

УДК 621.396:537.874.4

А.Д. АБРАМОВ, Р.В. НЕЖАЛЬСКИЙ

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Украина

АДАПТИВНЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ ОЦЕНКИ ЧИСЛА СИГНАЛОВ ПРИ КОМПОНЕНТНОМ АНАЛИЗЕ

Приводится решение задачи определения числа компонент в наблюдаемом процессе при использовании методологии максимального правдоподобия. Синтезируется удобная в вычислительном отношении технология, которая обеспечивает оперативность получения результата, возможность использования табулированной статистики и управление величиной вероятности ошибки первого рода.

компонентный анализ, оценка числа сигналов, многомерные данные, обнаружение сигналов, максимум правдоподобия, отношение правдоподобия

Введение

Использование методологии максимального правдоподобия для синтеза простых технологий обнаружения, оценивания и селекции «стохастических» сигналов из наблюдаемого процесса представляет значительный интерес для теории и технических приложений [1 – 3].

Формулирование проблемы. Ограничения и трудности использования указанной методологии для решения задач оптимального выделения компонент в системах диагностики, при контроле технологических процессов и в других областях техники хорошо известны практикам: концепция известной формы сигналов не всегда может быть обоснована [4].

Здесь применительно к задачам компонентного анализа в рамках методологии максимума правдоподобия приводится адаптивная вычислительная процедура для обнаружения сигналов неизвестной формы, местоположение которых в заданных областях пространства и временной оси неизвестно. Тест использует табулированную статистику и позволяет управлять ошибкой первого рода.

Специфика задач диагностики связана с тем, что исследователь при анализе (например, компонентном) располагает, во-первых, некоторыми предварительными данными о характере видеосигналов:

примерно известно все множество, весь ансамбль возможных их видов. Во-вторых, область местоположений источников «стохастических» компонент (видеосигналов) ограничена известным геометрическим фактором и протяженностью временного интервала наблюдения.

С учетом указанной специфики при компонентном анализе в аналитической форме задача формулируется так [5]. Существует N независимых источников видеосигналов – компонент. В момент времени $k\Delta t$ ($k = \overline{1, K}$) на выходах приемников регистрируется M -мерный вектор наблюдений $u_k^T = u^T(k\Delta t) = [u_1(k\Delta t), u_2(k\Delta t), \dots, u_M(k\Delta t)]$. Здесь $u_m(k\Delta t)$ – амплитуда отсчета, зарегистрированного в k -й момент времени на выходе m -го приемника, $m = \overline{1, M}$; « T » – знак транспонирования. Функциональная связь между вектором u_k и «фазовым» распределением $A^N = [\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_N]$ потенциалов, зарегистрированных сенсорами, определяется уравнением наблюдения

$$u(k) = A^N E_k^N + n_k, \quad (1)$$

где $E_k^N = [E_1(k\Delta t), E_2(k\Delta t), \dots, E_N(k\Delta t)]^T$ – вектор отсчетов в момент времени $k\Delta t$ амплитуд независимых компонент $E_p(t)$ ($p = \overline{1, N}$), модуль $|\dot{G}(f)|$

спектра которых сосредоточен в полосе $2F$, $\Delta t = \frac{1}{2F}$. Элементы $\varphi_n^{(i)}$ ($i = \overline{1, M}$) вектора $\Lambda_n = [\varphi_n^{(1)}, \varphi_n^{(2)}, \dots, \varphi_n^{(M)}]^T$ задаются как местоположением (x_n, y_n, z_n) в пространственной декартовой системе (X, Y, Z) n -го источника «излучения», так и координатами (x_m, y_m, z_m) приемных сенсоров; $\varphi_n^{(m)} = f(x_n, y_n, z_n, x_m, y_m, z_m)$ – известная функция координат датчиков и источников, $n = \overline{1, N}$, $m = \overline{1, M}$; $n_k^T = [n_1(k\Delta t), n_2(k\Delta t), \dots, n_M(k\Delta t)]$ – случайный гауссовский процесс с характеристиками

$$\langle n_k \rangle = 0; \quad R = \langle n_k n_l^T \rangle = \sigma_0^2 I_M \delta(k - l); \quad (2)$$

$n_m(k\Delta t)$ – отсчет шума m -го сенсора; $\delta(\cdot)$ – символ Кронекера; I_M – единичная матрица размерности $M \times M$ из поля F ; $I_M \in M_{M, M}(F)$; σ_0^2 – мощность помехи. Форму $E_p(t)$ ($p = \overline{1, N}$) и местоположение компонент считаем факторами с заданными «априори» плотностями $\rho(E_K^N)$, $\rho(A^N)$, $E_K^N = (E_1^N, E_2^N, \dots, E_K^N)$ и областями их определения – Ω_1 и Ω_2 соответственно.

Как следствие модельных приближений: матрицу $R_N = \langle u_k u_k^T \rangle$ (размера $M \times M$) межсенсорных корреляций вектора u_k можно записать в виде:

$$R_N = A^N \Psi_N (A^N)^T + \sigma_0^2 I_M, \quad (3)$$

где $\Psi_N = \langle E_k^N (E_k^N)^T \rangle$; $\Psi_N \in M_{N, N}(F)$.

Требуется: разработать процедуру, которая позволяет по выборке $u^K = [u_1, u_2, \dots, u_K]$ оценить число N источников компонент $E_p(t)$ из заданной области пространства при отсутствии информации о мощности σ_0^2 шумов.

Решение проблемы

В технической литературе предложены оптимальные в рамках критерия отношения правдоподобия (КОП) L_l правила принятия решений о числе $l = 1, 2, \dots$ источников излучения шумоподобных компонент с гауссовским распределением. Например, в работе [5] цитируемая идеология трансформирована в методику «подгонки» матрицы R_l к выборочной ковариационной матрице S вектора наблюдений u_k :

$$S = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K u_k u_k^T. \quad (4)$$

Такая трансформация позволила при выполнении гипотезы H_{l_0} ($l_0 = N$) минимизировать по R_l ($l = 1, 2, \dots, l_0$) количественную меру $\ln L_l$ КОП:

$$\ln L_l = \ln \left[p(u^k / S) / p(u^k / R_l) \right], \quad (5)$$

где $p(u^k / T)$ – плотность вероятности совокупности u^K независимых векторов u_k относительно фиксированного T , $T \in (S, R_l)$. Как результат трансформации технология проверки сложных гипотез H_l ($l = 1, 2, \dots$) свелась к проверке выполнения (с заданным уровнем значимости) условия равенности минимальных собственных значений Φ_j ($j = \overline{l+1, M}$) матрицы S . Применение подобных правил для оценки числа упомянутых компонент с различными формами колебаний, местоположение которых в пределах заданной области пространства неизвестно (решение поставленной задачи), имеет основание. Для доказательства этого утверждения детализируем связь функции правдоподобия $p(u^K / R)$, записанной относительно $R = \sigma_0^2 I_M$ с условной плотностью $p(u^K / A^l, E_K^l, R)$ и распределениями $\rho(E_K^l)$, $\rho(A^l)$.

$$p(u^K / R) = \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} p(u^K / A^l, E_K^l, R) p(E_K^l) p(A^l) dE_K^l dA^l. \quad (6)$$

Здесь каждой точке множества Ω_1 и Ω_2 возможных E_K^l и A^l исходов случайного эксперимента сопоставляется конкретная реализация совокупности $\{E_k^l\}$ независимых случайных векторов E_k^l и матриц A^l . Иными словами, различным комбинациям вектора $S_k^l = A^l E_k^l$ (различным формам компонент) будут соответствовать различные точки пространства сигналов

$$p(u^K / A^l, E_K^l, R) = (2\pi)^{-\frac{MK}{2}} |R|^{-\frac{K}{2}} \times \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^K (u_k - A^l E_k^l)^T R^{-1} (u_k - A^l E_k^l)\right\}. \quad (7)$$

Матрица R положительно определенная, для ее детерминанта использовано обозначение $|R|$. Без потери общности повествования при записи соотношения (6) использовано понятие объемного интеграла по областям Ω_1 и Ω_2 , отражающего факт последовательного интегрирования, кратность которого определена мерностью соответствующей плотности.

Очевидно, что норма $\|u_k - A^l E_k^l\|$ не изменится при ортогональном преобразовании вектора $\mathfrak{A}_k = u_k - A^l E_k^l$ [6]. Следовательно, если D – ортогональная ($M \times M$) матрица, и $DD^T = I_M$, то при заданной модели $R = \sigma_0^2 I_M$ невязка

$$\varepsilon^2 = \sum_{k=1}^K (u_k - A^l E_k^l)^T R^{-1} (u_k - A^l E_k^l) \text{ будет равна} \\ \varepsilon^2 = \sum_{k=1}^K \left\{ D(u_k - A^l E_k^l) \right\}^T R^{-1} \left\{ D(u_k - A^l E_k^l) \right\}. \quad (8)$$

Соотношение (8) при $K \gg 1$ тривиально приводится к виду

$$\varepsilon^2 = KSp\left\{R^{-1}[\Phi - Y]\right\}. \quad (9)$$

Здесь SpT – след матрицы T ,

$$S^l = K^{-1} \sum_{k=1}^K E_k^l (E_k^l)^T, \quad Y = DA^l S^l (DA^l)^T =$$

$$= \text{diag}(Y_1, Y_2, \dots, Y_M), \quad Y_i \geq 0 \quad (i = \overline{1, M}),$$

$$\Phi = DSD^T = \text{diag}(\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_M), \quad \Phi_i > 0 \quad (i = \overline{1, M}).$$

Приведенные равенства приведены на основании разложения Такаги и справедливы для симметричных вещественных матриц [6].

Представим $[\Phi - Y]$ в виде составной матрицы как

$$\Phi - Y = \begin{bmatrix} \Phi_l - Y_l & 0_{l}^{M-l} \\ 0_{M-l}^l & \nu_{M-l} \end{bmatrix}. \quad (10)$$

В последнем равенстве (10):

$$\Phi_l - Y_l = \text{diag}(\Phi_1 - Y_1, \Phi_2 - Y_2, \dots, \Phi_l - Y_l);$$

$$\nu_{M-l} = \text{diag}(\nu_{M-l+1}, \nu_{M-l+2}, \dots, \nu_M),$$

нижний индекс у символа означает размер соответствующей квадратной матрицы, 0_m^n – нулевая матрица размера ($m \times n$). Тогда:

$$\varepsilon^2 = KSp\left\{R_l^{-1}[\Phi_l - Y_l]\right\} + KSp\left\{R_{M-l}^{-1}\nu_{M-l}\right\}; \quad (11)$$

$$R_l = \sigma_0^2 I_l; \quad R_{M-l} = \sigma_0^2 I_{M-l}.$$

Последнее соотношение позволяет записать функцию правдоподобия $p(u^K / R)$ в виде произведения двух сомножителей

$$p(u^K / R) = p(u^K / R_{M-l}) p(u^K / R_l), \quad (12)$$

где

$$p(u^K / R_{M-l}) = \\ = (2\pi)^{-\frac{K(M-l)}{2}} |R_{M-l}|^{-\frac{K}{2}} \exp\left(-\frac{K}{2} SpR_{M-l}^{-1}\nu_{M-l}\right), \quad (13)$$

$$p(u^K / R_l) = \\ = (2\pi)^{-\frac{Kl}{2}} |R_{M-l}|^{-\frac{K}{2}} \exp\left(-\frac{K}{2} SpR_l^{-1}(\Phi_l - Y_l)\right).$$

Первый сомножитель в (12) не зависит от формы компонент и местоположения источника, во втором – $SpR_l^{-1}(\Phi_l - Y_l)$ фактически определяет невязку между σ_0^2 и ее оценкой $\hat{\sigma}_0^2$.

С учетом (12) логарифм $\ln(L_l)$ отношения правдоподобия L_l может быть факторизован как

$$\ln(L_l) = \Lambda_{M-l}(u^K, \sigma_0^2) + \Lambda_l(u^K, \sigma_0^2). \quad (14)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Lambda_{M-l}(u^K, \sigma_0^2) &= \ln \frac{p(u^K / v_{M-l})}{p(u^K / R_{M-l})}, \\ \Lambda_l(u^K, \sigma_0^2) &= \\ &= \ln \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} \frac{p(u^K / (\Phi_l - Y_l))}{p(u^K / R_l)} \rho(E_K^l) \rho(A^l) dE_K^l dA^l. \end{aligned} \quad (15)$$

Следовательно, правило решения о числе l наблюдаемых компонент неизвестной формы будет оптимальным в рамках КОП тогда, когда оно обеспечит минимум по R_{M-l} и R_l величины (14).

Очевидно, что процесс оптимизации может состоять в выборе практически целесообразных тестов принятия решений с позиции минимума каждого из составляющих (14). Более того, относительная независимость вклада в «достижение» общего минимума позволяет говорить о возможности самостоятельного использования каждого из них для синтеза соответствующих правил оценки l . Например, посредством упомянутой минимизации

$$\Lambda_{M-l}(u^K, \sigma_0^2) = \ln \frac{p(u^K / v_{M-l})}{p(u^K / R_{M-l})} \quad (16)$$

при известной σ_0^2 или соответствующей адаптивной минимизации $\Lambda_{M-l}(u^K, \hat{\sigma}_0^2)$ при неизвестной σ_0^2 , как функции, зависящей от $l, \hat{\sigma}_0^2$ – оценки неизвестной мощности σ_0^2 .

Пример эффективного использования составляющих факторизованных функций с адаптацией относительно σ_0^2 : методика и правило решения из работы [5] для оценки числа одновременно наблюдаемых шумоподобных сигналов. Базируясь на подходе, вытекающем из минимизации правой части равенства (16) и конкретизируя цитируемую методику к вышеуказанным исходным данным, нетрудно

показать, что адаптационная критическая статистика F_l в решаемой задаче приводится к виду:

$$F_l = (K-1) \times \left\{ (M-l) \ln \sum_{f=l+1}^M v_f - \sum_{f=l+1}^M \ln v_f - (M-l) \ln(M-l) \right\}. \quad (17)$$

Как следствие: тестовая функция (17) может быть использована для определения l_0 в рамках условий поставленной задачи.

В технологическом отношении нахождение оценки $l_0 = N$ целесообразно свести к формированию по наблюдениям u^K матрицы корреляций S , вычислению ее собственных значений и числовой последовательности F_l для каждой из выдвинутых гипотез H_l ($l=1,2,\dots$), сравнению F_l с порогом $\chi_{\alpha,t(l,M)}^2$, который выбран из таблиц χ^2 -распределения по заданному уровню значимости α и числу степеней свободы

$$t(l, M) = 0,5(M-l)(M-l+1) - 1.$$

При условии $F_l > \chi_{\alpha,t(l,M)}^2$ гипотеза отвергается. Далее переходят к проверке следующих гипотез H_{l+1}, H_{l+2}, \dots , увеличивая каждый раз l на единицу. Если на некотором шаге, например, l_0 -м, впервые $F_{l_0} \leq \chi_{\alpha,t(l_0,M)}^2$, то выносится решение: наблюдаемый процесс содержит $l_0 = N$ компонент. Процедура проверки гипотез на этом прекращается.

Для подтверждения теоретических выводов приводим результаты исследований, полученных на уровне цифрового статистического эксперимента.

Моделировалась обработка наблюдений, снятых с 8-ми сенсоров, эквидистантно расположенных на окружности заданного радиуса в плоскости xOy . Наблюдения, полученные с выходов упомянутых датчиков, могут в упрощенном виде характеризовать распределение потенциалов на поверхности физического объекта, например, скальпа человека, обусловленное очагами электрической активности

(диполями) внутри черепной коробки. Местоположение диполей в плоскости xOy связывалось с координатной функцией ϕ_m^n соотношением [1]:

$$\phi_m^n = \frac{a_x(x_m - x_n) + a_y(y_m - y_n)}{\left[(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n)^2 \right]^{1/2}}, \quad (18)$$

где a_x и a_y – проекции радиус-вектора точки $O_n(x_n, y_n)$ на оси Ox и Oy .

Для проверки теоретических выводов использовались следующие сигналы (рис. 1):

- 1) гауссовский процесс;
- 2) сигнал в форме sinc-функции;
- 3) меандр;
- 4) синусоида.

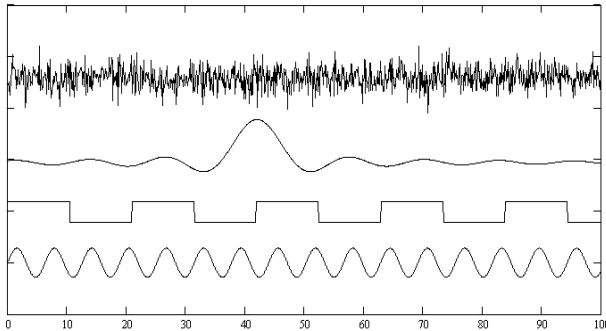


Рис. 1. Сигналы источников

Для эквивалентности все сигналы были приведены к нулевому математическому ожиданию и единичной дисперсии. Моделировалось шесть сигнальных ситуаций, представляющих собой случай присутствия двух источников, расположение которых показано на рис. 2.

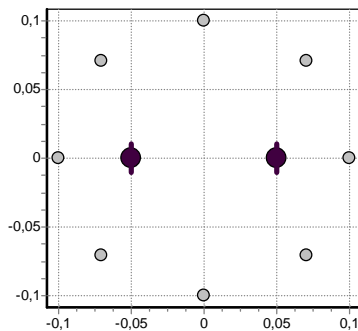


Рис. 2. Расположение источников

В каждой из них наблюдения представляли собой аддитивную смесь сигналов и гауссовского случайного процесса (шума) с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ_0^2 .

Оценка числа сигналов проводилась для следующих комбинаций сигналов (форм колебаний первого и второго источников излучения):

- гауссовский процесс – гауссовский процесс (1-1);
- гауссовский процесс – sinc (1-2);
- гауссовский процесс – меандр (1-3);
- гауссовский процесс – синусоида (1-4);
- sinc – синусоида (2-4);
- меандр – синусоида (3-4).

Для каждого случая проводилось 1000 экспериментов. Уровень значимости был выбран равным $\alpha = 5\%$. Определялось количество правильных решений о числе сигналов для различных соотношений сигнал/шум:

$$\mu = \frac{1}{MK} \sum_{m=1}^M \frac{\sigma_m^2}{\sigma_0^2}, \quad (19)$$

(σ_0^2 – мощность шумовой составляющей наблюдения на выходе m -го сенсора). Выборочная ковариационная матрица S оценивалась по 100 временным отсчетам.

Табл. 1 иллюстрирует зависимость вероятности P_{np} правильного оценивания числа компонент от соотношения сигнал/шум μ , полученных в результате аттестации рассматриваемого теста. Верхняя строка в таблице – заданная комбинация компонент в эксперименте, первый столбец – последовательность соотношений сигнал/шум. Числовое значение на пересечении упомянутых строки и столбца – P_{np} : процент благоприятных исходов в общем числе экспериментов. Анализ приведенного числового материала дает возможность убедиться, что форма компонент не оказывает влияния на качество классификации.

Таблица 1

Вероятность правильного оценивания числа источников сигналов в зависимости от μ для различных сигнальных ситуаций (СС)

$\mu/СС$	1-1	1-2	1-3	1-4	2-4	3-4
0,10	18,2	17,9	15,8	16,5	17,5	18,0
0,15	42,0	42,3	42,9	42,2	41,9	42,5
0,20	68,0	67,5	67,5	67,2	67,9	67,6
0,25	85,4	83,5	85,7	84,4	84,1	84,1
0,30	90,9	92,9	91,7	91,7	92,1	90,9
0,35	94,1	94,2	93,6	94,0	94,2	93,7
0,40	94,1	95,0	96,1	95,1	95,2	95,0
0,45	95,6	94,6	94,7	94,4	95,5	95,1
0,50	95,0	95,0	95,0	95,0	94,3	94,6
0,55	95,1	95,4	94,0	95,0	95,7	95,3
0,60	96,1	95,2	94,9	94,7	94,5	94,5
0,65	94,7	95,2	95,5	95,2	94,9	95,0

Небольшие отклонения обусловлены тем, что вероятность правильного определения оценивалась по конечному числу экспериментов (1000 повторных вычислений для каждой сигнальной ситуации). Несущественное отличие результатов при заданном μ для различных модельных ситуаций позволяет рабочие характеристики представить в виде обобщенной зависимости P_{np} (в %) определения числа источников сигналов от μ . Линии на рис. 3, соединяющие экспериментальные результаты, дают возможность проследить за динамикой изменения надежности правильного оценивания.

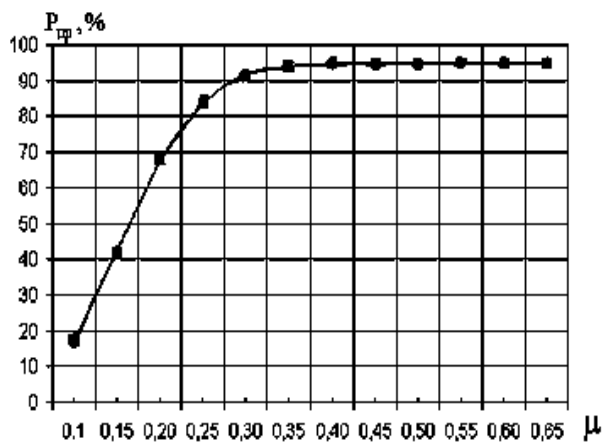


Рис. 3. Вероятность правильного оценивания числа источников колебаний в зависимости от соотношения сигнал/шум

Заключение

Приведенные теоретические и экспериментальные результаты позволяют сделать следующие выводы:

- рассмотренный тест принятия решений о количестве компонент в наблюдаемом процессе не зависит от их форм;
- синтезированная технология проста в вычислительной реализации, использует табулированную статистику и позволяет управлять величиной ошибки первого рода.

Литература

1. Ефименко В.С., Харисов В.Н. Оптимальные алгоритмы разделения пространственно-разнесенных источников излучения // Радиотехника. – 1996. – № 7. – С. 87-95.
2. Сычев М.И. Оценка числа близко расположенных источников излучения по пространственно-временной выборке // Радиотехника и электроника. – 1992. – Т. 37, № 10. – С. 1807-1815.
3. Wax M., Kailath T. Detection of signals by information theoretic criteria // IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing. – Apr. 1985. – Vol. 33, No. 2. – P. 387-392.
4. Гнездинский В.В. Обратная задача ЭЭГ и клиническая электроэнцефалография. – М.: Наука, 2000. – 344 с.
5. Абрамов А.Д., Нежальский Р.В. Экспериментальное исследование определителя числа одновременно наблюдаемых компонент с неизвестными параметрами // Радиоелектронні і комп'ютерні системи. – 2004. – № 1. – С. 50-54.
6. Корн Г.П., Корн Г.Т. Справочник по математике. – М.: Наука, 1973. – 832 с.

Поступила в редакцию 12.12.2005

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Н.Д. Кошевой, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков.