УДК 519.81

Г.И. СТОПЧЕНКО, А.В. АЙДАРОВ, А.В. ПЕТРИЧЕНКО

Харьковский Национальный университет радиоэлектроники, Украина

ПОСТРОЕНИЕ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ С ЖЕЛАЕМЫМИ СВОЙСТВАМИ

В работе рассматривается технология построения многокритериальных моделей, которая основывается на более естественном способе выражения предпочтений лиц, принимающих решения (ЛПР), – выявлении уровней притязаний. Применение данного подхода перестраивает модель задачи следующим образом: к исходным условиям задачи добавляются ограничения, отражающие уровни притязаний; с целевыми ограничениями в модель вводятся новые переменные, имеющие смысл отклонений от желаемых значений критериев; критерий в модели строится как функция новых переменных.

многокритериальные модели, целевые ограничения, уровень притязаний.

Введение

Построение моделей принятия решений требует понимания сущности и условий (функциональных) задач, методологии и технологии разработки моделей, знаний и опыта разработчиков математических средств и ЛПР. Повышение эффективности принимаемых решений требует комплексного использования современных математических моделей и методов, систем поддержки принятия решений (СППР) и структуры предпочтений ЛПР в процессе формирования и выбора решений [1].

Предлагаемая технология построения многокритериальных моделей состоит из следующих этапов:

1. Строится объективная составляющая модели задачи, включающая переменные x; набор ограничений в виде физических и логических соотношений между переменными $g(x) \le b$, определяющих область возможных (допустимых) решений (ОВР); переменные, определяющие потенциальные критерии.

2. ЛПР выявляет целевые установки и предпочтения для модели (набор активных критериев, уровень притязаний, желаемые значения критериев, соотношения между критериями и т.д.). Это приводит к образованию дополнительных переменных и ограничений, добавляемых к ОВР и объединяющих основные параметры задачи в единую модель для генерации эффективных решений.

3. Выбор наилучшего решения, согласованного с системой предпочтений ЛПР, осуществляемого с помощью различных скаляризующих функций. Независимо от использования различных концептуальных моделей и процедур поиска решения, существенную роль играет динамическая идентификация предпочтений ЛПР.

ОВР включает следующие элементы: переменные решения; переменные, определяющие дополнительные решения; промежуточные и дополнительные эндогенные переменные для формирования ограничений; логические соотношения между всеми переменными модели. Рассмотрим ОВР как набор переменных решений x и ограничений, определяющих множество допустимых решений X, т.е.

$$x \in X_0 . \qquad (1)$$

Считаем, что корректно определенная ОВР всегда имеет допустимое решение, т.е. $X_0 \ne \varnothing$. Соотношение (1) эквивалентно одной из стандартных формулировок задач линейного программирования (ЛП) без спецификации целевой функции. Множество возможных решений для задач ЛП формируется как

$$\underline{b} \le Ax \le \overline{b}; \quad \underline{x} \le x \le \overline{x},$$

где $x \in R^n$ – вектор переменных решений с нижними и верхними пределами $\underline{b} \in R^m$ и $\overline{b} \in R^m$; $A \in R^{m \times n}$ – матрица коэффициентов ограничений.

Возможно уменьшение размерности задачи в процессе предварительного анализа модели ЛП за счет обнаружения и устранения избыточных ограничений и переменных.

Постановка задачи. Рассмотрим многокритериальную задачу принятия решений:

$$\min F(x) \quad \text{при} \quad x \in X_0, \tag{2}$$

где $F = (f_1, f_2, ..., f_k)$ – вектор целевых функций.

Вектор достижения

$$q = F(x) \tag{3}$$

измеряет степень достижения решением x значений целевых функций. Обозначим через Y допустимое множество векторов достижений (т.е. все векторы, соответствующие допустимым решениям):

$$Y = \{q = F(x), x \in X_0\}.$$

При сравнении двух векторов достижения лучшим является тот, у которого значение одного локального критерия лучше, а значения остальных не хуже, чем у любого другого вектора. Такое взаимоотношение называется доминированием векторов. Решение $x^* \in X_0$ называется слабооптимальным, если не существует другого возможного решения, которое имело бы лучшие значения по всем критериям. Парето-оптимальным (эффективным) решением $x^* \in X_0$ называется такое, для которого улучшение значений любого локального критерия влечет за собой ухудшение значения хотя бы одного другого критерия.

В задачах многокритериальной оптимизации для устранения неопределенности, обусловленной наличием нескольких критериев, используются предпочтения ЛПР, основывающиеся на его знаниях, интуиции и опыте. Эта субъективная информация является основой объединения параметров задачи в единую модель, позволяющей генерировать и оценивать эффективность решений.

Основные подходы к решению

Рассмотрим основные подходы, основывающиеся на скаляризованной функции полезности [2]. Теоретически возможно использование многокритериальной скалярной функции полезности [3], однако, имеются значительные трудности в идентификации значений функции, адекватно отражающие предпочтения ЛПР. Самый известный и простой подход использует функцию скаляризации в виде

$$F(f, \alpha) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i(x),$$

где λ – весовые коэффициенты критериев.

В основе рассматриваемого подхода к решению задач многокритериальной оптимизации лежит предположение об аддитивности функции полезности (обычно неизвестной). Использование этого метода связано с рядом существенных недостатков:

1) полученное решение, оптимальное в смысле единого суммарного критерия, может характеризоваться низкими значениями по ряду локальных критериев;

2) полученное решение часто неустойчиво по отношению к вектору коэффициентов λ, т.е. небольшим приращениям весовым коэффициентам могут соответствовать значительные приращения локальных критериев;

3) сложность в задании весов критериев, так как часто известно лишь сопоставимая важность критериев или полное отсутствие информации о важности критериев.

Ограничения рассмотренного подхода привели к появлению методов, основанных на более естественном способе выражения предпочтений ЛПР – выявлении уровней притязаний (стремлений). Реализацией этого подхода является целевое программирование, принципиальное отличие которого от методов, основанных на оптимизации функций полезности – в изменении концепции цели. Вместо оптимизации критериев ставится задача оптимального приближения к желаемым значениям критериев. В общем виде скаляризующая функция выглядит следующим образом:

$$F(f, a) = |F(x) - a|. \tag{4}$$

Использование целевого программирования (ЦП) изменяет модель задачи (2) [3]:

– с целевыми ограничениями в модель вводятся новые переменные, имеющие смысл отклонений от желаемых значений критериев;

– критерий в модели ЦП строится как функция новых переменных;

– к исходным условиям задачи добавляются целевые ограничения, отражающие уровни притязаний.

Дополнительные целевые ограничения представляются следующим образом:

$$F_i(x) + d_i^+ - d_i^- = a_i, \; i = 1,2, ..., k;$$
$$d_i^- \geq 0, d_i^+ \geq 0, d_i^+ d_i^- = 0,$$

где a_i – уровень стремления для i-го критерия; d_i^- и d_i^+ – переменные отклонения, отражающие недостижение и превышение i-го уровня стремления текущем решением.

В качестве критериев используются различные выражения для многомерных отклонений, называемых функциями достижения. Наибольшее распространение получили линейная свертка

$$g(d^-, d^+) = \sum_{i=1}^{k} (w_i^- d_i^- + w_i^+ d_i^+) \tag{5}$$

и минимаксная свертка (взвешенная норма Чебышева):

$$g(d^-, d^+) = \max_{1 \leq i \leq k} (w_i^- d_i^-, w_i^+ d_i^+) . \tag{6}$$

При наличии некоторой иерархии целей формируется лексикографическая модель ЦП, использующая вектор нескольких функций достижения:

$$g(d^-, \; d^+) = \\ = \left[g_1(d^-, \; d^+), \; g_2(d^-, \; d^+), \; ..., \; g_m(d^-, \; d^+) \right] , \tag{7}$$

где $g_i(d^-, d^+)$ – функции достижения типа (5) и (6), минимизированные согласно лексикографического порядка (j = 1, 2, …, m).

Использование модели ЦП не гарантирует получения эффективных (Паретто-оптимальных) решений в случае достижения уровней стремления ЛПР.

Расширение возможностей стандартных подходов

Расширение возможностей ЦП осуществляется на основе квазиудовлетворяющего подхода заданием уровня стремления. ЛПР определяет требования к желаемому решению в виде уровней стремления, служащих основой формирования специальной скаляризующей функции достижения, минимизация которой выделяет Парето-оптимальное решение задачи (2).

При формировании функции достижения допускается следующее.

Предположение 1. ЛПР предпочитает результаты, которые удовлетворяют всем уровням стремлений любому результату, который не удовлетворяет хотя бы одному уровню стремления.

Целесообразно использовать функцию в следующем виде:

$$S(F(x), \; a, \; \lambda) = \max_{1 \leq i \leq k} \Big\{ \lambda_i (F_i(x) - a) + \\ + \varepsilon \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (F_i(x) - a) \Big\}, \tag{8}$$

где a – вектор уровней стремления; λ – вектор масштабирования; ε – параметр регуляризации.

Эффективность решения определяется вектором стремления a как параметра контроля и вектором масштабирования λ, рассчитываемого на основе предшествующего анализа. Скаляр ε служит для гарантии эффективности решения. Функция (8) представляет собой сумму разностей взвешенной нормы Чебышева между локальными результатами и соответствующими контрольными уровнями стремления и параметром регуляризации (суммой этих разностей). Использование нормы Чебышева необходимо для получения оптимального решения.

Алгоритм метода уровней стремления включает следующие основные этапы:

1. Из потенциальных критериев выбирается k критериев, используемых для оценки возможных решений $F_i, i = 1,2, ..., k$.

2. ЛПР выбирает в интерактивном режиме уровни стремления a_i для каждого критерия.

3. Формируется модель параметрической задачи, генерирующей Парето-оптимальные решения. Если уровень стремления не достижим, то оптимальное решение является самым близким (в смысле Чебышевской взвешенной нормы) уровню стремления, если достижим, то полученное оптимальное решение лучше a_i .

4. На основе анализа критериальных значений текущего и оптимального решения ЛПР может изменить уровень стремления a_i. Итерационный процесс решения задачи представляет собой текущую динамическую аппроксимацию значения скаляризующей функции достижения в зависимости от уровней притязаний ЛПР.

5. Процедуры этапов 2, 3 и 4 повторяются до нахождения удовлетворительного решения.

Метод уровня стремлений может быть представлен в рамках методологии ЦП. Разность ($F_i(x) - a$) может быть выражена через отклонения от целей d_i^- и d_i^+:

$$F_i(x) + d_i^- - d_i^+ = a_i \quad (i = 1, 2, \ ..., \ k);$$
$$d_i^- \geq 0, \ d_i^+ \geq 0 \ \ и \ \ d_i^- d_i^+ = 0.$$

Представим эквивалентное выражение целевой функции в терминах модели ЦП:

$$g_1(d^-, d^+) = \max_{1 \leq i \leq k}(-w_i^- d_i^- + w_i^+ d_i^+), \qquad (9)$$

где w_i^- и w_i^+ – веса, заменяющие масштабирующие коэффициенты.

Получение эффективного решения достигается наличием отрицательного весового коэффициента w_i^-, связанного с отклонением d_i^-. Это не согласуется с методологией ЦП, где всегда присутствуют неотрицательные веса. Функция (9) рассматривается как специфическая целевая функция в случае не отрицательности весов.

Использование лексикографического подхода к оптимизации позволяет избежать проблемы выбора параметра ε, а условие регуляризации выполняется введением дополнительного приоритетного уровня

$$g_2(n, p) = \sum_{i=1}^{k}(v_i n_i + w_i p_i).$$

Тогда лексикографическая модель выглядит следующим образом:

$$Lex \ \min \ g(d^-, \ d^+) = [g_1(d^-, d^+), g_2(d^-, d^+)];$$
$$F_i(x) + d_i^- - d_i^+ = a_i, \ i = 1, 2, \ ..., \ k;$$
$$d_i^- \geq 0, \ d_i^+ \geq 0, \ d_i^- d_i^+ = 0;$$
$$x \in Q.$$

Расширением метода уровня стремления является подход поддержки принятия решений, допускающий выражение предпочтений ЛПР двумя уровнями – стремления и резервирования. Выбор решения основывается на следующих предположениях:

Предположение 1. Решение, у которого оценки по всем локальным критериям удовлетворяют соответствующим уровням резервирования, предпочтительнее любого решения, у которого хотя бы одна оценка по локальному критерию хуже его уровня резервирования.

Предположение 2. При условии достижения всех уровней резервирования, решение, у которого оценки по всем локальным критериям удовлетворяют соответствующим уровням стремления предпочтительнее любого другого решения, у которого хотя бы одна оценка по локальному критерию хуже его уровня стремления.

Функция достижения *S*, генерирующая Парето-оптимальные решения, имеет следующий вид:

$$S(q_i, a, r) = \max u_i(q_i, a_i, r_i) + \varepsilon \sum_{i=1}^{k}(q_i, a_i, r_i), \qquad (10)$$

где a_i и r_i – уровни стремления и резервирования; ε – параметр регуляризации; u_i – функция, измеряющая отклонение результатов ожиданий ЛПР относительно i-го критерия в зависимости от уровня стремления a_i и уровня резервирования r_i.

Функция u_i – строго монотонная со значением $u_i = 0$ при $q_i = a_i$ и $u_i = 1$ при $q_i = r_i$. Она может интерпретироваться как мера неудовлетворенности ЛПР текущим значением целевой функции и может быть представлена в кусочно-линейном виде:

$$u_i(q_i, a_i, r_i) = \begin{cases} -\beta(q_i - a_i)/(q_i^u - a_i), \text{если } q \leq a_i; \\ (q_i - a_i)/(r_i - a_i), \text{если } a_i < q_i < r_i; \\ \nu(q_i - r_i)/(q_i^N - r_i) + 1, \text{если } q_i \geq r_i, \end{cases} \qquad (11)$$

где q_i^u – наилучшее (идеальная точка) значение по i-му критерию; q_i^N – наихудшее (точка Nadir) значение по i-му критерию; ν – параметр, отражающий неудовлетворенность ЛПР, связанную с недостижением уровня резервирования.

Реализация подхода на основе уровней стремления/резервирования

Рассматриваемый подход может быть реализован на основе методологии ЦП. В отличии от рассмотренного ранее метода уровня стремления в модуль вводится второй параметр контроля – уровень резервирования для каждой целевой функции.

Полная модель, кроме функции (10), включает следующие ограничения:

$$\begin{aligned} &F_i(x)+d_i^- - d_i^a - d_i^r = a_i; \\ &d_i^- \ge 0,\ 0 \le d_i^a \le r_i - a_i,\ d_i^r \ge 0; \\ &d_i^- d_i^a = 0,\ (r_i - a_i - d_i^a)d_i^r = 0,\ i=1,2,...,k; \end{aligned} \tag{12}$$

где a_i и r_i – уровни стремления и резервирования соответственно; a_i^a и a_i^r – переменные отклонения текущих значений от уровней стремления и резервирования соответственно.

Используя три типа отклонений, используемых в (12), запишем выражение (11) в следующем виде:

$$u_i(q_i,a_i,r_i)=\begin{cases} -\beta w_i^- d_i^-, \text{ если } q_i \le a_i; \\ w_i^a d_i^a, \text{ если } a_i < q_i < r_i; \\ \nu w_i^r d_i^r, \text{ если } q_i \ge r_i, \end{cases} \tag{13}$$

где w_i^-, w_i^a и w_i^r – положительные весовые коэффициенты, определяемые в зависимости от соответствующих уровней стремления и резервирования; β и ν – положительные параметры.

Таким образом, подход на основе уровней стремления/резервирования, согласно ЦП, использует взвешенные отклонения, но веса рассчитываются автоматически. При условии, что $w_i^a = 1/(r_i - a_i)$, функция (13) может быть представлена взвешенной суммой отклонения:

$$u_i(d_i^-, d_i^a, d_i^r) = -\beta w_i^- d_i^- + w_i^a d_i^a + \nu w_i^r d_i^r .$$

Наличие отрицательного весового коэффициента $-\beta w_i^-$, связанного с отклонением d_i^-, не удовлетворяет требованиям ЦП, но способствует генерации Парето-оптимальных решений.

Использование лексикографической оптимизации позволяет исключить параметр ε, а условие регуляризации представить дополнительным приоритетным уровнем

$$g_2(d_i^-, d_i^a, d_i^r) = \sum_{i=1}^{k}(-\beta w_i^- d_i^- + w_i^a d_i^a + \nu w_i^r d_i^r).$$

Тогда лексикографическая модель, генерирующая эффективные решения при условиях (12) выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} &Lex\min\ \ g(d^-, d^a, d^r) = \\ &=[g_1(d^-, d^a, d^r), g_2(d^-, d^a, d^r)]. \end{aligned}$$

Заключение

При использовании целевого программирования происходит генерация решений, которые не оптимизируют целевые функции, а имеют результаты наиболее близкие к уровням стремлений. Эти решения обычно не удовлетворяют принципу эффективности (Парето-оптимальности), что привело к развитию метода желаемой точки (МЖТ), в котором при использовании тех же самых параметров контроля всегда генерируется эффективное решение многокритериальной задачи. Наличие отрицательных весов позволяет скаляризованной функции достижения генерировать эффективные решения, даже если достижимы уровни стремлений.

Литература

1. Левыкин В.М., Стопченко Г.И., Айдаров А.В. Формирование моделей слабоструктурированных задач в системах поддержки принятия решений // АСУ и приборы автоматики. – 1998. – Вып. 108. – С. 155 – 159.

2. Makowski M. Methodology and a modular tool for multiple-criteria analysis of LP-models: Working papers WP-94-102 // International Institute for Applied System Analysis. – Laxenburg, Austria. – 1994. – 45 p.

3. Штойер Р. Многокритериальная оптимизация. Теория, вычисления и приложения – М.: Радио и связь, 1992. – 504 с.

Поступила в редакцию 23.03.05

Рецензент: д-р техн. наук, проф. О.Е. Федорович, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского "ХАИ", Харьков.