

УДК 621.371.322

И.П. ЗАЙКИН, Д.В. УДАЧИН

*Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского “ХАИ”, Украина***ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА НЕСИММЕТРИЧНОМ
СОЕДИНЕНИИ ДВУХ СТРУКТУР ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ.
ЧАСТЬ 1. ПОСТАНОВКА И СТРОГОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ**

Рассмотрена задача рассеяния электромагнитных волн Н- и Е-поляризации на несимметричном соединении двух структур прямоугольной формы. Для решения такой внутренней координатной краевой задачи предложен аналитический метод. Получены выражения для коэффициентов преобразования в строгом решении.

рассеяние, поляризация, аналитический метод, коэффициенты преобразования**Введение**

Развитие телекоммуникационных систем связи, в частности, сотовых и микросотовых систем, радиостанций малого радиуса действия, беспроводного интернета, используемых как в быту, так и корпоративными структурами, в аэропортах, на летательных аппаратах и т.п., требует тщательного изучения распределения электромагнитных полей (ЭМП) в помещениях различного назначения и конфигурации. Такое изучение и количественный расчет ЭМП позволит, возможно, оказывать воздействие на строительные нормы для обеспечения надежной радиосвязи, с одной стороны, и устранение зон повышенной напряженности поля, с другой.

Целью работы является теоретическое решение задачи рассеяния и численный расчет коэффициентов преобразования электромагнитных волн (ЭМВ) на несимметричном соединении двух структур прямоугольного сечения.

Формулирование проблемы. Вопрос о существовании и распределении ЭМП в структурах различного назначения и конфигурации (волноводных, помещениях с неоднородными параметрами стен и потолков, экранированных, в том числе и фюзеляжах летательных аппаратов, а также экранированных узлов связи и радиолокации на аэродромах)

актуален и требует практического разрешения в следующих направлениях:

- определение зон уверенного приема сигналов передатчиков по всей площади помещения;
- разработка рекомендаций по безопасному расположению персонала в связи с возможным возникновением зон повышенной напряженности поля, обусловленных пространственным сложением сигналов при многократном их отражении внутри помещений.

Изменение первичного ЭМП в результате его взаимодействия с телами различной формы или элементами связи в протяженных структурах, находящихся в зоне распространяющихся ЭМВ, или дифракция ЭМВ относятся к числу труднейших задач электродинамики.

Такие задачи решались ранее и решаются в настоящее время [1 – 3] для конкретных структур аналитически или другими, в частности, приближенными методами. В данном случае решена нетрадиционная задача дифракции на щелевом несимметричном соединении, имеющая практическое применение в случаях, указанных выше.

Начало решения такой задачи для разнообразных структур может быть показано на примере экранированного помещения простой конструкции, где моделью экранированного помещения является воз-

бужденный прямоугольный резонатор, а пространство существования вторичного ЭМП – волновод прямоугольного сечения (модель коридора) бесконечной длины. Возбуждение волновода осуществляется в общем случае через щель, смещенную относительно оси симметрии резонатора.

Структуру, предлагаемую для расчета (рис. 1), а также необходимые ограничения рассмотрим ниже, представив нашу структуру в виде несимметричного соединения плоского волновода и прямоугольного резонатора, не ограниченных по оси y .

Размер волновода по оси x обозначим через 2π , размер резонатора по осям x и z – через a и b , где $b = b_1 + b_2$.

Размер щели, связывающей резонатор с волноводом, $4\pi r$, где $2r$ – некоторый малый параметр, который характеризует соотношение между размерами щели и волновода.

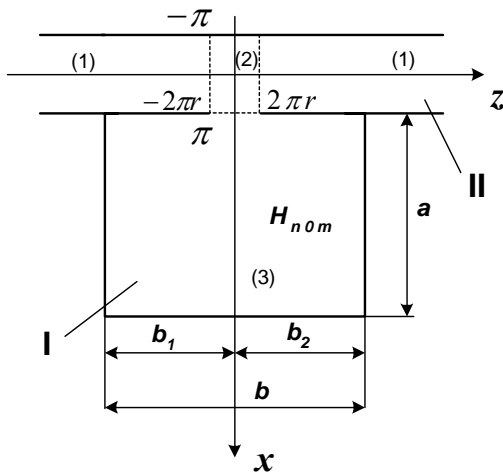


Рис. 1. Прямоугольный резонатор I и связанный с ним через щель бесконечный плоский волновод II

Область 1 на рис. 1 представляет собой регулярные участки волновода, область 2 – нерегулярный, общий для волновода и щели участок, а область 3 – прямоугольный резонатор.

Пусть в резонаторе возбуждены колебания H_{npm} , где n ($n = 1, 2, 3, \dots$), m ($m = 1, 2, 3, \dots$) и p ($p = 0, 1, 2, 3, \dots$) – количество полуволн, укладывающихся по структуре вдоль осей x , z и y соответственно, причем

будем предполагать для упрощения задачи, что вариации поля вдоль оси y отсутствуют, т.е. $p = 0$.

Дифрагированное на неоднородности (щели) поле резонатора будет иметь вид набора волн типа H_{n0} с составляющими E_y, H_x, H_z , существующих в общей для щели и волновода области 2 и расходящихся вправо и влево от щели.

Выберем временную зависимость в виде $\exp(i\omega t)$, а зависимость от продольной координаты z для волн распространяющихся в волноводе в направлениях $\pm z$ будем представлять в виде

$$\exp(\pm i\gamma_n t).$$

Искомые поля должны удовлетворять следующим требованиям [4].

1. Полное поле удовлетворяет однородным уравнениям Максвелла:

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{H} &= -i\omega \epsilon_0 \vec{E}, \\ \text{rot} \vec{E} &= -i\omega \mu_0 \vec{H} \end{aligned} \quad (1)$$

и волновому уравнению Гельмгольца

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \cdot \Psi(x, z) = 0, \quad (2)$$

где $\Psi(x, z)$ – одна из составляющих электромагнитного поля в декартовой системе координат; $k = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = 2\pi/\lambda$ – волновое число для свободного пространства.

2. Среда, заполняющая структуру, однородна.

3. Диэлектрик изотропный и вектор электрической индукции $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$, а вектор магнитной индукции $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$. Потери отсутствуют ($\sigma_\delta = 0$).

4. Стенки структуры идеально проводящие ($\sigma_m = \infty$).

5. Выполняется условие излучения Зоммерфельда на бесконечности

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \left[z \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} - ik\varphi \right) \right] = 0, \quad (3)$$

где φ – любая поперечная (относительно направления z) составляющая поля (E_y или H_x). Условие Зом-

мерфельда гарантирует отсутствие волн, набегающих из бесконечности к месту соединения структур.

6. Удовлетворяются граничные условия для тангенциальных и нормальных составляющих на внешних стенках резонатора и волновода:

$$E_{\tau} = 0; \quad H_{\tau} = I_s;$$

$$E_n = \frac{\rho_s}{\varepsilon_0}; \quad H_n = 0,$$

где ρ_s – плотность поверхностного заряда; I_s – плотность поверхностного тока.

Из граничных условий можно заключить, что тангенциальная составляющая напряженности электрического поля (E_{τ}) на границе раздела идеального проводника равна нулю и, если вектор $\vec{E} \neq 0$ – то он нормален к поверхности. Нормальная составляющая вектора магнитного поля (H_n) на этой границе равна нулю.

7. Все касательные составляющие непрерывны на щелях:

при $z = \pm 2\pi$

$$E_y^{(1)} = E_y^{(2)}; \quad H_z^{(1)} = H_z^{(2)}; \quad (4)$$

при $x = \pi$

$$H_z^{(2)} = H_z^{(3)}.$$

8. Тангенциальные компоненты электрического поля (и нормальные компоненты магнитного поля) обращаются в нуль на идеально проводящих внутренних стенках волновода и резонатора:

$$E_y = 0 \quad \text{при } x = \pm\pi; \quad E_y = 0 \quad \text{при } x = \pi + a;$$

$$H_x = 0 \quad \text{при } x = \pm\pi; \quad H_x = 0 \quad \text{при } x = \pi + a; \quad (5)$$

$$E_y = 0 \quad \text{при } \pi < x < \pi + a, \quad z = -b_1 \quad \text{и } z = b_2;$$

$$H_x = 0 \quad \text{при } \pi < x < \pi + a, \quad z = -b_1 \quad \text{и } z = b_2.$$

9. Поля удовлетворяют условию Мейкснера на остром ребре при $x = \pi$, $z = \pm 2\pi r$:

$$E_y \approx \rho^{1/2}, \quad H_x, H_z \approx \rho^{-1/2}$$

при $\rho = [(x - \pi)^2 + (z \pm 2\pi r)^2]^{1/2} \rightarrow 0$. (6)

Решение уравнений Максвелла не определяется однозначно в случаях, когда граничные поверхности имеют геометрические сингулярности, например, острые рёбра, где невозможно восстановить определённую нормаль к поверхности. Дополнительное физическое условие, необходимое для однозначного определения решения, известно как условие на ребре и заключается оно в требовании конечности энергии электромагнитного поля, запасенной в любом конечном объеме в окрестности ребра. Это равносильно требованию

$$\int_V \left(\varepsilon_0 |\vec{E}|^2 + \mu_0 |\vec{H}|^2 \right) dV \rightarrow 0, \quad (7)$$

при стремлении к нулю объема в окрестности ребра.

Как можно показать из условия (7), в окрестности ребра ни одна составляющая электромагнитного поля \vec{E}, \vec{H} не может возрастать быстрее чем $\rho^{-1+\tau}$ ($\tau > 0$) при $\rho \rightarrow 0$.

Однородность структуры поля вдоль y позволяет искать отдельно решения задач для волн, имеющих различную поляризацию в направлении распространения.

Будем называть электрической такую волну, у которой y -составляющая электрического поля тождественно равна нулю (E -поляризация). Магнитной назовем волну, у которой только электрическое поле имеет отличную от нуля y -составляющую (H -поляризация).

Решение проблемы. H-поляризация

Запишем выражения для составляющей E_y во всех выделенных областях [5]:

$$E_y^{(1)} = 2i \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n (-1)^n \sin(nx) e^{+i\gamma_n (z-2\pi r)} + b_n (-1)^n \sin(nx) e^{-i\gamma_n (z+2\pi r)} \right);$$

$$E_y^{(2)} = 2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} d_m L_m \sin(\Gamma_m x) e^{im(\frac{z}{2r}-\pi)} + 2i \sum_{n=1}^{\infty} c_n (-1)^n \sin(nx) \times \left(e^{i\gamma_n (2\pi r+z)} - e^{i\gamma_n (2\pi r-z)} \right); \quad (8)$$

$$E_y^{(3)} = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \frac{a}{n\pi} \cdot \frac{b}{m\pi} \sin\left[\frac{n\pi}{a}(x-\pi)\right] \times \sin\left[\frac{m\pi}{b}(z+b_1)\right],$$

где $a_n, b_n, c_n \sim E_n^{(p)}, d_m \sim F_m^{(p)}$ – искомые элементы p -го столбца матрицы рассеяния; $\kappa = k/\pi = 2/\lambda$, $L_m = e^{i\Gamma_m \pi}$; $\gamma_n = \sqrt{\kappa^2 - n^2}$; $\Gamma_m = \sqrt{\kappa^2 - (m/2r)^2}$ – продольные постоянные распространения в направлениях z и x соответственно; индексы n и m – вариации поля по осям y и x соответственно; a, b – размеры резонатора.

Поле, представленное в виде (8), удовлетворяет граничным условиям на металлических стенках волновода и резонатора, условию на бесконечности и уравнению Гельмгольца.

Величины $E_n^{(p)}, F_m^{(p)}$ определяются из граничных условий и условий непрерывности полей на границах $z = 2\pi r, x = \pi$.

Отличные от нуля H -компоненты поля определяются из уравнений Максвелла по формулам

$$H_x = \frac{i}{\kappa} \cdot \frac{\partial E_y}{\partial z}; \quad (9)$$

$$H_z = \frac{1}{i\kappa} \cdot \frac{\partial E_y}{\partial x}$$

и имеют следующий вид:

H_x -составляющие:

$$H_x^{(1)} = -\frac{2i}{\kappa} \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n (-1)^n \gamma_n \sin(nx) e^{+i\gamma_n (z-2\pi r)} - b_n (-1)^n \gamma_n \sin(nx) e^{-i\gamma_n (z+2\pi r)} \right);$$

$$H_x^{(2)} = -\frac{2}{\kappa} \sum_{m=-\infty}^{\infty} d_m L_m \frac{m}{2r} \sin(\Gamma_m x) e^{im(\frac{z}{2r}-\pi)} -$$

$$-\frac{2i}{\kappa} \sum_{n=1}^{\infty} c_n (-1)^n \gamma_n \sin(nx) \times \left\{ e^{i\gamma_n (2\pi r+z)} + e^{i\gamma_n (2\pi r-z)} \right\}; \quad (10)$$

$$H_x^{(3)} = \frac{2i}{\kappa} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \frac{a}{n\pi} \sin\left[\frac{n\pi}{a}(x-\pi)\right] \times \cos\left[\frac{m\pi}{b}(z+b_1)\right].$$

H_z -составляющие:

$$H_z^{(1)} = \frac{2}{\kappa} \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n (-1)^n n \cos(nx) e^{+i\gamma_n (z-2\pi r)} + b_n (-1)^n n \cos(nx) e^{-i\gamma_n (z+2\pi r)} \right);$$

$$H_z^{(2)} = \frac{2}{i\kappa} \sum_{m=-\infty}^{\infty} d_m L_m \Gamma_m \cos(\Gamma_m x) e^{im(\frac{z}{2r}-\pi)} + \frac{2}{\kappa} \sum_{n=1}^{\infty} c_n (-1)^n n \cos(nx) \times \left\{ e^{i\gamma_n (2\pi r+z)} - e^{i\gamma_n (2\pi r-z)} \right\}; \quad (11)$$

$$H_z^{(3)} = \frac{2}{i\kappa} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \frac{b}{m\pi} \cos\left[\frac{n\pi}{a}(x-\pi)\right] \times \sin\left[\frac{m\pi}{b}(z+b_1)\right].$$

Для выполнения граничных условий, кроме (8), (10), (11), необходимо выполнение между амплитудами d_m промежуточной области (2) соотношения

$$d_m = -d_m. \quad (12)$$

Тогда из условия непрерывности составляющих E_y при $z = 2\pi r$ имеем

$$2i \sum_{n=1}^{\infty} a_n (-1)^n \sin(nx) = 2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} d_m L_m \sin(\Gamma_m x) + 2i \sum_{n=1}^{\infty} c_n (-1)^n \sin(nx) (L_n^2 - 1);$$

$$L_n^2 = e^{4i\gamma_n \pi r}.$$

Выполнение условия (12) дает тождество

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} d_m L_m \sin(\Gamma_m x) \equiv 0,$$

а, следовательно,

$$a_n = c_n(L_n^2 - 1). \quad (13)$$

Сшивая составляющие H_x на границе областей (1) и (2) при $z = 2\pi r$, получим:

$$\begin{aligned} & -\frac{2i}{\kappa} \sum_{n=1}^{\infty} a_n (-1)^n \gamma_n \sin(nx) = \\ & = -\frac{2}{\kappa} \sum_{m=-\infty}^{\infty} d_m L_m \frac{m}{2r} \sin(\Gamma_m x) - \\ & -\frac{2i}{\kappa} \sum_{n=1}^{\infty} c_n (-1)^n \gamma_n (L_n^2 + 1) \sin(nx) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & -\frac{2i}{\kappa} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \gamma_n [a_n - c_n(L_n^2 + 1)] \sin(nx) = \\ & = -\frac{2}{\kappa} \sum_{m=-\infty}^{\infty} d_m L_m \frac{m}{2r} \sin(\Gamma_m x). \end{aligned}$$

Подставляя в последнее уравнение значение a_n из (13), получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n 2(-1)^n i \gamma_n \sin(nx) = - \sum_{m=-\infty}^{\infty} d_m L_m \frac{m}{2r} \sin(\Gamma_m x),$$

откуда окончательно получаем функциональное уравнение

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n (-1)^n \gamma_n i \sin(nx) = - \sum_{m=1}^{\infty} d_m L_m \frac{m}{2r} \sin(\Gamma_m x). \quad (14)$$

Сшивая составляющие H_z на границе областей (2) и (3) (при $x = \pi$), получим

$$\begin{aligned} & \frac{2}{i\kappa} \sum_{m=-\infty}^{\infty} d_m L_m \Gamma_m \cos(\Gamma_m \pi) e^{im\left(\frac{z}{2r} - \pi\right)} + \\ & + \frac{2}{\kappa} \sum_{n=1}^{\infty} c_n (-1)^n n \cos(n\pi) \times \\ & \times \left\{ e^{i\gamma_n(2\pi r+z)} - e^{i\gamma_n(2\pi r-z)} \right\} = \\ & = \frac{2}{i\kappa} \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} \frac{b}{m\pi} \sin\left[\frac{m\pi}{b}(z+b_1)\right]. \end{aligned} \quad (15)$$

Учитывая, что

$$L_m \cos(\Gamma_m \pi) = \frac{L_m^2 + 1}{2},$$

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} \frac{b}{m\pi} \sin\left[\frac{m\pi}{b}(z+b_1)\right] = \\ & = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{A_{mn}}{2} \frac{b}{m\pi} \sin\left[\frac{m\pi}{b}(z+b_1)\right], \end{aligned}$$

из (15) получаем второе функциональное уравнение

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ d_m \Gamma_m \frac{L_m^2 + 1}{2} e^{im\left(\frac{z}{2r} - \pi\right)} - \frac{A_{mn}}{2} \frac{b}{m\pi} \sin\left[\frac{m\pi}{b}(z+b_1)\right] \right\} = \quad (16)$$

$$= - \sum_{n=1}^{\infty} c_n i n \left\{ e^{i\gamma_n(2\pi r+z)} - e^{i\gamma_n(2\pi r-z)} \right\}.$$

Рассмотрим функциональное уравнение (14). Переразложим в нем функции, полные на интервале $-2\pi r \leq z \leq 2\pi r$ по функциям, полным на интервале $0 \leq x \leq \pi$:

$$L_m \frac{m}{2r} \sin(\Gamma_m x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n i \gamma_n \beta_n^m \sin(nx). \quad (17)$$

Тогда

$$\begin{aligned} & L_m \frac{m}{2r} \int_0^{\pi} \sin(\Gamma_m x) \sin(nx) dx = \\ & = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^m (-1)^n i \gamma_n \int_0^{\pi} \sin^2(nx) dx, \end{aligned}$$

где

$$\beta_n^m = \frac{L_m \frac{m}{2r} 2}{\pi (-1)^n i \gamma_n} \int_0^{\pi} \sin(\Gamma_m x) \sin(nx) dx, \quad (18)$$

так как

$$\int_0^{\pi} \sin^2(nx) dx = \frac{\pi}{2}.$$

Найдем интеграл в (17):

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi} \sin(\Gamma_m x) \sin(nx) dx = \\ & = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^{\pi} \cos(\Gamma_m - n)x dx - \int_0^{\pi} \cos(\Gamma_m + n)x dx \right\} = \end{aligned}$$

$$= \frac{\sin(\Gamma_m \pi) \cos(n\pi)}{2} \left(\frac{1}{\Gamma_m - n} - \frac{1}{\Gamma_m + n} \right) = \frac{(-1)^n n \cdot \sin(\Gamma_m \pi)}{\Gamma_m^2 - n^2} .$$

Тогда коэффициент переразложения β_n^m будет равен

$$\begin{aligned} \beta_n^m &= \frac{L_m \frac{m}{2r} \cdot 2}{\pi(-1)^n i\gamma_n} \cdot \frac{(-1)^n n \cdot \sin(\Gamma_m \pi)}{\Gamma_m^2 - n^2} = \\ &= \frac{2 \frac{m}{2r} \cdot n (e^{i\Gamma_m \pi} - e^{-i\Gamma_m \pi})}{2i \cdot i\gamma_n \pi (\Gamma_m^2 - n^2)} = \\ &= \frac{n \frac{m}{2r} (1 - L_m^2)}{\pi\gamma_n (\Gamma_m^2 - n^2)} . \end{aligned}$$

Итак,

$$\beta_n^m = \begin{cases} \frac{n \frac{m}{2r} (1 - L_m^2)}{\pi\gamma_n (\Gamma_m^2 - n^2)} & \text{при } \Gamma_m \neq n, \\ -i & \text{при } \Gamma_m = n, \gamma_n = \frac{m}{2r}. \end{cases} \quad (19)$$

Подставляя (17) в уравнение (14), имеем

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} c_n (-1)^n i\gamma_n \sin(nx) = \\ &= -\sum_{m=1}^{\infty} d_m \left[\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n i\gamma_n \sin(nx) \right] \beta_n^m, \end{aligned}$$

откуда получаем бесконечную систему алгебраических уравнений относительно искомым коэффициентов преобразования c_n и d_m :

$$c_n = -\sum_{m=1}^{\infty} d_m \beta_n^m . \quad (20)$$

В функциональном уравнении (16) используем разложение

$$\begin{aligned} &in \cdot \left\{ e^{i\gamma_n (2\pi r + z)} - e^{i\gamma_n (2\pi r - z)} \right\} = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m^n \Gamma_m \frac{L_m^2 + 1}{2} e^{im \left(\frac{z}{2r} - \pi \right)}, \end{aligned} \quad (21)$$

где коэффициент переразложения α_m^n определяется как

$$\begin{aligned} \alpha_m^n &= \frac{2in}{\Gamma_m (L_m^2 + 1) 4\pi r} \times \\ &\times \int_{-2\pi r}^{2\pi r} \left\{ e^{i\gamma_n (2\pi r + z)} - e^{i\gamma_n (2\pi r - z)} \right\} \times \\ &\times e^{-im \left(\frac{z}{2r} - \pi \right)} . \end{aligned} \quad (22)$$

Подставляя (21) в (16), получим:

$$\begin{aligned} &\sum_{m=-\infty}^{\infty} d_m \Gamma_m \frac{L_m^2 + 1}{2} e^{im \left(\frac{z}{2r} - \pi \right)} - \\ &- \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{A_{mn}}{2} \frac{b}{m\pi} \sin \left[\frac{m\pi}{b} (z + b_1) \right] = \\ &= -\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot \left[\Gamma_m \frac{L_m^2 + 1}{2} e^{im \left(\frac{z}{2r} - \pi \right)} \right] \cdot \alpha_m^n \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} &d_m \Gamma_m \frac{L_m^2 + 1}{2} e^{im \left(\frac{z}{2r} - \pi \right)} - \frac{A_{mn}}{2} \frac{b}{m\pi} \sin \left[\frac{m\pi}{b} (z + b_1) \right] = \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} c_n \alpha_m^n \cdot \left[\Gamma_m \frac{L_m^2 + 1}{2} e^{im \left(\frac{z}{2r} - \pi \right)} \right] . \end{aligned}$$

Умножив правую и левую части полученного уравнения на $e^{-im \left(\frac{z}{2r} - \pi \right)}$ и проинтегрировав по z в интервале $(-2\pi r, 2\pi r)$, найдем

$$\begin{aligned} &d_m \Gamma_m \frac{L_m^2 + 1}{2} 4\pi r - \frac{A_{mn}}{2} \times \\ &\times \frac{b}{m\pi} \int_{-2\pi r}^{2\pi r} \sin \left[\frac{m\pi}{b} (z + b_1) \right] \cdot e^{-im \left(\frac{z}{2r} - \pi \right)} dz = \\ &= -\Gamma_m \frac{L_m^2 + 1}{2} 4\pi r \sum_{n=1}^{\infty} c_n \alpha_m^n , \end{aligned} \quad (23)$$

где мы использовали значение интеграла

$$\int_{-2\pi r}^{2\pi r} e^{im \left(\frac{z}{2r} - \pi \right)} e^{-im \left(\frac{z}{2r} - \pi \right)} dz = 4\pi r .$$

Разделив левую и правую части (23) на

$$\Gamma_m \frac{L_m^2 + 1}{2} 4\pi r$$

и обозначив через

$$\sigma_m^m = \frac{A_{nm}}{2} \cdot \frac{b}{m\pi} \times \frac{2}{\Gamma_m(L_m^2 + 1)4\pi r} \int_{-2\pi r}^{2\pi r} \sin\left[\frac{m\pi}{b}(z + b_1)\right] \times e^{-im\left(\frac{z}{2r} - \pi\right)} dz, \quad (24)$$

получим бесконечную систему алгебраических уравнений относительно неизвестных c_n и d_m :

$$d_m = -\sum_{n=1}^{\infty} c_n \alpha_m^n + \sigma_m^m. \quad (25)$$

Коэффициент переразложения α_m^n найдём из выражения (22):

$$\alpha_m^n = \frac{2iL_n e^{im\pi n}}{\Gamma_m(L_m^2 + 1)4\pi r} \times \int_{-2\pi r}^{2\pi r} \left\{ e^{i\left(\gamma_n - \frac{m}{2r}\right)z} - e^{-i\left(\gamma_n + \frac{m}{2r}\right)z} \right\} dz = \frac{n(L_n^2 - 1)}{\Gamma_m(L_m^2 + 1)\pi r} \cdot \frac{(m/2r)}{\gamma_n^2 - (m/2r)^2}.$$

Окончательно

$$\alpha_m^n = \begin{cases} \frac{L_n^2 - 1}{L_m^2 + 1} \frac{1}{\Gamma_m \pi r} \frac{n\left(\frac{m}{2r}\right)}{\gamma_n^2 - \left(\frac{m}{2r}\right)^2} & \text{при } \gamma_n \neq \frac{m}{2r} \\ i & \text{при } \gamma_n = \frac{m}{2r}, \Gamma_m = n. \end{cases} \quad (26)$$

Коэффициенты σ_m^m найдём из (24). Сомножители подынтегрального выражения в (24) представим в виде:

$$\begin{aligned} \sin\left[\frac{m\pi}{b}(z + b_1)\right] &= \frac{e^{i\frac{m\pi}{b}(z+b_1)} - e^{-i\frac{m\pi}{b}(z+b_1)}}{2i} = \\ &= \frac{e^{i\frac{m\pi}{b}z} e^{i\frac{m\pi}{b}b_1} - e^{-i\frac{m\pi}{b}z} e^{-i\frac{m\pi}{b}b_1}}{2i}; \end{aligned}$$

$$e^{im\left(\frac{z}{2r} - \pi\right)} = e^{-im\frac{z}{2r}} e^{im\pi} = (-1)^m e^{-i\frac{mz}{2r}}.$$

Тогда

$$\sigma_m^m = \frac{A_{nm} b}{2m\pi} \cdot \frac{(-1)^m}{\Gamma_m(L_m^2 + 1)4\pi r} \times \left\{ \int_{-2\pi r}^{2\pi r} e^{im\pi\frac{b_1}{b}} e^{i\left(\frac{m\pi}{b} - \frac{m}{2r}\right)z} dz - \int_{-2\pi r}^{2\pi r} e^{-im\pi\frac{b_1}{b}} e^{-i\left(\frac{m\pi}{b} + \frac{m}{2r}\right)z} dz \right\}.$$

Первое слагаемое в фигурных скобках равно

$$\begin{aligned} e^{im\pi\frac{b_1}{b}} \int_{-2\pi r}^{2\pi r} e^{i\left(\frac{m\pi}{b} - \frac{m}{2r}\right)z} dz &= e^{im\pi\frac{b_1}{b}} \frac{e^{i\left(\frac{m\pi}{b} - \frac{m}{2r}\right)z}}{i\left(\frac{m\pi}{b} - \frac{m}{2r}\right)} \Bigg|_{-2\pi r}^{2\pi r} = \\ &= 2e^{im\pi\frac{b_1}{b}} \frac{\sin\left(\frac{2m\pi^2 r}{b} - m\pi\right)}{\left(\frac{m\pi}{b}\right) - \left(\frac{m}{2r}\right)} = \\ &= 2(-1)^m e^{im\pi\frac{b_1}{b}} \frac{\sin\left(\frac{2m\pi^2 r}{b}\right)}{\left(\frac{m\pi}{b}\right) - \left(\frac{m}{2r}\right)}, \end{aligned}$$

а второе слагаемое в фигурных скобках –

$$\begin{aligned} e^{-im\pi\frac{b_1}{b}} \int_{-2\pi r}^{2\pi r} e^{-i\left(\frac{m\pi}{b} + \frac{m}{2r}\right)z} dz &= \\ &= e^{-im\pi\frac{b_1}{b}} \frac{e^{-i\left(\frac{m\pi}{b} + \frac{m}{2r}\right)z}}{-i\left(\frac{m\pi}{b} + \frac{m}{2r}\right)} \Bigg|_{-2\pi r}^{2\pi r} = \\ &= 2e^{-im\pi\frac{b_1}{b}} \frac{\sin\left(\frac{2m\pi^2 r}{b} + m\pi\right)}{\left(\frac{m\pi}{b}\right) + \left(\frac{m}{2r}\right)} = \\ &= 2(-1)^m e^{-im\pi\frac{b_1}{b}} \frac{\sin\left(\frac{2m\pi^2 r}{b}\right)}{\left(\frac{m\pi}{b}\right) + \left(\frac{m}{2r}\right)}. \end{aligned}$$

Подставляя найденные значения в выражение для σ_m^m , найдём

$$\begin{aligned} \sigma_m^m &= \frac{A_{mn}b}{m\pi} \cdot \frac{\sin\left(\frac{2m\pi^2 r}{b}\right)}{\Gamma_m(L_m^2 + 1)4\pi r} \times \\ &\times \left\{ \frac{e^{\frac{im\pi b_1}{b}}}{\left(\frac{m\pi}{b}\right) - \left(\frac{m}{2r}\right)} - \frac{e^{-\frac{im\pi b_1}{b}}}{\left(\frac{m\pi}{b}\right) + \left(\frac{m}{2r}\right)} \right\} = \\ &= \frac{A_{mn}b}{m\pi} \cdot \frac{\sin\left(\frac{2m\pi^2 r}{b}\right)}{\Gamma_m(L_m^2 + 1)2\pi r} \times \\ &\times \left\{ \frac{\frac{m}{2r} \left(\frac{e^{\frac{im\pi b_1}{b}} + e^{-\frac{im\pi b_1}{b}}}{2} \right) + i \frac{m\pi}{b} \left(\frac{e^{\frac{im\pi b_1}{b}} - e^{-\frac{im\pi b_1}{b}}}{2i} \right)}{\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 - \left(\frac{m}{2r}\right)^2} \right\} \end{aligned}$$

Окончательно

$$\begin{aligned} \sigma_m^m &= \frac{A_{mn}b}{2m\pi^2 r} \cdot \frac{\sin\left(\frac{2m\pi^2 r}{b}\right)}{\Gamma_m(L_m^2 + 1)} \times \\ &\times \left\{ \frac{\frac{m}{2r} \cos\left(m\pi \frac{b_1}{b}\right) + i \frac{m\pi}{b} \sin\left(m\pi \frac{b_1}{b}\right)}{\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 - \left(\frac{m}{2r}\right)^2} \right\}. \end{aligned} \quad (27)$$

Подставляя коэффициенты d_m из (25) в (20), получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений (БСЛАУ) второго рода относительно коэффициентов преобразования c_v :

$$c_v - \sum_{n=1}^{\infty} c_n P_{nv} = -\beta_v^p \sigma_p^p, \quad (28)$$

где

$$P_{nv} = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m^n \beta_v^m. \quad (29)$$

Коэффициенты прохождения в регулярный волновод a_v определяются по формуле (13).

Заклучение

Таким образом, полученная система алгебраических уравнений второго рода при строгом решении задачи дифракции электромагнитных волн на несимметричном соединении двух прямоугольных структур имеет бесконечный порядок и может быть использована для расчетов коэффициентов преобразования с учетом возможностей вычислительной техники, разумного ограничения порядка уравнений и требуемой точности.

Литература

1. Боголюбов А.И., Делицын А.А., Лавренова. Численное моделирование дифракции в волноводе методом конечных элементов // Журнал радиоэлектроники (РАН). – 2004. – № 3. – С. 13.
2. Климов К.Н., Сестрорецкий Б.В. Дифракционные уравнения для решения задач рассеяния волн во временной области // Журнал радиоэлектроники (РАН). – 2001. – № 2. – С. 9.
3. Миттра, Ли С. Аналитические методы теории волноводов. – М.: Мир, 1974. – 323 с.
4. Федоров Н.Н. Основы электродинамики. – М.: Высш. шк., 1980. – 399 с.
5. Заикин И.П. Дифракция электромагнитных волн на соединении двух плоских волноводов // ВИМИ. – 1976. – № 11. – С. 22.

Поступила в редакцию 19.01.2006

Рецензент: канд. физ.-мат. наук В.А. Солодовник, ИРЭ НАН Украины, Харьков.