

УДК 621.38

С.В. ХУТОРНЕНКО, В.Н. САВЧЕНКО

Українська інженерно-педагогічна академія, Харків, Україна

**МОДЕЛЬ КОЛЕБАНИЙ ПЬЕЗОЭЛЕМЕНТА
С ОДНОСТОРОННЕЙ МАССОНАГРУЗКОЙ**

Получена математическая модель толщинно-сдвиговых колебаний пьезокварцевых пьезоэлементов с односторонней массонагрузкой. На основе решения дифференциальных уравнений колебаний пьезоэлемента в частных производных вдоль толщины пластины получены решения для волнового числа в виде трансцендентного уравнения и его решения. Получены приближенные выражения для частоты и формы колебаний. Дана оценка погрешности известных и полученного решений.

пьезоэлемент, массонагрузка, толщинно – сдвиговые колебания**Введение**

Постановка проблемы. Пьезоэлектрические кварцевые резонаторы (КР) находят широкое применение в радиоэлектронных устройствах различного назначения в качестве элементов стабилизации и селекции частоты, а также в чувствительного элемента датчиков различного назначения.

Отдельный класс устройств представляют пьезорезонансные датчики с переменным зазором между одним из электродов и кристаллическим элементом (КЭ), в которых одна поверхность КЭ свободна, а на второй находится электрод, создающий массонагрузку. Наибольшая чувствительность датчика к измеряемой величине, приводимой к изменению зазора, достигается в случае микрозазора [1], когда $d \ll 2h$, где $2h$ – толщина КЭ.

При положении электрода, когда зазор стремится к нулю, существенное влияние на параметры КР оказывает не только величина массонагрузки, но и несимметричное ее расположение на поверхностях пластины КЭ, что должно учитываться при моделировании.

Анализ публикаций. Существует два основных подхода к моделированию колебаний ПЭ:

1) точное трехмерное решение уравнений колебаний с последующим уменьшением размерности

координат частных производных до одной, что эквивалентно случаю бесконечной пластины КЭ. Преимуществом модели является возможность получение аналитического частотного решения для ряда частных случаев, на основе которого можно просто определить коэффициенты влияния воздействующих на ПЭ технологических и внешних факторов, что важно для датчиков;

2) замена трехмерного точного решения моделью двумерных стоячих волн. При этом решение существенно усложняется и справедливо в ограниченной области, но появляется возможность учета изменения свойств резонатора в плоскости КЭ. Модификацией последнего метода является последующее понижение размерности модели [2] и возврат к случаю бесконечной пластины ПЭ.

В работах [2 – 4] рассматриваются вопросы влияния различных механических воздействий на колебания ПЭ. В [2] на основе модели двумерных стоячих волн получены уравнения для анализа влияния механических воздействий на сдвиговые по толщине (TS), изгибные (F) и сдвиговые по грани (FS) колебания ПЭ АТ – среза кварца с двумя идентичными электродами.

В [3] аналогичный подход использован для исследования влияния вязкоупругого слоя конечной толщины на свободные и вынужденные связанные

TS- и F-колебания ограниченных прямоугольных ПЭ АТ – среза кварца. Показано, что влияние вязкоупругой жидкости, массы электродов и их механических свойств могут быть учтены в качестве дополнительных членов в формуле для комплексной частоты Ω и ведут к уменьшению последней.

В отличие от [2, 3] в [4] массонагрузка предполагается большой. На основании конечно-элементной модели рассчитано влияние механических свойств электродов и показано, что их влияние на основную резонансную частоту f_0 и индуктивность $L1$ пренебрежимо мало по сравнению с массонагрузкой для $0 \leq R \leq 0,36$.

В [5] на основе трехмерной модели предложена модель колебаний бесконечного ПЭ (учитываются колебания только в направлении толщины КЭ), учитывающая одновременное воздействие как массонагрузки (в том числе большой $R > 0,1$), так и межэлектродного зазора.

Недостатком известных моделей является отсутствие одновременного учета несимметричной массонагрузки (с ее отсутствием на одной из граней КЭ) и зазора между электродом и КЭ.

Целью данной работы является разработка модели колебаний кварцевого ПЭ для случая односторонней массонагрузки ($R1 = 0, R2 \neq 0$), в предположении, что чувствительный элемент датчика работает с микрозазором.

Математическая модель колебаний

Пусть пьезоэлемент расположен в системе декартовых координат согласно рис. 1.

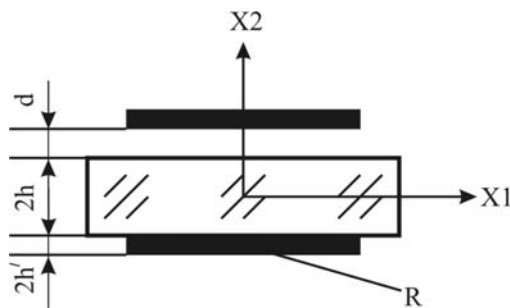


Рис. 1. ПЭ с зазором между КЭ и электродом

Исходная система уравнений колебаний ПЭ для существования изменения смещения в направлении координаты $X2$ получено в [7]. В нашем случае граничные условия примут вид:

$$T_{21} = c_{66}u_{1,2} + e_{26}\varphi_{,2} = 0 \quad \text{при } x_2 = +h;$$

$$T_{21} = c_{66}u_{1,2} + e_{26}\varphi_{,2} = +2h'\rho'u_1, \quad \text{при } x_2 = -h;$$

$$\varphi = \pm\varphi_0 \cos \omega t, \quad \text{при } x_2 = \pm h, \quad (1)$$

где T_{21} – компонент тензора механических напряжений;

$c_{\lambda\mu}$ – компоненты тензора жесткости;

$e_{k\lambda}$ – пьезоэлектрические коэффициенты;

ε_{ij} – диэлектрические коэффициенты;

$u_{i,j}$ – механическое смещение;

$\varphi_{,i}$ – электрический потенциал;

h', ρ' – толщина и плотность материала электрода.

Система уравнений колебаний КЭ после интегрирования и очевидных преобразований будет иметь вид:

$$\begin{cases} \bar{c}_{66}u_{1,22} + \rho\omega^2 u_1 = 0; \\ \varphi = \frac{e_{26}}{\varepsilon_{22}}u_1 + L_1x_2 + L_2, \end{cases} \quad (2)$$

а механическое напряжение и электрический потенциал примут вид:

$$T_{21} = \bar{c}_{66}u_{1,2} + e_{26}L_1 = 0, \quad \text{при } x_2 = +h;$$

$$T_{21} = \bar{c}_{66}u_{1,2} + e_{26}L_2 = +2h'\rho'u_1, \quad \text{при } x_2 = -h;$$

$$\varphi = \frac{e_{26}}{\varepsilon_{22}}u_1 + L_1x_2 + L_2 = \pm\varphi_0, \quad \text{при } x_2 = \pm h, \quad (3)$$

где $\bar{c}_{66} = c_{66} + \frac{e_{26}^2}{\varepsilon_{22}}$ – модифицированный коэффициент жесткости;

L_1, L_2 – постоянные интегрирования.

Решение будем искать в виде

$$u_1 = A \sin \eta x_2 + B \cos \eta x_2. \quad (4)$$

Подставляя (4) в (2), получим выражение для соб-

ственной частоты колебаний ПЭ $\omega^2 = \eta^2 \frac{\bar{c}_{66}}{\rho}$.

Перейдем к граничным условиям и определим постоянные интегрирования

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{\Phi_0}{h} - \frac{e_{26}}{\varepsilon_{22}h} A \sin \eta h; \\ L_2 &= -\frac{e_{26}}{\varepsilon_{22}h} B \cos \eta h, \end{aligned} \quad (5)$$

после подстановки которых в (2) получим систему

$$\begin{cases} A\bar{c}_{66} \left(\eta \cos \eta h - \frac{k_{26}^2}{h} \sin \eta h \right) - \\ B\bar{c}_{66} \eta \sin \eta h = -\frac{e_{26}}{h} \Phi_0; \\ A\bar{c}_{66} \left(\eta \cos \eta h - \frac{k_{26}^2}{h} \sin \eta h - hR\eta^2 \sin \eta h \right) - \\ - B\bar{c}_{66} (\eta \sin \eta h + \eta^2 hR \cos \eta h) = -\frac{e_{26}}{h} \Phi_0, \end{cases} \quad (6)$$

из которой определим коэффициенты A и B :

$$A = k_u \cdot \frac{1 + 0,5\eta h t g \eta h R}{\eta h \cos \eta h - k_{26}^2 \sin \eta h + \frac{R\eta h}{\sin \eta h} k_r}; \quad (7)$$

$$B = k_u \cdot \frac{\eta h R \sin \eta h}{\eta h \cos \eta h - k_{26}^2 \sin \eta h + \frac{R\eta h}{\sin \eta h} k_r}, \quad (8)$$

где $k_u = -\frac{\Phi_0 e_{26}}{\bar{c}_{66}}$;

$$k_r = \eta h \cos 2\eta h - \frac{k_{26}^2}{2} \sin 2\eta h;$$

k_{26}^2 – коэффициент электромеханической связи;

$$R = \frac{2h'\rho'}{h\rho} \text{ – относительная масса нагрузка;}$$

h', ρ', h, ρ – толщина и плотность электрода и КЭ

соответственно.

Резонанс наступает при $A \rightarrow \infty$, таким образом, приравняем к нулю знаменатель в выражении для A и получим решение в виде трансцендентного уравнения

$$\eta h t g \eta h - [1 + 0,5\eta h M c t g \eta h] k_{26}^2 - 0,5\eta^2 h^2 M [1 - c t g^2 \eta h] = 0. \quad (9)$$

Анализ модели колебаний

Решим полученное трансцендентное уравнение относительно волнового числа ηh . При этом воспользуемся разложением функций в степенной ряд, в окрестности области $\eta h = \frac{n\pi}{2} - \delta$, где $\delta \rightarrow 0$.

После преобразований получим выражение для волнового числа

$$\eta h = \frac{n\pi}{2} \frac{R(-n\pi + 2k_{26}^2 - 2) - 4 + \frac{16k_{26}^2}{n^2\pi^2}}{R(n\pi - 2k_{26}^2 + 2) + 4} \quad (10)$$

и резонансную частоту TS-колебаний ПЭ:

$$f = \frac{n\pi}{2(2h)} \sqrt{\frac{\bar{c}_{66}}{\rho}} \left[1 - \frac{2R}{R(n\pi - 2k_{26}^2 + 2) + 4} - \frac{16k_{26}^2}{R(n\pi - 2k_{26}^2 + 2) + 4} \right]. \quad (11)$$

В полученном выражении второе слагаемое в квадратных скобках учитывает влияние масса нагрузки, а третье – пьезоэффекта. Корректность полученных выражений подтверждается путем предельного перехода к известным зависимостям [5 – 7].

Моделирование ПЭ с односторонней масса нагрузкой

Для оценки влияния односторонней масса нагрузки рассчитано механическое смещение u_1 как функция от толщины КЭ. Масса нагрузка R находится со стороны $-h$. Данные представлены в нормализованном виде на рис. 2.

Максимальное смещение при $R=0$ – 12 нм; $R=0,01$ –1нм; $R=0,1$ –10пм; $R=0,36$ – 3 пм; $R=1$ – 0,7 пм. Из приведенных графиков видно отличие формы колебаний от симметричной относительно оси X_1 , вызванное односторонней масса нагрузкой.

На рис. 3 показаны относительные погрешности изменения частоты колебаний ПЭ в процентах в зависимости от масса нагрузки R полученной модели и моделей [5, 7]. В [5] учитывается возможность большой масса нагрузки и межэлектродного зазора.

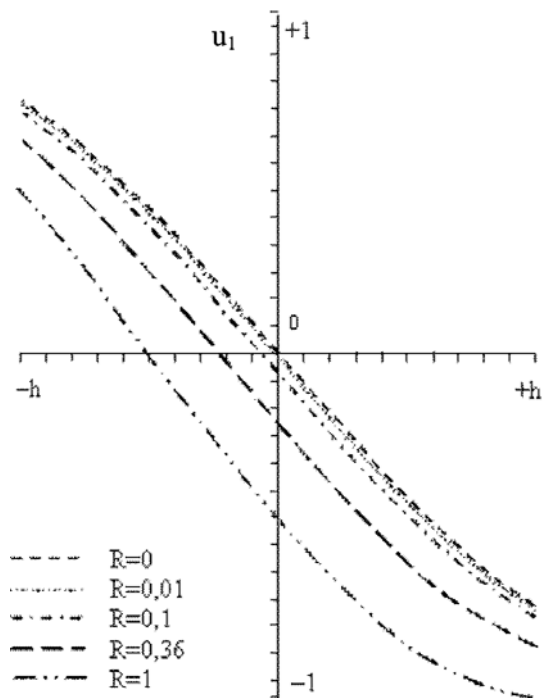


Рис. 2. Зависимость механического смещения от толщины КЭ и массонагрузки

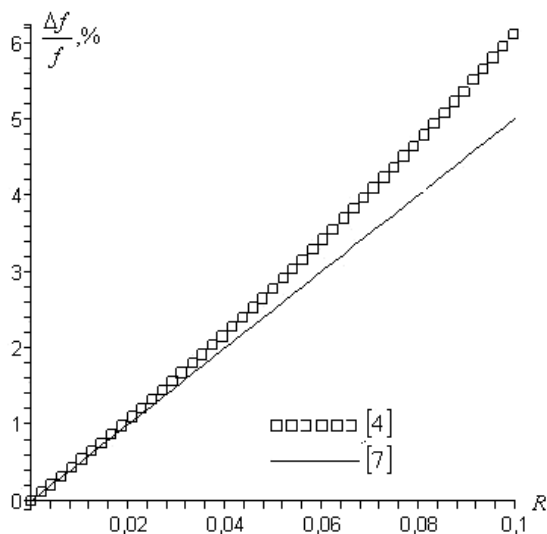


Рис. 3. Относительная погрешность частот колебаний ПЭ в зависимости от массонагрузки

Заключение

Получена одномерная модель колебаний ПЭ с односторонней массонагрузкой $R_1 = 0, R_2 \neq 0$. Проведен анализ влияния односторонней массонагрузки на частоту и форму колебания ПЭ с межэлектродным микрозазором. Показано качественное

изменение формы колебаний по сравнению с симметричной массонагрузкой.

Отсутствие учета односторонней массонагрузки приводит к относительной погрешности частоты ПЭ в 6% при $R = 0,1, d \rightarrow 0$ (рис. 3).

Перспективами дальнейшего исследования является учет в модели межэлектродного зазора d и расширение модели на общий случай $R_1 \neq 0, R_2 \neq 0$. Результаты исследования могут быть использованы для решения задач моделирования ПЭ – датчиков.

Литература

1. Акулиничев А.А. Электромеханический кварцевый частотный модулятор на базе технологии MEMS // Радиотехника. – Х.: ХНУРЭ, 2004. – Вып. 138. – С. 197 – 205.
2. Lee P.C.Y. Mechanical effects of electrodes on the vibrations of quartz crystal plates // IEEE Trans. UFFC. – 2002. – Vol. 5 (49). – P. 612 – 625.
3. Lee P.C.Y. Effects of a liquid layer on thickness-shear vibrations of rectangular AT-cut quartz plates // IEEE Trans. UFFC. – 2002. – Vol. 5(49). – P. 604 – 611.
4. Gong X., Sekimoto H., Goka S., Watanabe Y. Two-dimensional analysis of trapped-energy vibrations of AT-cut quartz resonators with large mass-loading // Jpn. J. Appl. Phys. – 2002. – Vol. 41. – P. 3409 – 3412.
5. Хуторненко С.В. Толщинно-сдвиговые колебания пьезорезонансных элементов датчиков технологических параметров // Технология приборостроения. – 1996. – № 1. – С. 24 – 27.
6. Mindlin R.D. Thickness-shear and flexural vibrations of crystal plates // J.Appl.Phys.– 1951. – 22 (316).
7. Tiersten H.F. Linear piezoelectric plate vibrations. – New York: Plenum Press, 1969.

Поступила в редакцию 24.10.2005

Рецензент: д-р техн. наук, проф. В.Д. Сахацкий, Украинская инженерно-педагогическая академия, Харьков.