

УДК 621.396.26

Ю.Н. КОРЖ, А.И. ТЫРТЫШНИКОВ

*Полтавский военный институт связи, Украина***ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ СИММЕТРИЧНЫХ ЦИФРОВЫХ
НЕРЕКУРСИВНЫХ ФИЛЬТРОВ ПРЕДСКАЗАНИЯ**

В статье рассмотрен вопрос повышения эффективности нерекурсивных цифровых фильтров предсказания по критерию минимума среднеквадратичной ошибки. Показывается, что для стационарных и нестационарных случайных процессов большую точность оценки обеспечивает фильтр с симметричной импульсной характеристикой.

цифровой фильтр, ошибка предсказания, случайный коррелированный процесс**Введение**

Задача оценивания параметров коррелированного случайного процесса решается с помощью фильтров предсказания нерекурсивной или решётчатой структуры [1, 2] которые, используя статистическую связь отсчётов, позволяют посредством весового суммирования получить с приемлемой точностью оценку требуемого параметра.

Такого рода фильтры могут использоваться для выделения полезного сигнала из принимаемой аддитивной смеси с помехой, когда из-за априорной неопределённости параметров сигнала (чаще всего амплитуды) оптимальная обработка невозможна. В радиолокации, принимая во внимание то, что пассивные помехи от подстилающей поверхности нестационарные по пространству, но имеют высокую позиционную стабильность, появляется возможность произвести оценку уровней мощности помехи и составить сравнительно долговременную карту помех со степенью градации до элемента пространственного разрешения РЛС [3].

Основной показатель качества фильтра предсказания – среднеквадратичная ошибка предсказания σ_e . Меньшую ошибку обеспечивают решётчатые структуры, но их реализация сложнее нерекурсивной. Предполагается, что за счёт изменения алго-

ритма обработки и порядка нерекурсивного фильтра (количества обрабатываемых отсчётов), возможно, при разумном компромиссе между сложностью реализации и достижением достаточной эффективности (максимальной точности оценки, минимальной σ_e) добиться максимума по критерию эффективность/стоимость.

В зависимости от условий использования фильтра, можно применять различные алгоритмы обработки: оценивание по предыдущим временным отсчётам, т.е. оценка в реальном масштабе времени; оценивание по последующим отсчётам, т.е. получение оценки с задержкой на определённый временной интервал; оценивание одновременно по предыдущим и последующим отсчётам, т.е. также получение оценки с задержкой. Ожидается, что эффективность этих алгоритмов будет различной (особенно для нестационарных случайных процессов) с примерно одинаковой стоимостью.

Постановка задачи: получить выражения для расчёта нормированной по дисперсии собственных шумов и случайного процесса минимальной σ_e . Провести сравнительный анализ эффективности КИХ-фильтров в зависимости от алгоритма расчёта весовых коэффициентов и порядка фильтра предсказания для различных уровней мощности и ширины спектра случайного процесса.

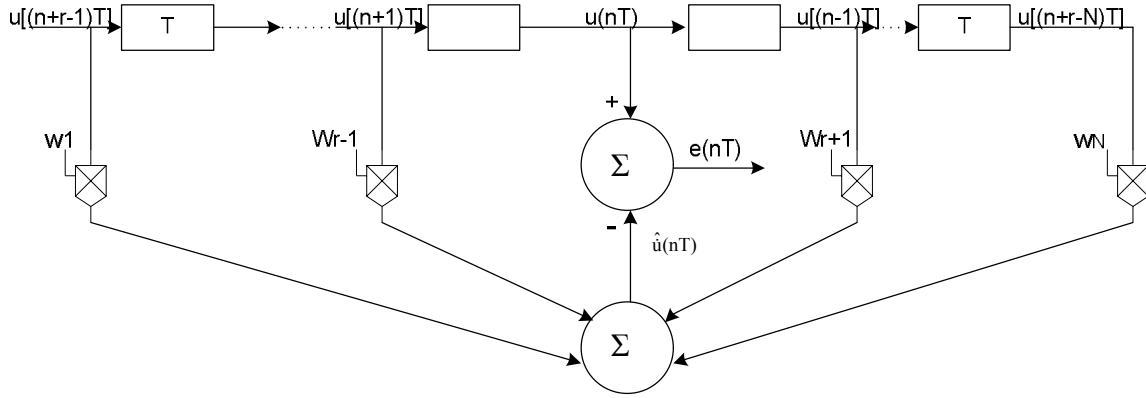


Рис. 1. Структурная схема нерекурсивного фильтра предсказания

Рассмотрим устройство оценки в виде нерекурсивного КИХ-фильтра порядка $N - 1$ (N – количество одновременно обрабатываемых в фильтре входных отсчётов), структура которого приведена на рис. 1, где $\dot{u}(nT) = \dot{u}_n(nT) + \dot{u}_u(nT)$ – n -й отсчёт комплексной амплитуды принимаемых в n -м тактовом интервале колебаний помехи и собственных шумов.

Значение $r = 1, \dots, N$ определяет количество предшествующих n -му ($r - 1$) и последующих за n -м ($N - r$) отсчётов, обрабатываемых в фильтре. Например, если $r = 1$, то весовое суммирование производится для $N - 1$ отсчётов предыдущих n -му отсчёту, если $r = N$, то для $N - 1$ отсчётов последующих за n -м.

Таким образом, оценка комплексной амплитуды $\hat{u}(nT)$ n -го отсчёта помехи образуется после линейного весового суммирования входных $N-1$ значений комплексных амплитуд помехи.

Соответственно

$$\hat{u}_r(nT) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq r}}^N \dot{u}(n+r-k)w_k, \quad (1)$$

где w_k – весовые коэффициенты фильтра.

В матрично-векторной форме выражение (1) можно записать в виде

$$\hat{u}_r(nT) = \dot{U}_r^T(nT)\dot{W}_r, \quad (2)$$

где $\dot{U}_r^T(nT) = \| u[(n+r-1)T], u[(n+1)T], u[(n-1)T], \dots, u[(n+r-N)T] \|$ – вектор-столбец комплексных амплитуд входных отсчётов.

Здесь и далее верхний индекс T обозначает

транспонирование вектора, нижний индекс r показывает зависимость значений компонент весового вектора от структуры фильтра (порядка обработки входных отсчётов).

В свою очередь, ошибка оценивания определяется как

$$e_r(nT) = \dot{u}_r(nT) - \dot{U}_r^T(nT)\dot{W}_r. \quad (3)$$

Соответственно дисперсия ошибки оценивания

$$\begin{aligned} \sigma_{e(r)}^2(nT) = \langle e_r^2(nT) \rangle = \langle (\dot{u}(nT) - \hat{u}(nT))(\dot{u}(nT) - \hat{u}(nT))^* \rangle = \langle (\dot{u}(nT) - \dot{W}_r^T \dot{U}_r(nT))(\dot{u}(nT) - \dot{W}_r^T \dot{U}_r(nT))^* \rangle = \langle \dot{u}(nT)\dot{u}(nT)^* \rangle - 2\dot{W}_r^T \langle \dot{u}(nT)\dot{U}_r(nT) \rangle + \dot{W}_r^T \langle \dot{U}_r^*(nT)\dot{U}_r(nT) \rangle \dot{W}_r, \end{aligned}$$

где $\langle \cdot \rangle$, $*$ – операции статистического усреднения и комплексного сопряжения соответственно.

Для стационарного случайного процесса

$$\sigma_{e(r)}^2 = \sigma_{nu}^2 - 2\dot{W}_r^T \dot{P}_r + \dot{W}_r^T \Phi_{nu(r)} \dot{W}_r, \quad (4)$$

где $\sigma_{nu}^2 = \langle \dot{u}(nT)\dot{u}(nT)^* \rangle = \sigma_n^2 + \sigma_u^2$ – дисперсия статистически независимой помехи и собственного шума; $\dot{P}_r^T = \langle \dot{u}(nT)\dot{U}_r^T(nT) \rangle = \| \varphi_{nu}^{1,r}, \varphi_{nu}^{2,r}, \dots, \varphi_{nu}^{r-1,r}, \varphi_{nu}^{r+1,r}, \dots, \varphi_{nu}^{N-1,r}, \varphi_{nu}^{N,r} \|$ – вектор-столбец взаимных ковариаций между оцениваемым отсчётом и отсчётами, которые подвергаются весовому суммированию; $\dot{W}_r^T = \| w_1, w_2, \dots, w_{r-1}, w_{r+1}, \dots, w_N \|$ – вектор-столбец весовых коэффициентов фильтра; $\Phi_{nu(r)} = \langle \dot{U}_r^* \dot{U}_r^T \rangle$ – автоковариационная матрица помехи и шума (далее КМП) с элементами $\varphi_{nu}^{i,k} =$

$$= \langle \dot{u}_{nu}^i \dot{u}_{nu}^{k*} \rangle = (\dot{u}_n^i + \dot{u}_{uu}^i) (\dot{u}_n^k + \dot{u}_{uu}^k)^* = \sigma_n^2 \rho_{ik} + \sigma_{uu}^2 \delta_{ik}, \quad i, k = 1, N; \quad i, k \neq r, \quad \text{где } \rho_{ik} - \text{коэффициент корреляции амплитудных флюктуаций помехи между } i \text{ и } k \text{ отсчётами, } \delta_{ik} - \text{символ Кронекера.}$$

В развёрнутом виде матрицу $\Phi_{nu(r)}$ можно записать как

$$\Phi_{nu(r)} = \begin{pmatrix} \Phi_{1,1} & \Phi_{1,r-1} & \Phi_{1,r+1} & \Phi_{1,N} \\ \Phi_{r-1,1} & \Phi_{r-1,r-1} & \Phi_{r-1,r+1} & \Phi_{r-1,N} \\ \Phi_{r+1,1} & \Phi_{r+1,r-1} & \Phi_{r+1,r+1} & \Phi_{r+1,N} \\ \Phi_{N,1} & \Phi_{N,r-1} & \Phi_{N,r+1} & \Phi_{N,N} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

откуда видно, что структура КМП предсказывающего фильтра зависит от порядкового номера оцениваемого отсчёта.

Уравнение (4) описывает квадратичную поверхность с единственным минимумом [1]. Следовательно, из уравнения $\partial \sigma_{e(r)}^2 / \partial \dot{W}^T = 0$ можно определить весовой вектор, обеспечивающий минимальную σ_e . Дифференцируя (4) по \dot{W}^T получаем известное соотношение Винера-Хопфа

$$\dot{W}_{onm(r)}^T = \Phi_{nu(r)}^{-1} \dot{P}_r \quad (6)$$

или, в другой форме записи

$$\Phi_{nu(r)} \dot{W}_{onm(r)}^T = \dot{P}_r. \quad (7)$$

Подставляя (7) в (4) получаем выражения для минимальной дисперсии ошибки оценивания

$$\sigma_{e(r)}^2_{мин} = \sigma_{nu}^2 - \dot{W}_{onm(r)}^T \dot{P}_r = \dot{P}_r^T \Phi_{nu(r)}^{-1} \dot{P}_r, \quad (8)$$

$$\sigma_{e(r)}^2_{мин} = \sigma_{nu}^2 - \dot{W}_{onm(r)}^T \Phi_{nu(r)} \dot{W}_{onm(r)}. \quad (9)$$

Нормированные, относительно дисперсий собственных шумов и помехи, значения $\sigma_{e(r)}^2_{мин}$:

$$\frac{\sigma_{e(r)}^2_{мин}}{\sigma_{uu}^2} = 1 + b - \dot{W}_{onm(r)}^T \Phi'_{nu(r)} \dot{W}_{onm(r)}, \quad (10)$$

$$\frac{\sigma_{e(r)}^2_{мин}}{\sigma_n^2} = 1 + 1/b - \dot{W}_{onm(r)}^T \Phi''_{nu(r)} \dot{W}_{onm(r)}, \quad (11)$$

где: $b = \sigma_n^2 / \sigma_{uu}^2$, $\Phi_{nu}^{ik'} = b \rho_{ik} + \delta_{ik}$, $\Phi_{nu}^{ik''} = \rho_{ik} + \delta_{ik} / b$.

Таким образом, потенциальная точность оценки комплексной амплитуды стационарного случайного процесса зависит от степени статистической взаимосвязи отсчётов, уровня мощности, порядка и структуры предсказывающего фильтра.

Для получения компонент оптимального весового вектора предсказывающего фильтра удобнее рассчитывать весовой вектор обеляющего фильтра, который после взвешенного линейного суммирования входных отсчётов формирует на выходе случайный некоррелированный процесс. Структура обеляющего фильтра приведена на рис. 2.

КМП обеляющего фильтра Φ_{nu}^o (12) проще по структуре:

$$\Phi_{nu}^o = \begin{pmatrix} \Phi_{nu}^{1,1} & \Phi_{nu}^{1,2} & \dots & \Phi_{nu}^{1,N} \\ \Phi_{nu}^{2,1} & \Phi_{nu}^{2,2} & \dots & \Phi_{nu}^{2,N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Phi_{nu}^{N,1} & \Phi_{nu}^{N,2} & \dots & \Phi_{nu}^{N,N} \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Соответственно можно показать, что матричное уравнение (7) эквивалентно уравнению

$$\Phi_{nu}^o \dot{W}_{onm(r)}^{oT} = I_r, \quad (13)$$

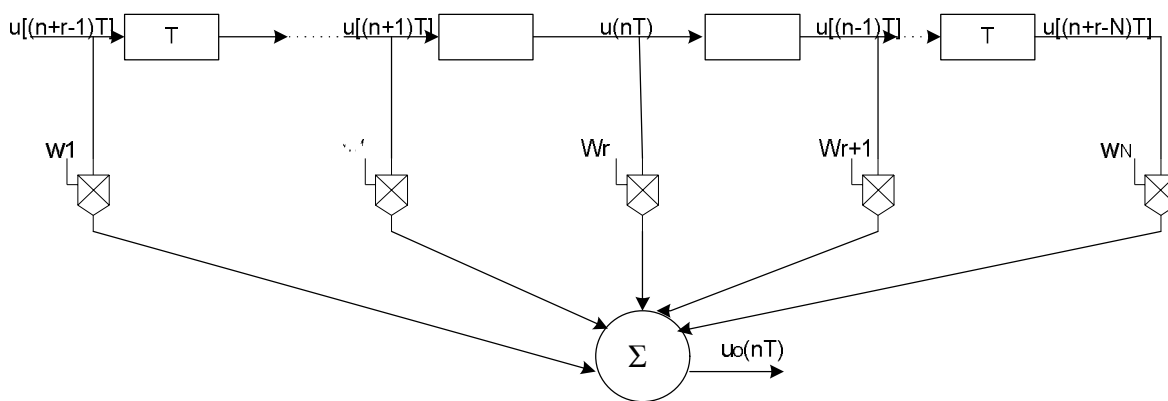


Рис. 2. Структурная схема обеляющего фильтра

где $I_r = \|\delta_{rk}\|$, $k=1, N$; $\dot{W}_{onm(r)}^{oT} = \|w_1^o, w_2^o, \dots, w_r^o, w_{r+1}^o, w_{r+1}^o, w_N^o\|$ – весовой вектор обеляющего фильтра. Действительно, система уравнений (7) запишется, как (в дальнейшем для сокращения записи обозначим $\varphi_{nu}^{i,k} = \varphi_{i,k}$):

$$\left\{ \begin{array}{l} w_1\varphi_{1,1} + w_2\varphi_{1,2} + \dots + w_{r-1}\varphi_{1,r-1} + \\ + w_{r+1}\varphi_{1,r+1} + \dots + w_N\varphi_{1,N} = \varphi_{1,r}; \\ \dots \\ w_1\varphi_{r-1,1} + w_2\varphi_{r-1,2} + \dots + w_{r-1}\varphi_{r-1,r-1} + \\ + w_{r+1}\varphi_{r-1,r+1} + \dots + w_N\varphi_{r-1,N} = \varphi_{r-1,r}; \\ w_1\varphi_{r+1,1} + w_2\varphi_{r+1,2} + \dots + w_{r-1}\varphi_{r+1,r-1} + \\ + w_{r+1}\varphi_{r+1,r+1} + \dots + w_N\varphi_{r+1,N} = \varphi_{r+1,r}; \\ \dots \\ w_1\varphi_{N,1} + w_2\varphi_{N,2} + \dots + w_{r-1}\varphi_{N,r-1} + \\ + w_{r+1}\varphi_{N,r+1} + \dots + w_N\varphi_{N,N} = \varphi_{N,r}. \end{array} \right. \quad (14)$$

По правилу Крамера [4] $w_i = \Delta_i/\Delta$, где Δ_i и Δ – соответственно i -й вспомогательный и главный определители системы уравнений (14), а система уравнений (13) запишется в развёрнутом виде как

$$\left\{ \begin{array}{l} w_1^o\varphi_{1,1} + \dots + w_{r-1}^o\varphi_{1,r-1} + w_r^o\varphi_{1,r} + \\ + w_{r+1}^o\varphi_{1,r+1} + \dots + w_N^o\varphi_{1,N} = 0; \\ \dots \\ w_1^o\varphi_{r-1,1} + \dots + w_{r-1}^o\varphi_{r-1,r-1} + w_r^o\varphi_{r-1,r} + \\ + w_{r+1}^o\varphi_{r-1,r+1} + \dots + w_N^o\varphi_{r-1,N} = 0; \\ w_1^o\varphi_{r,1} + \dots + w_{r-1}^o\varphi_{r,r-1} + w_r^o\varphi_{r,r} + \\ + w_{r+1}^o\varphi_{r,r+1} + \dots + w_N^o\varphi_{r,N} = 1; \\ w_1^o\varphi_{r+1,1} + \dots + w_{r-1}^o\varphi_{r+1,r-1} + w_r^o\varphi_{r+1,r} + \\ + w_{r+1}^o\varphi_{r+1,r+1} + \dots + w_N^o\varphi_{r+1,N} = 0; \\ \dots \\ w_1^o\varphi_{N,1} + \dots + w_{r-1}^o\varphi_{N,r-1} + w_r^o\varphi_{N,r} + \\ + w_{r+1}^o\varphi_{N,r+1} + \dots + w_N^o\varphi_{N,N} = 0. \end{array} \right. \quad (15)$$

Сравнивая (14) и (15) можно прийти к выводу, что $\Delta_r^o = \Delta$, а для $w_r^o = 1 = \Delta_r^o/\Delta^o$ и $\Delta = \Delta^o$. Оказываются равными также и вспомогательные определители систем (14) и (15). Следовательно, при условии $w_r^o = 1$, системы уравнений имеют одинаковые решения с точностью до знака для компонент весового вектора предсказывающего и обеляющего фильтров.

Таким образом, после решения уравнения

$$\dot{W}_{onm(r)}^{oT} = (\Phi_{nu(r)}^0)^{-1}I_r \quad (16)$$

и нормировки компонент весового вектора $\dot{W}_{onm(r)}^{oT}$ по компоненте w_r^o можно получить оптимальный весовой вектор фильтра оценивания.

Сравнительный анализ эффективности фильтров

Расчёт $\sigma_{e(r)}^2$ по соотношению (10) проводился для стационарного случайного процесса с нормированной корреляционной функцией

$$\rho(\tau) = \left(\frac{\cos \pi F_0 \tau}{1 - (2F_0 \tau)^2} \right)^2 \quad (17)$$

и спектральной плотностью

$$s(F) = \left(\left(1 - \frac{F}{F_0} \right) \cos \pi \frac{F}{F_0} + \frac{\sin \pi (F/F_0)}{\pi} \right)^2, \quad (18)$$

где F_0 – граничная частота спектра.

На рис. 3 приведены расчётные зависимости нормированной, относительно $\sigma_{ш}^2$ минимальной дисперсии ошибки предсказания для различных дисперсий и эффективной ширины спектра Π случайного процесса. На рис. 3, а показаны зависимости для фильтра со значением $r = 1$ (естественно, что для стационарного процесса такая же оценка будет и для $r = N$). На рис. 3, б показаны зависимости для фильтра со значением $r = 4$ (порядок фильтра $N-1 = 8$), т. е. получение оценки по предыдущим и последующим отсчётам. Можно отметить, что для второй структуры фильтра ошибка оценивания значительно меньше во всём диапазоне изменения ширины спектра и мощности случайного процесса. В общем случае, для заданного порядка фильтра наибольшая точность оценки достигается при симметричной структуре, т.е. $r = (N + 1)/2$, что, скорее всего можно пояснить возможностью двукратного использования для оценки наиболее сильных корреляционных связей с $\tau = (1 \div 2)T$.

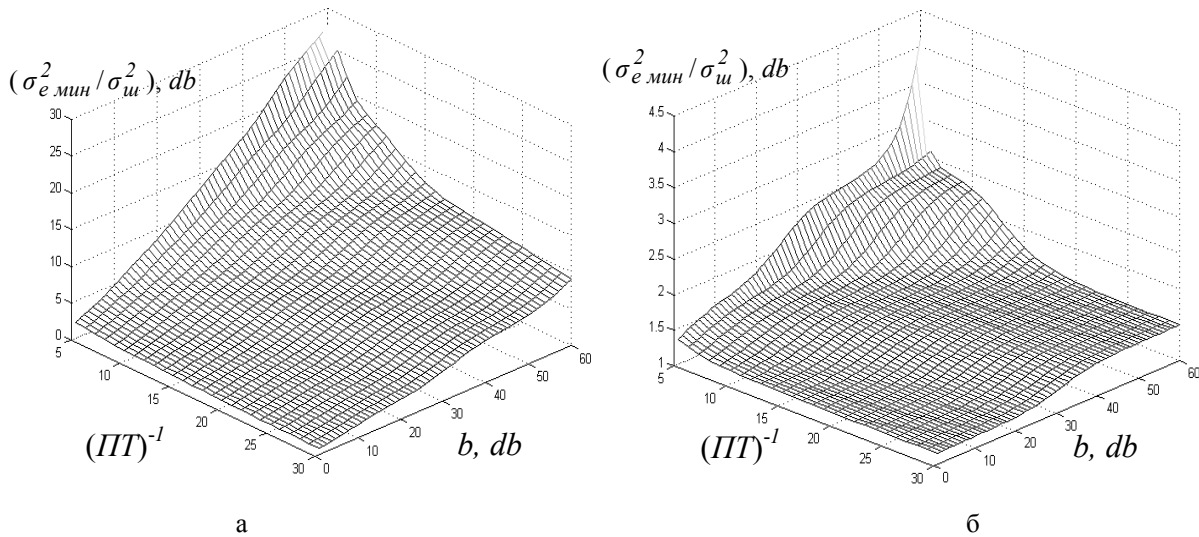


Рис. 3. Нормированная минимальная дисперсия ошибки предсказания для различных структур фильтра

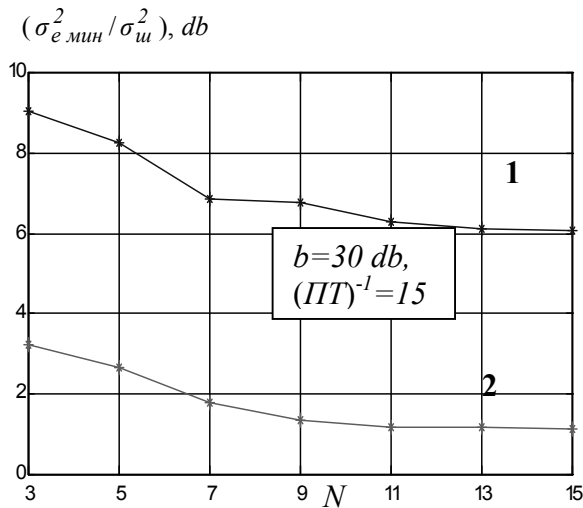


Рис. 4. Нормированная минимальная дисперсия ошибки предсказания для различных структур и порядков фильтра:
 $1 - r = 1; 2 - r = (N + 1)/2$

Графики на рис. 4 позволяют сделать вывод: существенного повышения эффективности (уменьшения дисперсии ошибки предсказания) следует ожидать при увеличении порядка фильтра до 8 – 10.

Наиболее существенных преимуществ симметричных фильтров следует ожидать при оценивании параметров нестационарных процессов. Для анализа точности оценивания отсчётов комплексной амплитуды нестационарного процесса была применена имитационная модель, где квадратурные компоненты коррелированных отсчётов формировались как

дискретный случайный процесс скользящего среднего [5]. Элементы, нормированной по дисперсии собственных шумов КМП, можно записать в виде:

$$\Phi_{\text{ш(нест)}}^{ik} = \frac{(b_i b_k)^{\frac{1}{2}} \rho_{ik} + \delta_{ik}}{((b_i + 1)(b_k + 1))^{\frac{1}{2}}}, \quad (19)$$

где $b_{i(k)}$ – отношение мощности i (k) отсчёта нестационарного случайного процесса к мощности собственных шумов.

Так как процесс не обладает свойством эргодичности, то применять соотношение (17) для расчёта ρ_{ik} можно лишь в первом приближении. Для получения точных значений ковариаций осуществлялась статистическая обработка по реализациям случайного процесса.

Результаты моделирования и обработки одной из реализаций нестационарного процесса представлены на рис. 5.

Можно отметить, что на участках изменения дисперсии случайного процесса у фильтра, формирующего оценку по последующим и предыдущим отсчётам, точность оценки практически не изменяется, (относительное увеличение $\sigma_{e \text{ мин}}^2$ обуславливается лишь возрастанием b).

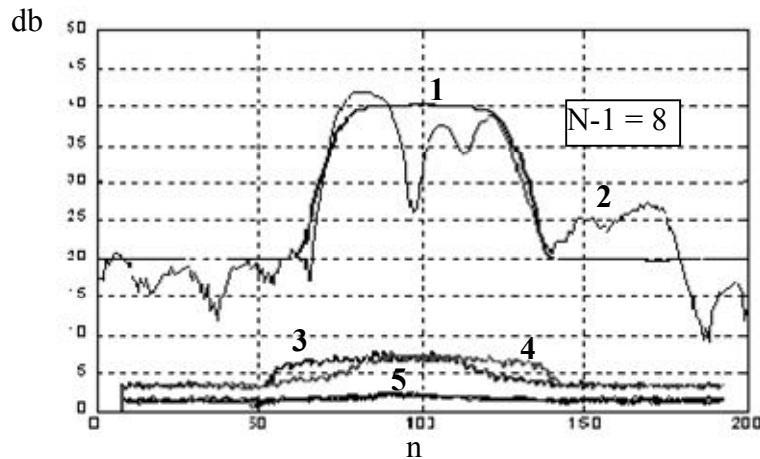


Рис. 5. Моделирование нестационарного случайного процесса и нормированная минимальная дисперсия ошибки предсказания для различных структур фильтра:

1 – закономерная зависимость мощности случайного процесса $b = f(nT)$;

2 – реализация случайного процесса $\frac{|u(nT)|}{\sigma_o}$; 3 – $\sigma_{e(r)\text{мин}}^2 / \sigma_{\text{ш}}^2$ для $r = 1$;

4 – $\sigma_{e(r)\text{мин}}^2 / \sigma_{\text{ш}}^2$ для $r = N$; 5 – $\sigma_{e(r)\text{мин}}^2 / \sigma_{\text{ш}}^2$ для $r = \frac{N+1}{2}$

Выводы

1. Сравнительный анализ σ_e фильтров предсказания с симметричной и несимметричной структурой показал, что первые обладают большей эффективностью. Если условия применения фильтров позволяют для формирования оценки использовать предыдущие и последующие отсчеты комплексной амплитуды случайного процесса, то предпочтительней использовать фильтры первого типа.

2. Приращение эффективности фильтра предсказания становится пренебрежимо малым, начиная с порядка фильтра более $7 \div 9$ практически во всем диапазоне исследованных дисперсии и ширины спектра случайного процесса.

3. Расчет σ_e в различных структур фильтров для реализаций нестационарного случайного процесса показал, что фильтр с симметричной структурой практически не снижает точность оценки при различном характере изменения дисперсии.

Литература

1. Уидроу Б., Стирнз С. Адаптивная обработка сигналов. – М.: Радио и связь, 1989. – 440 с.
2. Фридландер Б. Решётчатые фильтры для адаптивной обработки данных // ТИИЭР. – 1982. – Т. 70, № 8. – С. 352-366.
3. Радиоэлектронные системы: основы построения и теория: Справочник / Под ред. Я.Д. Ширмана. – М.: ЗАО «МАКВИС», 1998. – 828 с.
4. Бронштейн И.Л., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – М.: Наука, 1986. – 544 с.
5. Обнаружение радиосигналов / П.С. Акимов, Ф.Ф. Евстратов, С.И. Захаров и др.; Под ред. А.А. Колосова. – М.: Радио и связь, 1989. – 288 с.

Поступила в редакцию 22.02.2006

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Н.В. Галай, Полтавский государственный технический университет, Полтава.