УДК 658:62.001.57

К.О. ЗАПАДНЯ

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского "ХАИ", Украина

ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И СИНТЕЗ СТРУКТУР РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ КОМПЛЕКСОВ

Предложена методика анализа и синтеза структур распределенных технологических комплексов (РТК). Для порождения вариантов состава и структуры РТК используются основные результаты теории перечисления Пойа и Де Брейна. Для выделения эквивалентных вариантов и формирования представителей классов состава и структур РТК вводится лексикографическое упорядочивание. Результаты работы можно использовать для автоматизированного синтеза топологических структур РТК

распределенный технологический комплекс, порождение вариантов структур, перечисление вариантов состава, лексикографическое упорядочивание.

Введение

В распределенных технологических комплексах (РТК) производства наукоемкой продукции (изделия для аэрокосмоса, автомобилестроения) анализ топологических свойств системы позволяет обосновать структуру РТК и состав технологических узлов (ТУ), а также характеристики обслуживающей транспортной системы (ТС). Поэтому актуальным является создание моделей и методов, ориентированных на топологический синтез рациональных структур РТК для последующих задач автоматизированного управления с помощью методов транспортной логистики. Существующие подходы основаны, в основном, на эвристических процедурах [1] и не используют современные комбинаторные методы теории перечисления [2].

1. Постановка задачи

В работе предложены методы порождения вариантов состава и структур РТК, основанные на основных теоремах теории перечисления Пойа и де Брейна [3]. Исходными данными для анализа и синтеза структур РТК является состав технологических модулей, входящих в ТУ, и топология транспортной системы, представленная в виде графа, где узлами являются ТУ, а ребрами – транспортные связи между ними.

2. Метод решения

В [4] рассматривались вопросы подсчета числа вариантов состава и структуры РТК. Для этого вводились отношения эквивалентности на множестве исходных технологических модулей. Введение отношения эквивалентности позволило перечислить классы эквивалентности, внутри которых варианты состава и структуры РТК не различимы с точки зрения данного отношения эквивалентности, т.е. любой вариант из некоторого класса эквивалентности определяет данный класс и может служить его представителем. Подмножество вариантов $T' \in T$, содержащее по одному и только по одному варианту из каждого класса эквивалентности, является системой представителей для заданных отношений эквивалентности. Следует отметить, что полученные системы представителей являются в настоящее время недостаточно решенной проблемой, зависят от специфики предметной области и поэтому используются, в основном, эвристические методы [1].

В работе рассматриваются вопросы, связанные с получением возможных вариантов состава и структуры РТК.

Рассмотрим состав РТК. Путем объединения технологических модулей (ТМ) можно получить отдельные ТУ, входящие в состав РТК.

Пусть имеется n одинаковых ТМ. Введем целочисленные переменные x_j, представляющие количество ТУ с объединением j однотипных модулей. Тогда используя равенство

$$\sum_{j=1}^{n} j x_j = n, \tag{1}$$

можно машинным перебором получить все варианты состава, количество которых подсчитано в [4]. Если число образуемых ТУ не более r, то добавляется ограничение

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \leq r. \tag{2}$$

При заданном числе ТУ

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = r. \tag{3}$$

Будем получать варианты состава РТК перебором значений переменных x_j, добиваясь выполнения условий (1), (2) либо (1), (3). Для сокращения числа перебираемых комбинаций выбираем значения для x_n из множества {0, 1}, x_{n-1} – из {0, 1, 2}, …, x_1 – из {0, 1, 2, …, n}. Кроме того, как только достигнем количества K [4] вариантов состава, перебор x_j заканчиваем.

Для разнотипного РТК имеем l типов модулей

$$\sum_{\mu=1}^{l} P_\mu = n, \tag{4}$$

где P_μ — число модулей μ-го типа.

Возьмем отдельный вариант РТК (реализацию), удовлетворяющий условиям (1), (2). Пусть в этом варианте x_j равны «1» либо «0». Тогда все ТУ будут иметь различное количество модулей в своем составе. Пронумеруем ТУ так, что

$$S_1 \leq S_2 \leq \ldots \leq S_r, \tag{5}$$

где S_i – число модулей в i-м ТУ, а $S_1, \ldots, S_r$ – вариант состава РТК.

Введем следующие ограничения:

$$\sum_{i=1}^{r} x_{\mu_i} \leq p_\mu, \quad \mu = \overline{1, l}; \tag{6}$$

$$\sum_{\mu=1}^{l} x_{\mu_i} = S_i, \quad i = \overline{1, r}, \tag{7}$$

выполнение которых означает получение варианта состава разнотипного РТК. Здесь x_{μ_i} – целочисленные переменные, показывающие количество модулей μ-го типа в i-м ТУ. Перебирая значения для переменных x_{μ_i}, которые выбираются из множества $\{0, 1, 2, \ldots, p_\mu\}$, построим варианты для данной реализации состава РТК, удовлетворяющей условиям (1), (2). Чтобы построить все варианты разнотипного РТК, необходимо просмотреть все реализации РТК и для каждой получить все комбинации x_{μ_i}, удовлетворяющие условиям (6), (7).

Рассмотрим реализацию состава РТК, у которой хотя бы одна $x_j > 1$. В этом случае необходимо составлять список представителей и проверять каждый вновь полученный вариант, является ли он представителем нового класса эквивалентности или для этого класса уже имеется представитель.

Введем отношение порядка на множество модулей в рассматриваемой реализации РТК. Для i-го ТУ построим кодовую группу, у которой на первом месте поставим число ТМ S_i, а затем расположим номера типов модулей в порядке возрастания. Назовем эту кодовую группу «слогом». Тогда «слово» (вариант состава РТК) представляет совокупность «слогов», которые расположены в порядке (5). Причем, если $S_{i-1} \leq S_i$, то такие слога расположены в алфавитном порядке (лексикографическое упорядочивание) с учетом номеров типов модулей в каждом слоге. Лексикографическое представление реализации состава РТК можно использовать для сравнения вариантов. Варианты, которые имеют одинаковые слова, принадлежат одному и тому же классу эквивалентности.

Будем получать варианты состава РТК с помощью производящих функций (энумераторов) [5].

Перечень классов эквивалентности [5]:

$$\sum_F W(F) = Z(H_R; \sum_{\mu=1}^{l} \varpi(\mu), \sum_{\mu=1}^{l} [\varpi(\mu)]^2, ...),$$

где $W(F)$ – «вес» класса эквивалентности F; $\varpi(\mu)$ – «вес» модуля μ-го типа; H_R – группа подстановок для отдельной реализации РТК;

$$H_R = S_{S_1} + S_{S_2} + ... + S_{S_r};$$
$$\sum_F W(F) = Z(S_{S_1} + S_{S_2} + ... + S_{S_r};$$
$$x[1;1], x[2;1], ..., x[1;2], x[2;2], ..., x[1;r], x[2,r], ...) =$$
$$Z(S_{S_1}; x[1;1], x[2;1], ...) \times$$
$$\times Z(S_{S_2}; x[1;2], x[2;2], ...) \times ... \times Z(S_{S_r}; x[1;r], x[2,r], ...).$$

Здесь, в общем случае, присутствует $S_{S_i} = S_{S_j}$, $i \neq j$, $i, j = \overline{1,r}$; S_a – симметрическая группа подстановок; $Z(H)$ – цикловой индекс группы подстановок H.

Пример. Имеется следующий состав модулей: $p_1 = 3$, $p_2 = 3$, т.е. 1-го типа имеется 3 модуля, 2-го типа – также 3 модуля. Реализация РТК представлена в виде: $S_1 = 1$, $S_2 = 2$, $S_3 = 2$, т.е. в 1-м ТУ – 1 модуль, во 2-м – 2, в 3-м – 2 модуля.

Обозначим $\varpi(1) = x; \varpi(2) = y;$

$$H_R = S_{S_1} + S_{S_2} + ... + S_{S_r};$$

$$Z(H_R) = x[1;1](x[1;2]^2 + x[2;2]) \times x[2;2](x[1;3]^2 + x[2;3]).$$

Перечень классов эквивалентности

$$\sum_F W(F) = (x_1 + y_1)[(x_2 + y_2)^2 + (x_2^2 + y_2^2)] \times [(x_3 + y_3)^2 +$$
$$+(x_3^2 + y_3^2)] = x_1 x_2^2 x_3^2 + x_1 y_2^2 x_3^2 + x_1 x_2 y_2 x_3^2 + x_1 y_2^2 x_3 y_3 +$$
$$+x_1 x_2 y_2 x_3 y_3 + y_1 x_2^2 x_3^2 + y_1 y_2^2 x_3^2 + y_1 x_2 y_2 x_3^2 + x_1 y_2^2 y_3^2 +$$
$$x_1 x_2 y_2 y_3^2 + x_1 x_2 x_3 y_3 + x_1 y_2^2 x_3 y_3 + y_1 x_2^2 y_3^2 + y_1 y_2^2 y_3^2 +$$
$$+y_1 x_2 y_3^2 + y_1 x_2^2 x_3 y_3 + y_1 y_2^2 x_3 y_3 + y_1 x_2 y_2 x_3 y_3,$$

где x_i - вес ϖ, отнесенный к i-му ТУ.

Отбросим члены, не удовлетворяющие исходным условиям: $p_1 = 3$; $p_2 = 3$..

Получим

$$\sum_{F'} W(F') = x_1 y_2^2 x_3^2 + x_1 x_2^2 y_3^2 + x_1 x_2 y_2 y_3^2 +$$
$$+x_1 y_2^2 x_3 y_3 + x_1 x_2 y_2 x_3 y_3 + y_1 y_2^2 x_3^2 + y_1 x_2 y_2 x_3^2 +$$
$$+y_1 x_2^2 y_3^2 + y_1 x_2^2 x_3 y_3 + y_1 x_2 y_2 x_3 y_3.$$

Лексикографически упорядочим варианты и запишем все слова (варианты состава РТК).

1.	11;	211;	222.	6.	12;	211;	222.
2.	11;	211;	222.	7.	12;	211;	212.
3.	11;	212;	222.	8.	12;	211;	222.
4.	11;	212;	222.	9.	12;	211;	212.
5.	11;	212;	212.	10.	12;	212;	212.

Учитывая эквивалентность вариантов 1, 2; 3, 4; 6, 8; 7, 9 получим список представителей (вариантов состава РТК).

1.	11;	211;	222.	4.	12;	211;	212.
2.	11;	212;	212.	5.	12;	211;	222.
3.	11;	212;	222.	6.	12;	212;	212.

В случае, если $S_i \neq S_j$, для всех $i, j = \overline{1,r}, i \neq j$, то идентифицировать варианты состава РТК не надо, так как каждый вариант, получаемый или способом перебора, или с помощью производящей функции является представителем нового класса.

Представим структуру РТК в виде топологического графа. Граф можно однозначно представить в виде матрицы смежности. Строки и столбцы этой матрицы соответствуют вершинам графа, а ее элементы для простого графа (без циклов и кратных ребер) равны «0» или «1». Пусть для примера граф структуры РТК имеет матрицу смежности, представленную на рис. 1.

$$\begin{array}{c} \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & X_5 & X_6 & X_7 \end{array} \\
\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Рис. 1. Матрица смежности

где X_i – переменная, означающая номер типа исходного множества ТМ для i-й вершины структуры комплекса (технологического узла).

Представим матрицу смежности в виде линейной формы. Для этого из матрицы выпишем каждую вершину графа и смежные ей вершины:

$$X_1, X_2, X_3;\ X_2, X_1, X_4, X_5;\ X_3, X_1, X_6, X_7;$$
$$X_4, X_2;\ X_5, X_2;\ X_6, X_3;\ X_7, X_3.$$

Затем в начале каждой i-й группы поставим число, указывающее на количество символов в этой группе, и лексикографически упорядочим группы в порядке возрастания этих чисел:

$$2X_4, X_2;\ 2X_5, X_2;\ 2X_6, X_3;$$
$$2X_7, X_3;\ 3X_1, X_2, X_3;$$
$$4X_2, X_1, X_4, X_5;\ 4X_3, X_1, X_6, X_7.$$

Будем использовать полученные линейные формы для распознавания изоморфизмов помеченных графов, где в качестве меток используем номера типов исходного множества ТМ. Например, имеется три распределения ТМ по вершинам графа структуры (рис. 2).

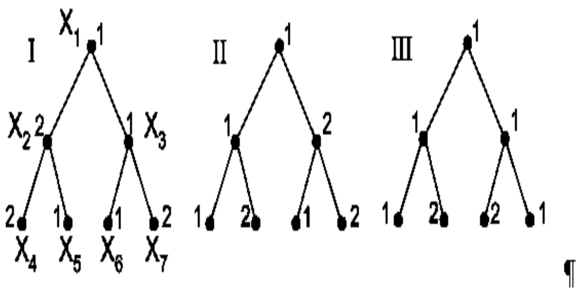

Рис. 2. Помеченные графы структуры

Запишем линейные формы этих графов.

1. 222; 212; 211; 221; 3121; 42121; 41112.
2. 211; 221; 212; 222; 3112; 41112; 42112.
3. 211; 221; 221; 211; 3111; 41112; 41121.

Лексикографически упорядочим кодовые группы, не трогая двух первых позиций в каждой i-й группе (эти позиции относятся к числу единиц в i-й строке матрицы смежности плюс символ i-й вершины).

1. 211; 212; 221; 222; 3112; 41112; 42112.
2. 211; 212; 221; 222; 3112; 41112; 42112.
3. 211; 211; 221; 221; 3111; 41112; 41112.

Слова 1 и 2 равны, т.е. структуры 1 и 2 находятся в одном классе эквивалентности.

Построим методику порождения вариантов структур РТК. Для этого найдем комбинаторно-групповые свойства графа структуры. Рассмотрим случай, когда группа графа состоит из суммы симметрических групп

$$\Gamma(G) = E_3 + S_2 = S_1 + S_1 + S_1 + S_2 .$$

Введем целочисленные переменные X_{μ_i}, показывающие число ТМ μ-го типа, вошедшие в i-ое подмножества вершин, на котором действует симметрическая группа S_{S_i}, где S_i - степень симметрической группы, т.е. количество ТМ, которые вошли в i-е подмножество вершин. Тогда выполнение ограничений (6), (7) означает получение варианта структуры РТК, причем для последовательного перебора каждый вариант является представителем нового класса эквивалентности.

В случае, например, диэдральных групп или композиций [5] составим упрощенную модель комбинаторно-групповых свойств структуры, содержащую только сумму симметрических групп, с помощью которой получаем количество вариантов большее, чем число классов эквивалентности в исходной модели, например, на рис. 3.

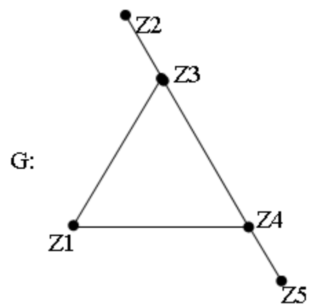

Рис. 3. Исходный граф структуры

Тогда

$$\Gamma(G) = S_1 + S_2[S_1 + S_1],$$

а упрощенная модель

$$\Gamma'(G) = S_1 + S_1 + S_1 + S_1 + S_1.$$

Генерируем варианты РТК с помощью перебора с учетом (6), (7) или с помощью производящей функции. При этом используем процедуру лексикографического упорядочивания для отсева вариантов из одного класса эквивалентности.

Пример. Имеется следующий состав ТМ: $p_1 = 4$; $p_2 = 2$. Структура РТК представлена в виде графа (рис. 3);

$$Z\left(\Gamma'\left(G\right)\right) = X[1;1]X[1;2]X[1;3]X[1;4]X[1;5].$$

Воспользуемся производящей функцией [5]. Обозначим $\omega\left(1\right) = X, \quad \omega(2) = Y$.

Перечень классов эквивалентности

$$\begin{aligned} W(F) = {} & (X_1+Y_1)(X_2+Y_2)(X_3+Y_3)(X_4+Y_4)(X_5+Y_5) = \\ & = X_1X_2X_3X_4X_5 + X_1X_2X_3X_4Y_5 + X_1X_2X_3Y_4X_5 + \\ & + X_1X_2Y_3X_4X_5 + X_1X_2Y_3X_4Y_5 + X_1X_2Y_3Y_4X_5 + \\ & + X_1X_2Y_3Y_4Y_5 + X_1Y_2X_3X_4X_5 + X_1Y_2X_3X_4Y_5 + \\ & + X_1Y_2X_3Y_4X_5 + X_1Y_2X_3Y_4Y_5 + X_1Y_2Y_3X_4X_5 + \\ & + X_1Y_2Y_3X_4Y_5 + X_1Y_2Y_3Y_4X_5 + X_1Y_2Y_3Y_4Y_5 + \\ & + Y_1X_2X_3X_4X_5 + Y_1X_2X_3X_4Y_5 + Y_1X_2X_3Y_4X_5 + \\ & + Y_1X_2X_3Y_4Y_5 + Y_1X_2Y_3X_4X_5 + Y_1X_2Y_3X_4Y_5 + \\ & + Y_1X_2Y_3Y_4X_5 + Y_1X_2Y_3Y_4Y_5 + Y_1Y_2X_3X_4X_5 + \\ & + Y_1Y_2X_3X_4Y_5 + Y_1Y_2X_3Y_4X_5 + Y_1Y_2X_3Y_4Y_5 + \\ & + Y_1Y_2Y_3X_4X_5 + Y_1Y_2Y_3X_4Y_5 + Y_1Y_2Y_3Y_4Y_5 + \\ & + Y_1Y_2Y_3Y_4Y_5 + X_1X_2X_3Y_4Y_5. \end{aligned}$$

Отбросим члены, не удовлетворяющие исходным условиям ($p_1 = 4$; $p_2 = 2$).

$$\begin{aligned} \sum_{F'} W\left(F'\right) = {} & X_1X_2X_3X_4Y_5 + X_1X_2X_3Y_4X_5 + \\ & + X_1X_2X_3Y_4Y_5 + X_1X_2Y_3X_4X_5 + \\ & + X_1X_2Y_3Y_4X_5 + X_1Y_2X_3X_4X_5 + \\ & X_1Y_2X_3X_4Y_5 + X_1Y_2X_3Y_4X_5 + \\ & + X_1Y_2Y_3X_4X_5 + Y_1X_2X_3X_4X_5 + \\ & + Y_1X_2X_3X_4Y_5 + Y_1X_2X_3Y_4X_5 + \\ & + Y_1X_2Y_3X_4X_5 + Y_1Y_2X_3X_4X_5. \end{aligned}$$

Построим матрицу смежности графа (рис. 4).

$$\begin{array}{c|ccccc} & Z_1 & Z_2 & Z_3 & Z_4 & Z_5 \\ \hline Z_1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ Z_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ Z_3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ Z_4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ Z_5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Рис. 4. Матрица смежности

Из нее получим:

$$Z_1, Z_3, Z_4; \quad Z_2, Z_3;$$

$$Z_3, Z_1, Z_2, Z_4; \quad Z_4, Z_1, Z_3, Z_5; \quad Z_5, Z_4 .$$

Лексикографически упорядочим

$$2Z_2, Z_3; \qquad 2Z_5, Z_4; \quad 3Z_1, Z_3, Z_4;$$

$$2Z_2, Z_3; \qquad 4Z_3, Z_1, Z_2, Z_4; \quad 4Z_4, Z_1, Z_3, Z_5 .$$

Используя $\sum_{F'} W(F')$ и полученное лексикографическое упорядочивание, запишем слова.

1. 211; 221; 3111; 41111; 41112.
2. 211; 212; 3112; 41112; 42111.
3. 211; 222; 3112; 41112; 42112.
4. 211; 212; 3112; 41112; 42111.
5. 212; 212; 3122; 42112; 42112.
6. 211; 221; 3111; 41111; 41112.
7. 221; 221; 3111; 41112; 41112.
8. 212; 221; 3112; 41122; 42111.
9. 211; 222; 3112; 41112; 42112.
10. 211; 211; 3211; 41112; 41112.
11. 211; 221; 3211; 41112; 41122.
12. 211; 212; 3212; 41122; 42112.
13. 211; 212; 3212; 41122; 42112.
14. 211; 221; 3211; 41112; 41122.

Учитывая эквивалентность вариантов 1, 6; 2, 4; 3, 9; 11, 14; 12, 13 получим список представителей (окончательных вариантов структур РТК) и построим их (рис. 5).

1. 211; 221; 3111; 41111; 41112.
2. 211; 212; 3112; 41112; 42111.
3. 211; 222; 3112; 41112; 42112.
4. 212; 212; 3122; 42112; 42112.
5. 221; 221; 3111; 41112; 41112.
6. 212; 221; 3112; 41122; 42111.
7. 211; 211; 3211; 41112; 41112.
8. 211; 221; 3211; 41122; 41122.
9. 211; 212; 3212; 41122; 42112.

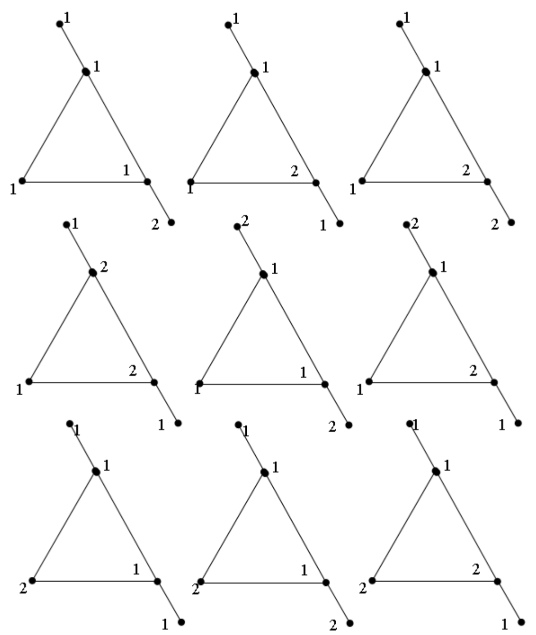

Рис. 5. Окончательный перечень вариантов структур

Выводы

Проведенные исследования направлены на начальные этапы создания распределенных технологических комплексов. Учитывается удаленность основного технологического оборудования от баз, где хранятся материалы, инструмент, комплектующие, необходимо создать транспортные магистрали для своевременного обеспечения основных технологических процессов изготовления наукоемкой продукции.

В работе показано, что состав технологических узлов и топология транспортных связей влияет на возможное количество вариантов структур РТК. Предложенные методы перечисления вариантов состава и порождения структур РТК учитывают исходное множество модулей состава и множество возможных топологических структур связей (последовательная, кольцевая, звездообразная и т.д.). С помощью лексикографического упорядочивания и условий эквивалентности удалось сократить количество возможных вариантов структур РТК до числа классов эквивалентности в виде представителей. В дальнейшем, с помощью имитационного моделирования, можно оценить эффективность каждого из построенного вариантов РТК. Предложенный подход целесообразно использовать при проектировании машиностроительных комплексов (сборочное производство и филиалы – поставщики комплектующих), а также нефте- и газодобывающих комплексов.

Литература

1. Половинкин А.И. Автоматический синтез оптимальных структур технических систем // Техническая кибернетика. – 1983. – № 5. – С. 201 – 211.
2. Беккенбах Э. Прикладная комбинаторная математика. – М.: Мир, 1978. – 360 с.
3. Пойа Д. Комбинаторные вычисления для групп, графов и химических соединений: Пер. с англ. // Перечислительные задачи комбинаторного анализа. Сборник переводов. Под ред. Г.П. Гаврилова – М.: Мир, 1979. – С. 36 – 139.
4. Малеева О.В., Западня К.О. Анализ транспортного обслуживания в распределенных технологических комплексах // Радіоелектронні і комп'ютерні системи. – 2004. – Вип.3 – С. 56 – 59.
5. Де Брейн Н. Теория перечисления Пойа // Прикладная комбинаторная математика – М.: Мир, 1979. – С. 61 – 107.

Поступила в редакцию 10.12.2004

Рецензент: д-р техн. наук, проф. А.Ю. Соколов, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков.