УДК 681.324

Л.Г. РАСКИН, О.В. СЕРАЯ, П.Е. ПУСТОВОЙТОВ

Национальный технический университет
«Харьковский политехнический институт», Украина

АНАЛИЗ ИНФОРМАЦИОННОЙ ГАРАНТОСПОСОБНОСТИ КОМПЬЮТЕРНЫХ СЕТЕЙ

Для оценки эффективности функционирования компьютерной сети введен критерий информационной гарантоспособности. Получены соотношения для расчета критерия, позволяющие обосновать требования к параметрам системы обработки сообщений.

компьютерные системы, критерий информационной гарантоспособности, пиковые нагрузки, потеря сообщений

Постановка проблемы. Обзор публикаций

Типичной особенностью функционирования корпоративных компьютерных сетей является нестационарность трафика. Временные графики нагрузки для таких сетей имеют явно выраженные сезонные колебания. Однако, наибольшую опасность представляют суточные колебания нагрузки ввиду их достаточно высокой амплитуды. При проектировании КС из экономических соображений обычно исходят из предположений о средней нагрузке.

Поэтому в условиях пиковой нагрузки сеть не справляется с обслуживанием – растет очередь необслуженных заявок.

Возникающая при этом ситуация является достаточно типичной. Когда длина очереди достигнет критической, поступающие сообщения будут теряться. Способность системы нормально функционировать в условиях пиковых нагрузок без потерь информации естественно называть информационной гарантоспособностью. Известны меры противодействия негативным последствиям перегрузок системы. К числу традиционных методов борьбы с перегрузкой относятся: противодавление [1], сдерживающий пакет, явная и неявная сигнализация о перегрузке [2] и др.

Перечисленные способы обеспечения нормального функционирования сети эффективны, но и достаточно сложны в реализации. Кроме того, их применение, естественно, расходует ресурс системы, причем, практически одинаковый независимо от уровня перегрузки. Вместе с тем, в ситуациях, когда для конкретной сети имеются статистические данные относительно уровня и продолжительности воздействия пиковой нагрузки, могут быть предприняты меры, адекватные ситуации, возникающей в процессе функционирования именно этой сети. Эти меры могут быть реализованы путем использования аппаратных или программных средств для увеличения критической длины очереди.

Постановка задачи исследования

Пусть на вход n-канальной компьютерной сети поступает суперпозиция входящих потоков суммарной средней интенсивности λ, а средняя интенсивность обслуживания равна μ. Суммарная средняя интенсивность λ может быть вычислена, если известны плотность распределения $f(x)$ случайной интенсивности входящего потока стандартным образом по формуле

$$\lambda = \int_0^\infty v f(v) dv .$$

Система обслуживает заявки без потерь с образованием очереди необслуженных заявок. Пусть критическая длина очереди равна q_0. Предположим далее, что известны законы распределения уровня пиковой нагрузки и продолжительности ее воздействия. Введем критерий информационной гарантоспособности сети – вероятность того, что в условиях воздействия пиковой нагрузки случайная длина очереди не превысит критическую. Поставим задачу расчета значения критерия в типичных для конкретной сети условиях ее функционирования.

Основные результаты

Найдем общее выражение для закона распределения случайного времени достижения длиной очереди критического значения. Граф состояний и переходов для n-канальной системы без потерь имеет вид, приведенный на рис. 1.

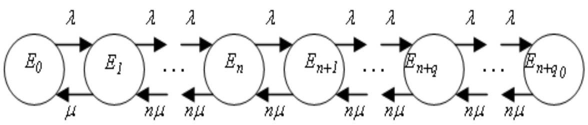

Рис. 1. Граф состояний
и переходов системы без потерь

Введем набор вероятностей состояний системы для произвольного момента t:

$$P(t) = (P_0(t), P_1(t), ..., P_n(t), ..., P_{n+s}(t), ...).$$

Запишем систему дифференциальных уравнений Колмогорова относительно вероятностного распределения $P(t)$, содержащую бесконечное число уравнений:

$$\begin{aligned}
&\dot{P}_0(t) = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t);\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\dot{P}_k(t) = \lambda P_{k-1}(t) + (k+1)\mu P_{k+1}(t) - (\lambda + k\mu) P_k(t);\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\dot{P}_{n+q}(t) = \lambda P_{n+q-1}(t) + n\mu P_{n+q-1}(t) - (\lambda + n\mu) P_{n+q}(t);\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{1}$$

Используя преобразование Лапласа, трансформируем (1) в систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}
&(s+\lambda)\pi_0(s) - \mu\pi_1(s) = P_0(0);\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&-\lambda\pi_{k-1}(s) + (s+\lambda+k\mu)\pi_k(s) - (k+1)\mu\pi_{k+1}(s) = P_k(0);\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&-\lambda\pi_{n+q-1}(s) + (s+\lambda+n\mu)\pi_{n+q}(s) - n\mu\pi_{n+q+1}(s) = P_{n+q}(0);\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{2}$$

В полученной системе (2) просуммируем уравнения с номерами, начиная от $n+q_0$-го. В результате суммирования, очевидно, получим

$$\begin{aligned}
&-\lambda\pi_{n+q_0-1}(s) + (s+n\mu)\pi_{n+q_0}(s) +\\
&+ s\pi_{кр}(s) = \sum_{r=n+q_0}^{\infty} P_r(0),
\end{aligned} \tag{3}$$

где $\pi_{кр}(s) = \sum_{r=n+q_0+1}^{\infty} \pi_r(s)$.

Заметим, что $\pi_{кр}(s)$ есть преобразование Лапласа от $P_{кр}(t) = \sum_{r=n+q_0+1}^{\infty} P_r(t)$, вероятности того, что в момент t длина очереди превзойдет критическое значение q_0.

Будем считать, что в момент $t = 0$ начала действия пиковой нагрузки система находится в некотором случайном состоянии E_k, $0 \le k \le q_0$. При этом распределение вероятностей состояний системы в момент $t = 0$ будет иметь вид $P(0) = (00...010...)$, где единица стоит на k-й позиции.

Тогда, с учетом (3), система (2) с бесконечным числом уравнений преобразуется в конечную систему, содержащую $n+q_0+1$ уравнений. Эта система, дополненная условием нормировки, имеет вид:

$$\begin{aligned}
&(s+\lambda)\pi_0(s) - \mu\pi_1(s) = 1;\\
&-\lambda\pi_0(s) + (s+\lambda+\mu)\pi_1(s) - 2\mu\pi_2(s) = 0;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&-\lambda\pi_{k-1}(s) + (s+\lambda+k\mu)\pi_k(s) - (k+1)\mu\pi_{n+1}(s) = 1;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&-\lambda\pi_{n+q_0-1}(s) + (s+n\mu)\pi_{n+q_0}(s) + s\pi_{кр}(s) = 0;\\
&s(\pi_0(s) + \pi_1(s) + ... + \pi_{n+q_0}(s) + \pi_{кр}(s)) = 1.
\end{aligned} \tag{4}$$

Решим полученную систему линейных алгебраических уравнений (4) относительно переменных

$\pi_0(s), \pi_1(s), \ldots, \pi_{n+q_0}(s), \pi_{кр}(s)$ в явном виде с целью выполнения в последующем обратного преобразования Лапласа.

Составим матрицу A коэффициентов перед неизвестными и вектор столбец P свободных членов:

$$A=\begin{pmatrix} (s+\lambda) & -\mu & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda & (s+\lambda+\mu) & -2\mu & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -\lambda & (s+\lambda+n\mu) & n\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -\lambda & (s+\lambda+n\mu) & 0 \\ s & s & s & \ldots & s & s & s & s \end{pmatrix};$$

$$P^T = (00...010...01).$$

Теперь, используя формулы Крамера, можно вычислить значение любого неизвестного. В частности, представляющее особый интерес в решаемой задаче, неизвестное $\pi_{кр}(s)$ определяется соотношением

$$\pi_{кр}(s) = \frac{\det A_{n+q_0+1}(s)}{\det A(s)}, \qquad (5)$$

где A_{n+q_0+1} – матрица A, в которой последний ($n+q_0+1$)-й столбец заменен столбцом P свободных членов.

К сожалению, непосредственное использование формулы (5) для получения аналитического выражения, описывающего $\pi_{кр}(s)$, невозможно. Дело в следующем. Понятно, что $\det A_{n+q_0+1}(s)$ и $\det A(s)$ – есть, соответственно, полиномы ($n+q_0$)-й и ($n+q_0+1$)-й степеней от s. При этом их аналитические описания, разумеется, можно получить для любой конкретной системы с заданными значениями n и q_0. Однако, решить эту задачу в общем виде не представляется возможным. В связи с этим поступим следующим образом. Запишем соотношение (5), используя полиномиальные описания $\det A_{n+q_0+1}(s)$ и $\det A(s)$:

$$\pi_{кр}(s) = \frac{a_0 + a_1 s + \ldots + a_{n+q_0} s^{n+q_0}}{b_0 + b_1 s + \ldots + b_{n+q_0} s^{n+q_0} + s^{n+q_0+1}}. \qquad (6)$$

В этом соотношении $2(n+q_0+1)$ неизвестных коэффициентов, подлежащих определению. Перепишем (6), избавившись от знаменателя,

$$\begin{aligned} s^{n+q_0+1}\cdot\pi_{кр}(s) &= a_0 + a_1 s + \ldots + a_{n+q_0} s^{n+q_0} - b_0\pi_{кр}(s) - \\ &- b_1 s\pi_{кр}(s) - \ldots - b_{n+q_0} s^{n+q_0}\pi_{кр}(s). \end{aligned} \qquad (7)$$

Зададим набор $s = \{s_1, s_2, \ldots, s_{2(n+q_0+1)}\}$ значений параметра s и подставим эти значения последовательно в (7). При этом для произвольного s_k получим:

$$\begin{aligned} s_k^{n+q_0+1}\cdot\pi_{кр}(s_k) &= a_0 + a_1 s_k + \ldots + a_{n+q_0} s_k^{n+q_0} - b_0\pi_{кр}(s_k) - \\ &- b_1 s_k\pi_{кр}(s_k) - \ldots - b_{n+q_0} s_k^{n+q_0}\pi_{кр}(s_k). \end{aligned} \qquad (8)$$

Здесь $\pi_{кр}(s_k)$ – результат непосредственного расчета значения $\pi_{кр}(s)$ при подстановке s_k в (5).

В целях удобства, осуществим преобразование переменных и коэффициентов в соотношении (8):

$$m = n + q_0 + 1;$$

$$x_i = \begin{cases} a_{i-1}, & i = 1,2,\ldots,m; \\ b_{i-m-1}, & i = m+1, m+2, \ldots, 2m; \end{cases}$$

$$c_k = s_k^{n+q_0+1}\pi_{кр}(s_k);$$

$$d_{ik} = \begin{cases} s_k^{i-1}, & i = 1,2,\ldots,m; \\ s_k^{i-m-1}\cdot\pi_{кр}(s_k), & i = m+1, m+2, \ldots, 2m, \quad k = 1,2,\ldots,m. \end{cases}$$

Теперь уравнения (8) приобретают стандартный для линейных алгебраических уравнений вид:

$$\sum_{i=1}^{2m} d_{ik} x_i = c_k, \quad k = 1,2,\ldots,m. \qquad (9)$$

Решение этой системы определяют искомые коэффициенты полиномов в соотношении (6).

Следующий шаг – процедура проведения обратного преобразования может быть реализована путем разложения дробно-рациональной функции (6) на элементарные дроби (или по формулам Хэвисайда) и не вызывает затруднений.

Пусть эта процедура проведена и получено аналитическое описание зависимости $P^k{}_{кр}(t)$, задающей для любого t значение условной вероятности того, что очередь превысит критическое значение

q_0, при условии, что пиковая нагрузка начала действовать в момент, когда система находилась в состоянии E_k.

Безусловная вероятность того, что длина очереди превысит критическую, рассчитывается следующим образом. Описанная выше технология последовательно используется для всех состояний E_k, в которых может находиться система в момент начала действия пиковой нагрузки. Для каждого из этих вариантов рассчитывается вероятность $P^k{}_{кр}(t)$, $k = 0,1,2,...,q_0 - 1$. Далее этот набор вероятностей усредняется с весами, задаваемыми распределением вероятностей состояний, полученным в предположении, что начальным состоянием было E_0, а интенсивность входящего потока равна средней допиковой.

Пусть теперь T – случайный момент времени, когда длина очереди превысит критическую. Тогда $F_{q_0}(t) = Вер(T \le t)$ – интегральный закон распределения этой случайной величины, определяется соотношением

$$F_{q_0}(t) = P_{кр}(t).$$

При этом плотность распределения случайной величины T имеет вид

$$f_{q_0}(t) = \frac{dF_{q_0}(t)}{dt}.$$

Предположим далее, что $g(t)$ есть плотность распределения случайной продолжительности T_n пиковой нагрузки.

Найдем значение критерия информационной гарантоспособности. Понятно, что искомое значение равно вероятности случайного события, состоящего в том, что случайная продолжительность пиковой нагрузки T_n окажется меньше, чем случайное время T достижения длиной очереди критического значения. При этом

$$P(T_n < T) = \int_0^\infty f_{q_0}(t) \int_0^t g(u)\, du dt. \qquad (11)$$

Теперь, с использованием (11), значения q_0 может быть выбрано таким образом, чтобы вероятность $P(T_n < T)$ была не меньше заданной $P_з$. С другой стороны, понятно, что это же соотношение может быть использовано для обоснования требований к интенсивности обслуживания, обеспечивающей выполнение неравенства $P(T_n < T) > P_з$.

Выводы

Таким образом, предложена методика расчета вероятности того, что в условиях воздействия на систему пиковой нагрузки длина очереди превысит критическую. Полученные соотношения позволяют выбрать параметры системы обработки так, чтобы вероятность потери сообщений из-за перегрузки не превосходила заданную.

Литература

1. Таненбаум Э. Компьютерные сети: Пер. с англ. – С.-Пб.: Питер, 2003. – 992 с.

2. Столлингс В. Современные компьютерные сети: Пер. с. англ. – С.-Пб.: Питер, 2003. – 783 с.

Поступила в редакцию 24.01.2006

Рецензент: д-р техн. наук, проф. А.С. Куценко, Национальный технический университет «ХПИ», Харьков.