

УДК 621.396

А.А. АСТРАХАНЦЕВ

*Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Украина*

## АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИИ ТИПА «ПРИПОДНЯТЫЙ КОСИНУС» ТРАНСЦЕНДЕНТНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Рассмотрены вопросы синтеза фильтров, удовлетворяющих первому критерию Найквиста и обладающих финитной передаточной функцией по критерию минимума энергии боковых лепестков импульсной характеристики. Приведен синтез функции на основе гиперболического тангенса, обеспечивающей лучшую помехоустойчивость модели, чем традиционно используемый «приподнятый косинус».

**помехоустойчивость цифровых систем передачи, сглаживающая функция, САР-модуляция, межсимвольная интерференция, аддитивная помеха, нестабильность фазы**

### Введение

За счет увеличения числа услуг, предоставляемых абонентам по «классическому» медному кабелю, приобретает актуальность задача обеспечения качества связи. Одновременное предоставление нескольких услуг по одному кабелю требует, во-первых, компактного использования спектра и, во-вторых, минимизации влияний между используемыми полосами частот. И первое требование, и второе можно обеспечить использованием узкополосных алгоритмов модуляции типа САР, которые обеспечивают компактность спектра и минимум внеполосных влияний за счет специальных сглаживающих (скругляющих) функций [1]. Также необходимые качество и скорость можно обеспечить переходом к широкополосным видам модуляции типа DMT, адаптивно оценивающего помеховую обстановку в канале связи, в основу которого положен опять же узкополосный алгоритм QAM. Кроме того, следует отметить, что DMT устраняет междиапазонные и внутридиапазонные влияния также использованием специальных сглаживающих функций.

На практике наибольшее применение получила модель функции (фильтр) с характеристикой типа «приподнятый косинус», поскольку с ее помощью можно получить до 99% энергии в ограниченной полосе частот.

**Формулирование проблемы.** Функция типа «приподнятый косинус» является физически нереализуемой моделью и для ее практической реализации необходимо использовать аппроксимацию со степенью точности, диктуемой требованиями к качеству связи. В настоящее время приводится в литературе [1, 2] и используется на практике только кусочно-линейная аппроксимация функции типа «приподнятый косинус». Данная аппроксимация проста в реализации, но в достаточной степени не позволяет обеспечить требования к качеству, выдвигаемые современными высокоскоростными системами. Поэтому актуальной задачей является получение новой функции на основе более сложной аппроксимации функции типа «приподнятый косинус». Как было показано в предыдущей статье [3], возможна и имеет ряд преимуществ аппроксимация степенными полиномами 2-го порядка.

**Цель работы:** синтез функции, удовлетворяющей первому критерию Найквиста и обеспечивающей лучшую, чем «приподнятый косинус», помехоустойчивость. В качестве исходных данных для синтеза была выбрана функция гиперболического тангенса.

### Синтез сглаживающей функции на основе функции гиперболического тангенса

Используем функцию типа «приподнятого косинуса» в качестве начальной точки для проведения

исследований. Известно [1, 2], что функция «приподнятого косинуса» удовлетворяет первому критерию Найквиста и имеет в частотной области следующий вид:

$$G(f) = \begin{cases} UT, & \text{при } 0 \leq |f| \text{ и } |f| \leq \frac{1-\alpha}{2T}; \\ \frac{UT}{2} \left[ 1 + \cos \left[ \frac{\pi T}{\alpha} \left( |f| - \frac{1-\alpha}{2 \cdot T} \right) \right] \right], & \text{при } \frac{1-\alpha}{2T} < |f| \text{ и } |f| \leq \frac{1+\alpha}{2T}; \\ 0, & \text{при } |f| > \frac{1+\alpha}{2T}, \end{cases} \quad (1)$$

где  $U$  – амплитуда;

$T$  – интервал взятия отсчетов;

$\alpha$  – коэффициент скругления ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ).

Первый критерий Найквиста при этом представлялся в виде

$$g(kT) = \begin{cases} 1, & k = 0; \\ 0, & k = \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases} \quad (2)$$

Математическое моделирование показало, что функции, в основе которых лежит «гиперболический тангенс», удовлетворяют критерию Найквиста и могут использоваться для синтеза новых функций с частотной характеристикой, близкой к «приподнятому косинусу». Основываясь на этом, была получена функция

$$\hat{G}1(f, \beta) = \begin{cases} 0,5 \cdot th \left( \frac{f+0,5}{\beta} \right) + 0,5, & \text{если } 0 > f \geq -1; \\ -0,5 \cdot th \left( \frac{f-0,5}{\beta} \right) + 0,5, & \text{если } 1 > f \geq 0; \\ 0, & \text{при } f > 1 \cap f < -1. \end{cases} \quad (3)$$

Параметр  $\beta$  в выражении (3) имеет тот же смысл, что и коэффициента сглаживания  $\alpha$  у «приподнятого косинуса».

Функция, имеющая требуемую частотную характеристику, может быть получена из  $\hat{G}1(f, \beta)$  вычитанием постоянного коэффициента, который имеет следующий вид:

$$\hat{G}2(f, \beta) = \begin{cases} 0,5 \cdot th \left( \frac{1,5}{\beta} \right) + 0,5, & \text{если } 0 > f \geq -1; \\ -0,5 \cdot th \left( \frac{0,5}{\beta} \right) + 0,5, & \text{если } 1 > f \geq 0; \\ 0, & \text{при } f > 1 \cap f < -1, \end{cases} \quad (4)$$

т.е. синтезированная функция будет иметь вид

$$\hat{G}(f, \beta) = \hat{G}1(f, \beta) - \hat{G}2(f, \beta). \quad (5)$$

На рис. 1 приведены спектры функции, синтезированной на основе гиперболического тангенса и функции типа «приподнятый косинус». Рис. 2 иллюстрирует степень отличия функций в частотной области.

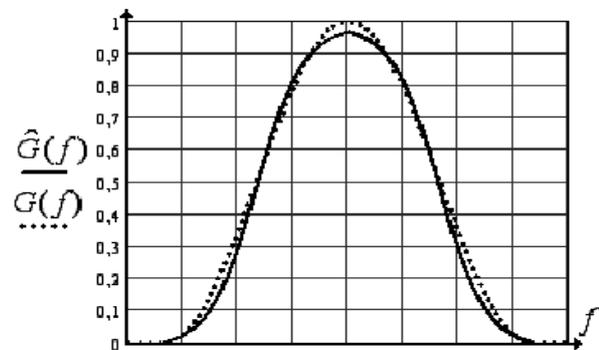


Рис. 1. Спектры функции типа «приподнятый косинус» (точечная линия) и функции, синтезированной на основе гиперболического тангенса (сплошная линия)

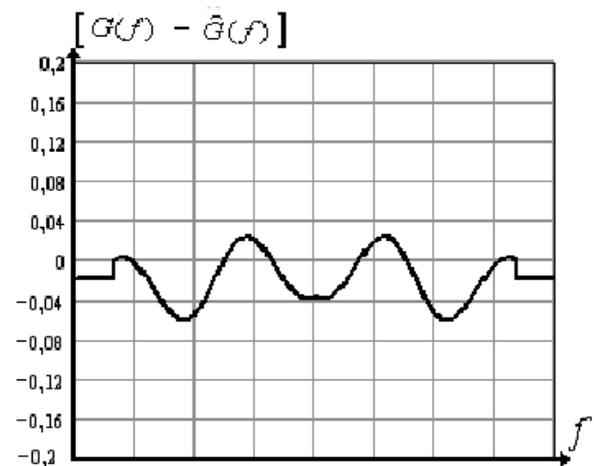


Рис. 2. Степень отличия функций

## Оценка помехоустойчивости функций

Важной задачей, с точки зрения помехоустойчивости, является оценка коэффициента содержания

энергии в боковых лепестках импульсной характеристики.

Под коэффициентом содержания энергии в боковых лепестках импульсной характеристики будем понимать отношение

$$k_N = \frac{\int_0^{N \cdot T} |S(t)|^2 dt}{\int_0^{\infty} |S(t)|^2 dt}, \quad (6)$$

где  $k_N$  – относительный уровень мощности, содержащейся в боковых лепестках, начиная с  $N$ -го;

$\int_0^{N \cdot T} |S(t)|^2 dt$  – энергия, содержащаяся в лепестках, начиная с  $N$ -го;

каж, начиная с  $N$ -го;

$\int_0^{\infty} |S(t)|^2 dt$  – энергия отклика.

Для определенных выше функций результаты оценки этого коэффициента приведены в табл. 1 и табл. 2.

Таблица 1

Величина энергии вне основной полосы

$\beta$	Функция «Гиперболического тангенса»	
	Отношение боковых лепестков к общей энергии (со 2-го лепестка)	Отношение боковых лепестков к общей энергии (с 3-го лепестка)
0,25	$2,836 \cdot 10^{-3}$	$3,941 \cdot 10^{-5}$
0,17	0,011	$3,942 \cdot 10^{-4}$
0,12	0,024	$2,084 \cdot 10^{-3}$
0,05	0,058	0,016
$1 \cdot 10^{-4}$	0,09	0,043

Таблица 2

Величина энергии вне основной полосы

$\alpha$	Функция типа «Приподнятый косинус»	
	Отношение боковых лепестков к общей энергии (начиная со 2-го)	Отношение боковых лепестков к общей энергии (начиная с 3-го)
1	$5,077 \cdot 10^{-4}$	$1,36 \cdot 10^{-5}$
0,75	$4,730 \cdot 10^{-3}$	$8,67 \cdot 10^{-5}$
0,5	0,019	$5,248 \cdot 10^{-4}$
0,25	0,049	0,01
$1 \cdot 10^{-4}$	0,09	0,043

Табл. 1 показывает, что функция, синтезированная на основе гиперболического тангенса, имеет более высокую мощность боковых лепестков импульсной характеристики, но однозначное сравнение с функцией приподнятого косинуса проводить нельзя из-за нетождественности коэффициентов сглаживания  $\alpha$  и  $\beta$ .

Результаты исследования помехоустойчивости синтезированной функции и функции типа «приподнятый косинус» при использовании их в модуляции САР и различных значениях коэффициента скругления в зависимости от СКО помехи приведены на рис. 3 и 4.

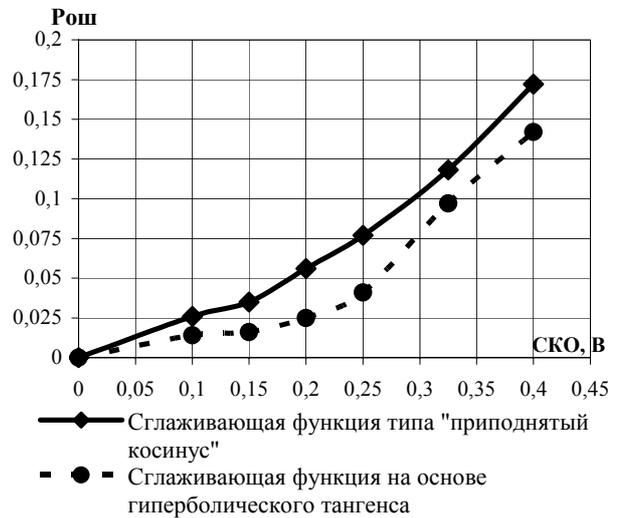


Рис. 3. Сравнительная помехоустойчивость алгоритма САР при  $\alpha = 1$

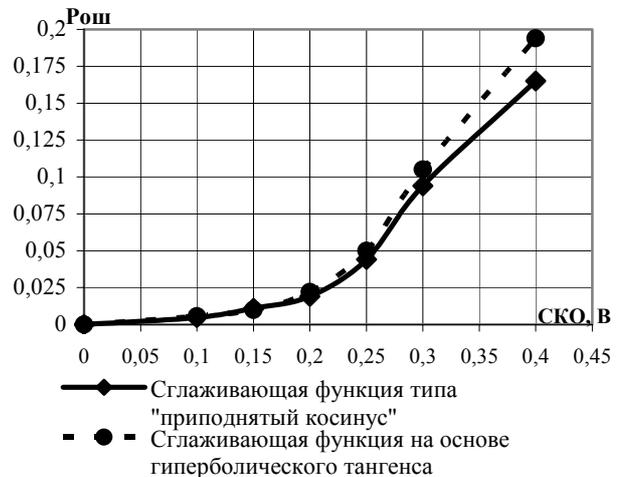


Рис. 4. Сравнительная помехоустойчивость алгоритма САР при  $\alpha = 0,011$

Как следует из графиков, приведенных на рис. 3, 4 функция, синтезированная на основе гиперболического тангенса, уступает по обеспечиваемой вероятности ошибки функции типа «приподнятый косинус» при коэффициенте  $\alpha \approx 0$  (вероятность ошибки в среднем выше в 1,15 раза) и выигрывает в среднем в 1,8 раза по вероятности ошибки при  $\alpha = 1$ .

Главным достоинством синтезированной функции является более плавное, по сравнению с приподнятым косинусом, изменение значений вблизи нулей импульсной характеристики (см. рис. 6), что позволяет уменьшить вероятность ошибки при наличии небольшой фазовой рассинхронизации.

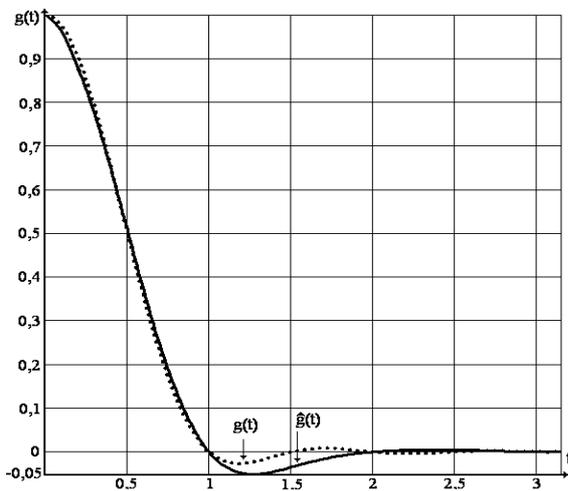


Рис. 5. Импульсные характеристики анализируемых функций при  $\alpha = 1$

Импульсные характеристики анализируемых функций приведены на рис. 5, из которого можно увидеть, что энергии основного лепестка импульсных характеристик близки. В то же время, поведение функций в окрестности второго и дальнейших нулей – различно.

Численная оценка уровня сигнала в окрестности третьего нуля при рассинхронизации до 0,01 секунды показывает, что функция на основе гиперболического тангенса обеспечивает уровень помехи меньше в 1,5 раза по сравнению с функцией типа «приподнятый косинус». Численные расчеты иллюстрирует отношение (7) и рис. 6:

$$\frac{g(2.99)}{\hat{g}(2.99)} = \frac{0,9 \cdot 10^{-4}}{6 \cdot 10^{-5}} = 1,5. \quad (7)$$

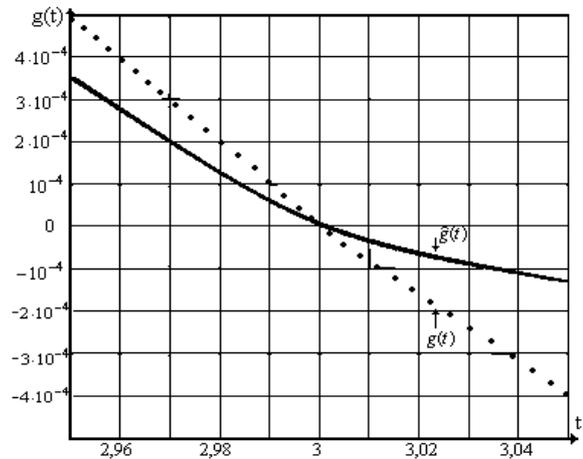


Рис. 6. Поведение функции типа «приподнятого косинуса»  $g(t)$  и «гиперболического тангенса»  $\hat{g}(t)$  в окрестности третьего нуля

## Заключение

Результаты работы подтверждают возможность использования класса трансцендентных функций для синтеза фильтров цифровых систем передачи.

**Научную новизну** проведенных исследований составляет функция, синтезированная на основе гиперболического тангенса и обладающая лучшей помехоустойчивостью при небольшой фазовой рассинхронизации, чем традиционно используемый «приподнятый косинус».

## Литература

1. Прокис Дж. Цифровая связь. – М.: Радио и связь, 2000. – 798 с.
2. Скляр Б. Цифровая связь. – М.: ТД «Вильямс», 2003. – 1102 с.
3. Астраханцев А.А., Омельченко А.В., Пресняков И.Н. Синтез фильтров для цифровых систем передачи с ограниченной полосой // Радиоэлектроника и информатика. – 2005. – № 1. – С. 34 – 38.

Поступила в редакцию 12.09.2005

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. И.В. Барышев, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков.