УДК 621.396

Л.С. СОРОКА

Объединенный научно-исследовательский институт Вооруженных Сил, Украина

ТЕОРЕМА О ЛОКАЛИЗОВАННЫХ ОТСЧЁТАХ И ЕЁ ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ СЖАТЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ СИГНАЛОВ

Предложен подход к определению избыточности формы представления непрерывных сигналов. Проведено доказательство теоремы, определяющей возможность локального размещения измерений при дискретизации финитных сигналов, представленных в интервально-разложенном виде. Показана возможность осуществления клонирующих (восстанавливающих) преобразований сигналов с заданной точностью по совокупностям измерений неполных выборок.

избыточность, непрерывные сигналы, локализация отсчётов, интервально разложенные формы сигналов, клонирующие преобразования

Введение

Процесс управления и передачи информации можно считать изученным только в том случае, если можно произвести все преобразования сигналов в системе, происходящие под воздействием внешней среды, а также воспроизвести последовательности выработки этих сигналов, наилучшим образом (по совокупности выбранных показателей) приводящие к достижению цели функционирования рассматриваемой системы. Основным продуктом, определяющим управление в технических и организационных системах, а также порождаемым в процессе самого управления, является информация. Количество информации, которое может содержаться в сообщениях, как правило, превышает минимально необходимый для реализации управления в системе уровень. Разность между фактически имеющимся и объективно необходимым количеством информации характеризует один из основных информационно-технических показателей источников – избыточность. Избыточность присуща практически всем этапам информационного управления и является объективно самым влиятельным средством воздействия на показатели эффективности автоматизированных систем. К. Шеннон [1, 2] определил избыточность, как «часть сообщения, которая является несущественной и, следовательно, повторяющейся в том смысле, что при её потере "полнота сообщения" фактически сохраняется или, по крайней мере, может быть восстановлена». В соответствии с тем же определением избыточность произвольной системы может быть найдена как величина, дополняющая относительную энтропию (отношение фактически имеющейся энтропии к возможно достижимому максимальному значению) до единичного значения.

В общем случае избыточность характеризует "степень свободы", которую можно использовать для специальных целей: борьбы с помехами, структурного резервирования и т.д., т.е. она – резерв технической реализации. В естественных ситуациях избыточность возникает, как неотъемлемая черта нашего мира в виде платы за возможность реализации [3]. Наиболее пристального внимания, связанного с большой теоретической значимостью, требует проблема совершенствования взглядов на определение и использование свойства избыточности финитных сигналов, модели которых используются при описании процессов передачи информации по каналам с ограниченным частотно-временным и энергетическим ресурсом в условиях помех [4]. Проблема и, одновременно, противоречие, приводящее к парадоксу, заключается в широком использовании моделей сигналов, ограниченных во времени и обладающих ограниченным спектром (что само по себе не достижимо в математическом смысле) для описания случайных (в смысле конкретного значения для приёмника) сигналов. С одной стороны, известно, что для восприятия информации, например, речевой, достаточно наблюдений сигнала в ограниченном диапазоне частотного спектра. С другой стороны, сигналы с ограниченным спектром, не имеющие частотных компонент выше некоторого значения частоты $f_в$, являются детерминированными (абсолютно предсказуемыми), т.е. не могут переносить информацию. Более того, в работах [5, 6] показано, что сигнал, спектр которого, начиная с некоторого значения, спадает быстрее, чем квадрат частоты, является регулярным (детерминированным). Существующие противоречия вынуждают искать новые подходы к определению моделей сигналов, как переносчиков информации, и способов определения избыточности при представлении их финитными функциями времени.

Цель работы заключается в доказательстве возможности получения сжатых безизбыточных форм сигналов на основе применения неполных выборок интервально-разложенных представлений, а также возможности восстановления (клонирования) исходных сигналов с заданной точностью с использованием алгоритмов, основанных на составлении и решении систем линейных уравнений.

Результаты исследований

Исследование применения интервальной аппроксимации сингулярных сигналов отрезками регулярных, перед их передачей по каналу, интересно с точки зрения совершенствования способов помехоустойчивой обработки при помощи математических алгоритмов линейной алгебраической фильтрации, способных наряду с частотной селекцией производить восстановление (клонирование или прогноз) сигналов по неполным выборкам наблюдений. Применение интевально-разложенных в ортогональных базисах (клонируемых) представлений произвольных финитных сигналов, с последующим их преобразованием в сжатые формы, является, по сути, новым подходом к совершенствованию способов кодирования источников, позволяющим добиться экономии частотно-временного ресурса каналов за счет исключения непродуктивной избыточности. Потенциальные возможности степени сжатия форм представления сигналов следуют из доказательства следующей теоремы.

Теорема. Непрерывная функция времени, не содержащая в спектре частот выше $f_в$ и допускающая аппроксимирующее представление в интервально-разложенном виде на интервале Δt (абсолютно интегрируема в L_2, удовлетворяющая условиям Дирихле), может быть восстановлена со сколь угодно малой ошибкой на основании $2 \cdot f_в \cdot \Delta t$ мгновенных отсчетов, взятых на отрезке $\Delta t' << \Delta t$. Суть формулировки отражает тот факт, что для представления финитной функции последовательностью дискретных измерений необходимо обеспечить только среднюю плотность дискретизации на уровне $1/(2 \cdot f_в)$, локализуя эти измерения так, как требуют цели построения сжатой формы. Условием реализуемости представления является обязательность задержки на величину Δt для осуществления интервального разложения. Доказательство теоремы включает два этапа.

Первый этап предусматривает доказательство возможности асимптотического приближения отрезка финитной функции $x(t)$ на интервале $t = \overline{0, k \cdot \Delta t}$ последовательностью интервальных разложений

$$x(t) \approx x^*(t) = \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=0}^{n} \left[u_i \Psi_i\left(t - j \cdot \Delta t\right)\right] \cdot \Theta_j\left(t\right); \qquad (1)$$
$$\Theta_j\left(t\right) = \Phi\left(t - j \cdot \Delta t\right) - \Phi\left(t - \left(j+1\right)\Delta t\right)$$

с произвольно малой мощностью ошибки

$$\delta^2 = \int_0^{k\cdot\Delta t} \left[x(t) - x^*(t)\right]^2 dt\,. \qquad (2)$$

Здесь использованы обзначения: n – порядок разложения; $\Psi_i(t), u_i$ – базис и коэффициенты ортонормированного разложения; $\Theta_j(t)$ – «оконные» функции; $\Phi(t)$ – функция Хевисайда. В [7] показано, что из минимального свойства частных сумм и неравенства Бесселя следует

$$\lim_{n\to\infty}\left(\delta^2\right) \to 0\,, \qquad (3)$$

а для оценки ошибки (2) при конечном порядке разложения стационарной эргодичной функции можно использовать приближённую формулу

$$\delta^2 \approx k\frac{D_x - K_x(\Delta t)}{2\cdot\Delta t}\times$$
$$\times\int_0^{\Delta t}\left[Sinc\left(\frac{2\pi n}{\Delta t}(t)\right) - Sinc\left(\frac{2\pi n}{\Delta t}(t-\Delta t)\right)\right]^2 dt, \qquad (4)$$

где $D_x, K_x(\Delta t)$ – дисперсия и корреляционная функция исходной реализации $x(t)$. Из (3) и (4) следует результат доказательства первого этапа.

Второй этап заключается в доказательстве возможности определения набора коэффициентов разложения $u_i, i=\overline{1,n}$ на каждом из k интервалов $x^*(t)$ по результатам $2\cdot f_в\cdot\Delta t$ дискретных измерений, размещённых в пределах отрезка $\Delta t' = \varepsilon\cdot\Delta t$, где $\varepsilon << 1$. При любом виде разложения (1) для определения искомых коэффициентов необходимо решение $2\cdot f_в\cdot\Delta t$ уравнений с таким же числом неизвестных u_i. Система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) для произвольного интервала разложения имеет вид

$$A\cdot\overline{U} = \overline{B}\,, \qquad (5)$$

где $\overline{U} = \{u_1,\ldots,u_n\}$ – вектор искомых коэффициентов; A – квадратная матрица коэффициентов СЛАУ, определяемая видом и параметрами интервального разложения $x^*(t)$; $\overline{B}$ – вектор наблюдений (измерений) $x^*(t_m)$ в моменты времени

$$t_m = m\cdot\varepsilon\cdot\Delta t/n\,.$$

Для базисных функций $\Psi_i(t)$ и порядка разложения n матрица коэффициентов СЛАУ (клонирующая матрица) и вектор наблюдений имеют вид

$$A = \begin{vmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots & a_{0,n} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,0} & a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}, a_{m,i} = \Psi_i(t_m)\,; \qquad (6)$$
$$\overline{B} = \{b_0, b_1, \ldots b_n\}, \quad b_m = x^*(t_m)\,,\; m=\overline{0,n}\,.$$

Для обеспечения линейной независимости строк клонирующей матрицы вектор наблюдений должен формироваться по результатам $(n+1)$ измерений (отсчётов) на отрезке $\Delta t'$. При выполнении указанных условий СЛАУ (5) имеет единственное решение в случае неравенства нулю определителя клонирующей матрицы (6):

$$\det\{A\} \neq 0\,. \qquad (7)$$

Следовательно, доказательством второго этапа и справедливости рассматриваемой теоремы в целом (при учёте (3)) является выполнение требования (7) при любом $\varepsilon \to 0$. Ввиду громоздкости аналитического выражения определителя $\det\{A\}$ при любых видах $\Psi_i(t)$ доказательство может быть получено графическим исследованием. На рис. 1 представлены зависимости модуля определителя клонирующей матрицы (6) от величины относительной длитель-

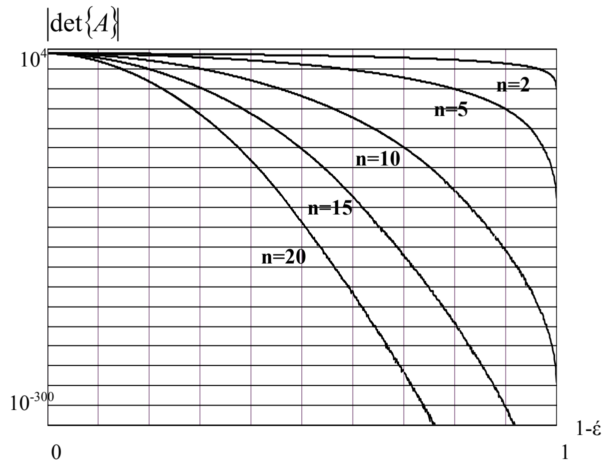

Рис. 1. Зависимость $|\det\{A\}|$ от относительного размера недоступной для измерений части Δt

ности недоступного для измерений отрезка интервала разложения. Зависимости на рис. 1 получены при использовании в качестве базиса разложения (1) на интервале Δt отсчётных функций Котельникова-Найквиста:

$$\Psi_j(t) = Sinc\left(2\pi \cdot f_в \cdot \left(t - \frac{j \cdot \Delta t}{2 f_в}\right)\right).$$

Следует заметить, что использование для интервального представления (1) ряда Фурье с гармоническим базисом даёт аналогичный характер поведения $\left|\det\{A\}\right|$. Результаты графического исследования позволяют констатировать следующие факты.

1. При любом $\varepsilon \to 0$ отсутствуют пересечения функции $\left|\det\{A\}\right|$ с осью абсцисс, т.е. $\det\{A\} \neq 0$ при $0 < \varepsilon < 1$, что и требовалось доказать.

2. Возрастание порядка разложения n и уменьшение относительной величины $\Delta t'$ ведут к асимптотическому приближению $\det\{A\}$ к нулю.

Выводы

Полученные результаты позволяют утверждать, что в соответствии с приведенной формулировкой теоремы о локализованных отсчетах возможно восстановление (со сколь угодно малой погрешностью (4)) реализаций непрерывных функций, удовлетворяющих условиям теоремы, по данным неполных выборок наблюдений.

Восстановление (клонирование) становится возможным, благодаря априорному представлению сигналов в интервально-разложенном виде, что даёт возможность определения параметров разложения по результатам дискретных измерений на сколь угодно малых (теоретически) отрезках исходных интервалов. Алгоритм вычисления параметров разложения основан на решении СЛАУ, образуемых клонирующими матрицами и векторами наблюдений (6). Стремление к нулю определителей клонирующих матриц при уменьшении интервала наблюдения отрезков восстанавливаемых сигналов вызвано снижением степени определенности СЛАУ. Это приводит к неустойчивым решениям и накладывает вычислительные ограничения на минимально допустимый интервал измерений. Применение результатов доказанной теоремы и рассмотренного клонирующего алгоритма для устранения избыточности даёт возможность существенно снизить требования к ёмкости каналов и упростить методы обработки сигналов.

Литература

1. Шеннон К. Математическая теория связи // К. Шеннон. Работы по теории информации и кибернетике. – М.: Иностранная литература, 1963. – С. 243 – 332.

2. Галлагер Р. Теория информации и надёжная связь. Пер. с англ. / Под ред. М.С. Пинскера и Б.С. Цыбакова. – М.: Сов. радио, 1974. – 720 с.

3. Куликовский Л.Ф., Мотов В.В. Теоретические основы информационных процессов. – М.: Высш. шк., 1987. – 248 с.

4. Макаров С.Б., Цикин И.А. Передача дискретных сообщений по радиоканалам с ограниченной полосой пропускания. – М.: Радио и связь,1988. – 304 с.

5. Тихонов В.И. Развитие теории оптимальной фильтрации сообщений в СССР // Радиотехника. – 1983. – Т. 38, № 11. – С. 11 – 27.

6. Степанов А.В., Матвеев С.А. Методы компьютерной обработки сигналов систем радиосвязи. – М.: СОЛОН-Пресс, 2003. – 208 с.

7. Сорока Л.С. Метод асимптотической оценки точности интервального представления финитных сигналов // Моделювання та інформаційні технології. – К.: НАНУ, ІПМЕ імені Г.Є. Пухова, 2005. – С. 204 – 206.

Поступила в редакцию 17.10.2005

Рецензент: д-р техн. наук, с.н.с. В.И. Антюфеев, Объединённый научно-исследовательский институт Вооружённых Сил, Харьков.