12}^{r_{12}}\rangle,...,\langle H_{km}^{r_{km}}\rangle)\},$$

g из n элементов которого различны.

Составим упорядоченный набор $\boldsymbol{\pi}$ элементов интервального множества $\mathbf{G} \subset \mathbf{I}_s\mathbf{R}$, соответствующий данному размещению.

Получим интервальную полиперестановку

$$\boldsymbol{\pi} = (\boldsymbol{\pi}^1, \boldsymbol{\pi}^2,...,\boldsymbol{\pi}^{\tau}),$$

$$\boldsymbol{\pi}^{\lambda} = (\langle C_{\gamma_{11}^{1}}^{\lambda}\rangle,...,\langle C_{\gamma_{11}^{2}}^{\lambda}\rangle,...,\langle C_{\gamma_{1m}^{\rho_{1m}}}^{\lambda}\rangle,\langle C_{\gamma_{2k}^{1}}^{\lambda}\rangle...,\langle C_{\gamma_{km}^{\rho_{km1}}}^{\lambda}\rangle),$$

$$\forall\lambda \in J_{\tau},$$

на множестве, соответствующему разбиению (5) индексного множества J_n.

Тогда математическая модель комбинаторной оптимизационной задачи размещения цветных интервальных параллелепипедов $\mathbf{P}_i^{\lambda} \subset \mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$, $i \in J_n$, в интервальной области $\mathbf{P}_0$ примет такой вид:

найти

$$\langle H^*\rangle = \langle h^*, \nu_h^*\rangle = \min_{U \in \mathbf{E}_{ng}(\mathbf{G},W)} \langle H\rangle,$$

где $\langle H\rangle = \max\limits_{1\le i\le m}(\max\limits_{1\le j\le k}\langle H_{ij}\rangle)$, $\langle H_{ij}\rangle = \langle H'_{ij}\rangle + \langle H''_{ij}\rangle$,

$$\langle H'_{ij}\rangle = \sum_{\lambda=1}^{\tau}(\sum_{t=1}^{r_{ij}}\langle X_{ij}^{t\lambda}\rangle +$$

$$+\sum_{t=1}^{r_{ij}-1}\langle\left|\nu_{X_{ij}^{t\lambda}} + \nu_{X_{ij}^{(t+1)\lambda}}\right|,\left|\nu_{X_{ij}^{t\lambda}} - \nu_{X_{ij}^{(t+1)\lambda}}\right|\rangle),$$

$$\langle H''_{ij}\rangle = \sum_{\eta=1}^{\rho_{ij}}\langle H_{ij\eta}\rangle, \ i \in J_k, \ j \in J_m,$$

при ограничениях

$$\sum_{p=\gamma_{ij}^{\eta\lambda}}^{\gamma_{ij}^{(\eta+1)\lambda}}\left(\sum_{\lambda=1}^{\tau}\sum_{t=1}^{r_{ij}}\langle X_{ijp}^{t\lambda}\rangle +\right.$$

$$\left.+\sum_{t=1}^{r_{ij}-1}\langle\left|\nu_{X_{ijp}^{t\lambda}} + \nu_{X_{ijp}^{(t+1)\lambda}}\right|,\left|\nu_{X_{ijp}^{t\lambda}} - \nu_{X_{ijp}^{(t+1)\lambda}}\right|\rangle\right) \le \langle H_{ij\eta}\rangle.$$

Заключение

Построенная интервальная математическая модель комбинаторной оптимизационной задачи цветной упаковки параллелепипедов с учетом погрешностей исходных данных позволяет, с одной стороны, рационально учесть погрешности исходных данных уже на этапе моделирования задачи, с другой – в дальнейшем, при ее реализации использовать известные методы комбинаторной оптимизации.

Модель ожет быть использована при тестировании программного обеспечения, при моделировании задач компоновки сложных технических систем.

Литература

1. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. – К.: Наук. думка, 1986. – 267 с.

2. Стоян Ю.Г., Ємець О.О. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. − К.: ІСДО, 1993. − 188 с.

3. Стоян Ю.Г. Метрическое пространство центрированных интервалов // Доклады НАН Украины. – 1996. – № 7. – С. 23-25.

4. Романова Т.Е. Интервальное пространство $\mathbf{I}_s^n\mathbf{R}$ // Доклады НАН Украины. – 2000. – № 9. – С. 36-41.

5. Евсеева Л.Г. Интервальная математическая модель комбинаторной оптимизационной задачи размещения интервальных параллелепипедов // Системи обробки інформації. – Х.: ХВУ. – 2006. – Вип. 3 (52). – С. 198-208.

Поступила в редакцию 18.03.2006

Рецензент: д-р техн. наук, ст. научн. сотр. Н.И. Гиль, Институт проблем машиностроения НАН Украины, Харьков.