УДК 623.021:005

В.Б. КОНОНОВ

Харьковский военный университет, Украина

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ РАЗНОРОДНЫХ СИЛ И СРЕДСТВ СТОРОН ПО КРИТЕРИЮ МИНИМУМА СРЕДНЕВЗВЕШЕННОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ СУММАРНОГО КОЛИЧЕСТВА ОСНОВНЫХ СИЛ ПРОТИВОБОРСТВУЮЩЕЙ СТОРОНЫ ПРИ ПОСТОЯННЫХ ПАРАМЕТРАХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Рассмотрена задача оптимального управления распределением разнородных сил и средств оперирующих сторон по критерию минимума средневзвешенного математического ожидания суммарного количества основных сил противоборствующей стороны в конце конфликтной ситуации в условиях определённости при постоянных параметрах распределения сил и средств стороны A.

оптимальное управление, распределение разнородных сил и средств, конфликтная ситуация, критерий минимума средневзвешенного математического ожидания

Постановка задачи

При решении задач планирования в конфликтных ситуациях необходимо определить законы оптимального управления распределением разнородных сил и средств, имеющихся у оперирующей стороны, исходя при этом из поставленных целей, складывающейся ситуации и вероятных действий противника.

Планирование и последующее управление распределением разнородных сил и средств, а также управление распределением сил и средств резерва в условиях современной конфликтной ситуации представляет собой важную военно-научную задачу, актуальность которой определяется необходимостью создания в Вооружённых силах Украины автоматизированной системы управления войсками и оружием.

Задачи оптимального управления распределением неоднородных сил и средств оперирующих сторон рассматривались в работах [1 – 5]. Так, в [1] сформулирована задача исследования и определены критерии оптимального распределения сил и средств оперирующей стороны в динамических процессах конфликтных ситуаций. В [2] рассмотрен метод решения задачи распределения сил и средств в конфликтной ситуации. В [3] рассмотрена методика решения задач определения соотношения сил и средств сторон для случая разнородных средств. В [4] изложена методика решения задачи оптимального управления распределением разнородных сил и средств конфликтующей стороны по критерию минимума среднего суммарного количества основных сил противника. В [5] рассматривается решение задач оптимального управления распределением неоднородных сил и средств конфликтующей стороны по критериям максимума среднего суммарного количества основных сил в конце конфликтной ситуации, минимума среднего суммарного количества основных сил противника и максимума среднего суммарного количества основных сил за весь период конфликтной ситуации. Однако в этих работах не рассматривалось оптимальное управление распределением разнородных сил и средств сторон по критерию минимума средневзвешенного математического ожидания суммарного количества основных сил противоборствующей стороны в конце конфликтной ситуации в условиях определённости при постоянных параметрах распределения сил и средств стороны A.

Целью статьи является формулировка задачи оптимального управления распределением разнородных сил и средств сторон по критерию минимума средневзвешенного математического ожидания суммарного количества основных сил противоборствующей стороны в конце конфликтной ситуации в условиях определённости при постоянных параметрах распределения сил и средств стороны A.

Основной материал

Рассмотренные в [1 – 5] математические модели оптимального распределения разнородных сил и средств оперирующей стороны не учитывают относительной важности разнородных сил противника, так как в предлагаемых критериях:

- минимума среднего суммарного количества основных сил противника в конце конфликтной ситуации

$$\min_{\{\alpha\}} \sum_{j=1}^{n_1} y_j(T);$$

- максимума среднего суммарного количества основных сил оперирующей стороны в конце конфликтной ситуации

$$\max_{\{\alpha\}} \sum_{i=1}^{m_1} x_i(T);$$

- минимума среднего суммарного количества основных сил противника за весь период конфликтной ситуации

$$\min_{\{\alpha\}} \frac{1}{T}\int_0^T \sum_{j=1}^{n_1} y_j(t)\,dt;$$

- максимума среднего суммарного количества основных сил противника за весь период конфликтной ситуации

$$\max_{\{\alpha\}} \frac{1}{T}\int_0^T \sum_{i=1}^{m_1} x_i(t)\,dt,$$

основные силы противника и оперирующей стороны имеют одинаковые веса.

В предложенных критериях:

- $x_i(t)$, $y_j(t)$ – математические ожидания количества боевых средств сторон **A** и **B**, сохранившихся к моменту времени **t**;

- $x_i(T), y_j(T)$ – математические ожидания количества боевых средств сторон **A** и **B**, сохранившихся к моменту времени T;

- n_1, m_1 – количество типов основных средств сторон B и A соответственно;

- m, n – количество типов сил и средств сторон A и B соответственно;

- t – промежуточное время конфликтной ситуации;

- T – заданное время конфликтной ситуации;

- $\alpha = \|\alpha_{ji}\|_{n,m}$ – искомые управляющие параметры распределения сил и средств стороны A по силам и средствам стороны B.

Кроме того, управляющие параметры $\alpha = \|\alpha_{ji}\|_{n,m}$ предполагаются неизменными в ходе конфликтной ситуации, что исключает возможные манёвры сил и средств, а также их перенацелевание на другие типы сил и средств противника.

Существенным обобщением рассмотренных задач является задача оптимального распределения разнородных сил и средств стороны A, в которой сторона A стремится выбрать свои управляющие параметры $\alpha = \|\alpha_{ji}\|_{n,m}$ таким образом, чтобы к концу боя средневзвешенное количество основных сил стороны B было минимальным при известной стратегии распределения сил и средств стороны B.

Математическая модель данной задачи имеет вид:

$$\min_{\{\alpha\}} \sum_{j=1}^{n_1} w_j y_j(T), \tag{1}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = -\sum\limits_{j=1}^{n} \beta_{ij} b_{ij} y_j(t),\ i = \overline{1, m}; \\ \dfrac{dy_j}{dt} = -\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_{ji} a_{ji} x_i(t),\ j = \overline{1, n}; \end{cases} \quad (2)$$

$$x_i(0) = x_i^0,\ i = \overline{1, m};\ y_j(0) = y_j^0,\ j = \overline{1, n};$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m} \beta_{ij} = 1,\ j = \overline{1, n};\ \beta_{ij} \geq 0;\ i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n}; \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{ji} = 1,\ i = \overline{1, m};\ \alpha_{ji} \geq 0;\ j = \overline{1, n},\ i = \overline{1, m}, \end{cases} \quad (3)$$

где $w_j\left(j = \overline{1, n_1}\right)$ – коэффициент важности основного средства ***j***-го типа стороны B;

$\beta_{ij}\left(i = \overline{1, m},\quad j = \overline{1, n}\right)$ – заданные параметры распределения сил и средств стороны B;

$\alpha_{ji}\left(j = \overline{1, n},\quad i = \overline{1, m},\quad 0 \leq t \leq T\right)$ – искомые управляющие параметры распределения сил и средств стороны A по силам и средствам стороны B;

$x_i^0, y_j^0\left(i = \overline{1, m};\quad j = \overline{1, n}\right)$ – количество сил и средств ***i***-го типа стороны A и ***j***-го типа стороны B в начале конфликтной ситуации;

$\alpha_{ji}, \beta_{ij}\left(i = \overline{1, m};\quad j = \overline{1, n}\right)$ – эффективные скорострельности средств ***i***-го типа стороны A и ***j***-го типа стороны B соответственно.

Это задача оптимального управления с терминальным функционалом, закреплённым временем и свободным правым концом.

Функция Гамильтона – Понтрягина для задачи (1) – (3) имеет вид

$$H(x, y, \varphi, \eta, \alpha) = -\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} b_{ij} y_j(t) \varphi_i(t) - $$
$$-\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ji} a_{ji} x_i(t) \eta_j(t) =$$
$$= -\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \left[\beta_{ij} b_{ij} y_j(t) \varphi_i(t) + \alpha_{ji} a_{ji} x_i(t) \eta_j(t)\right]. \quad (4)$$

Соответствующую систему представим следующим образом:

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi_i(t)}{dt} = -\dfrac{\partial H(x, y, \varphi, \eta, \alpha)}{\partial x_i}, \quad i = \overline{1, m}; \\ \dfrac{d\eta_j(t)}{dt} = -\dfrac{\partial H(x, y, \varphi, \eta, \alpha)}{\partial y_j}, \quad j = \overline{1, n} \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi_i(t)}{dt} = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{ji} a_{ji} x_i(t) \eta_j(t), \quad i = \overline{1, m}; \\ \dfrac{d\eta_j(t)}{dt} = \sum\limits_{i=1}^{m} \beta_{ij} b_{ij} y_j(t) \varphi_i(t), \quad j = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (5)$$

Для решения задачи (1) – (3) воспользуемся принципом максимума Понтрягина.

Если $\left\{x^*(t), y^*(t), \alpha^*(t), t \in [0, T]\right\}$ – решение задачи (1) – (3), то существуют непрерывные вектор-функции

$$\varphi(t) = \left[\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_m(t)\right],$$
$$\eta(t) = \left[\eta_1(t), \eta_2(t), ..., \eta_n(t)\right]$$

и постоянная φ_0, такие, что:

1) $\varphi_0 \geq 0,\ \left|\varphi_0\right| + \left\|\varphi(t)\right\| + \left\|\eta(t)\right\| \neq 0,\ t \in [0, T]$;

2) $\left\{\varphi(t), \eta(t)\right\}$ – решение сопряжённой системы (5), соответствующее рассматриваемому решению;

3) при каждом $t \in [0, T]$ функция переменной α $H\left(x(t), y(t), \varphi(t), \eta(t), \alpha\right)$ достигает своей верхней границы на множестве D, которое задаётся ограничениями (3);

4) на правом конце выполняется условие трансверсальности

$$\varphi(T) = \varphi_0 \nabla_x \Phi\left(y(T)\right) = [0, 0, \cdots, 0]',$$
$$\eta(T) = \varphi_0 \nabla_y \Phi\left(y(T)\right) =$$
$$= \left[\varphi_0 w_1, \varphi_0 w_2, \cdots, \varphi_0 w_{n_1}, 0, 0, \cdots, 0\right]',$$

где

$$\Phi\left(y(T)\right)=\sum_{j=1}^{n_1} w_j y_j(T),$$
$$\eta_j(T)=\varphi_0 w_j, \quad j=\overline{1,n_1},$$
$$\eta_j(T)=0, \quad j=\overline{n_1+1,n}.$$

Константа $\varphi_0 \neq 0$, так как если $\varphi_0 = 0$, то система (5) при нулевых условиях на правом конце имеет лишь нулевое решение:

$$\varphi(t)\equiv 0, \quad \eta(t)\equiv 0,$$

что противоречит п. 1 условий оптимальности. Поэтому можно считать $\varphi_0 = -1$, а условия трансверсальности примут вид

$$\begin{cases} \varphi_i(T)=0, \quad i=\overline{1,m}, \\ \eta_j(T)=-w_j, \quad j=\overline{1,n_1}, \\ \eta_j(T)=0, \quad j=\overline{n_1+1,n}. \end{cases} \tag{6}$$

Таким образом, требуется найти аналитическое решение задачи

$$\max_{\alpha\in D}\left\{-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left[\beta_{ij} b_{ij} y_j(t)\varphi_i(t)+\alpha_{ji} a_{ji} x_i(t)\eta_j(t)\right]\right\}.$$

Выводы

1. В статье сформулирована задача оптимального управления распределением разнородных сил и средств оперирующих сторон по критерию минимума средневзвешенного математического ожидания суммарного количества основных сил противоборствующей стороны в конце конфликтной ситуации в условиях определённости при постоянных параметрах распределения сил и средств стороны A.

2. Использование метода условного градиента для решения данной задачи в процессе конфликтной ситуации при изменившихся начальных условиях проблематично. Требуется определить достаточно простой и "быстродействующий" алгоритм решения данной задачи.

Литература

1. Задачи оптимального распределения сил и средств в динамических процессах конфликтных ситуаций / В.Б. Кононов, Д.И. Евстрат, Ю.И. Рафальский, И.Ф. Бабий // Системи обробки інформації. – Х.: ХВф «Транспорт України». – 2001. – Вип. 1(11). – С. 129 – 133.

2. Кононов В.Б. Метод решения задачи распределения сил и средств в конфликтной ситуации // Системи обробки інформації. – Х.: НАНУ, ПАНМ, ХВУ. – 2002. – Вип. 2(18). – С. 155 – 158.

3. Кононов В.Б., Рафальский Ю.И., Гурин А.П. Оптимальное управление распределением средств резерва // Системи обробки інформації – Х.: НАНУ, ПАНМ, ХВУ. – 2002. – Вип. 5(21). – С. 45 – 47.

4. Кононов В.Б., Нестеренко А.П., Кожушко Я.Н. Оптимальное управление распределением неоднородных сил и средств по критерию минимума среднего суммарного количества основных сил противника в конфликтной ситуации // Системи обробки інформації. – Х.: НАНУ, ПАНМ, ХВУ. – 2002. – Вип. 6(22). – С. 277 – 280.

5. Кононов В.Б. Задачи оптимального управления распределением неоднородных сил и средств // Системи обробки інформації. – Х.: ХВУ. – 2002. – Вип. 1. – С. 59 – 62.

Поступила в редакцию 05.05.04

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Б.Ф. Самойленко, Харьковский военный университет, г. Харьков