УДК 629.391

В.В. БАРАННИК

Харьковский военный университет, Украина

МЕТОД БЫСТРОЙ БИНОМИНАЛЬНО-ПОЛИАДИЧЕСКОЙ НУМЕРАЦИИ

Изложен метод быстрого формирования кодов-номеров для биноминально-полиадических чисел с произвольным динамическим диапазоном конечной мощности. Рассмотрены различные варианты переиндексации полиадических оснований при обработке последовательностей, содержащих нулевые элементы. Проведена оценка количества операций, затрачиваемых на быструю нумерацию. Сделан вывод о необходимости использования конвейерной схемы формирования кода.

биноминально-полиадическое число, объем множества, избыточность, количество операций

Введение

Характерная особенность современных информационно-вычислительных процессов состоит в превышении скорости информационных потоков над скоростью обработки и пропускной способностью каналов связи. Требуемые объемы достоверных данных, которые необходимо передавать в реальном времени, достигают порядка **10 Г** (бит/с) [1 - 3]. В связи с этим разрабатываемые методы должны не только обеспечивать заданную степень сжатия без потери качества, но и иметь сложность вычислений, соответствующую возможностям существующих вычислительных систем.

1. Формулирование проблемы

В статьях [4, 5] показана эффективность метода, основанного на устранении двумерной структурной избыточности для сжатия с достаточно высоким коэффициентом без потери качества. Однако для данного метода свойственны большие затраты машинных операций на кодирование, превышающие порядок $\mathbf{O(n^2)}$. При этом основное количество операций затрачивается на нахождение весовых коэффициентов при осуществлении нумерации. Снизить количество операций за счет только биноминальных или только полиадических свойств не представляется возможным. Поэтому необходимо решить проблему, состоящую в сокращении количества операций на вычисление весовых коэффициентов на основе свойств биноминально-полиадических чисел. *Цель статьи* состоит в разработке быстрой нумерации биноминально-полиадических чисел для снижения времени обработки и передачи данных.

2. Общая схема биноминально-полиадической нумерации

Для определения направлений уменьшения количества операций на формирование кода-номера для биноминально-полиадического (БП) числа рассмотрим основные особенности и общую схему нумерации [5]:

$$\mathbf{N(w,\Lambda)_m} = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{m-1}} \sum_{\mathbf{h=0}}^{\mathbf{a_i-1}} \mathbf{V}\left(\mathbf{w-h-\sum_{\gamma=1}^{i-1} a_\gamma,\ \Lambda^{(i)}}\right)_{\mathbf{m-i}}, \quad (1)$$

где $\mathbf{N(w,\Lambda)_m}$ - код-номер *m*-разрядного БП-числа;

$\mathbf{V}\left(\mathbf{w-h-\sum_{\gamma=1}^{i-1} a_\gamma,\ \Lambda^{(i)}}\right)_{\mathbf{m-i}}$ - весовой коэффициент, соответствующий **h**-му значению **i**-го разряда БП-числа, равный количеству допустимых БП-чисел, состоящих из **m-i** разрядов, сумма которых равна

$\mathbf{w-h-\sum_{\gamma=1}^{i-1} a_\gamma}$;

$\sum_{h=0}^{a_i-1} \mathbf{V}\left(\mathbf{w-h-\sum_{\gamma=1}^{i-1} a_\gamma, \Lambda^{(i)}}\right)_{\mathbf{m-i}}$ - весовой коэффициент **i**-го разряда БП-числа, равный суммарному по всему диапазону значений разряда $\mathbf{a_i}$ количеству допустимых **(m-i)**-разрядных БП-чисел.

Из анализа выражения (1) следует, что основное количество операций при формировании кода-номера $\mathbf{N(w, \Lambda)_m}$ затрачивается на следующее:

- вычисление весовых коэффициентов БП-числа;
- нахождение составных слагаемых величины $\mathbf{V}\left(\mathbf{w-h-\sum_{\gamma=1}^{i-1} a_\gamma, \Lambda^{(i)}}\right)_{\mathbf{m-i}}$.

Поэтому для уменьшения количества операций при формировании кода-номера для биноминально-полиадического числа необходимо:

1. Осуществить замену схемы нумерации по диапазону значений каждого разряда на схему по отдельному значению разряда. В этом случае суммы весовых коэффициентов БП-числа по значению его разрядов заменяется одним выражением, равным свертке суммы сочетаний с двумерными структурными ограничениями.

2. Разработать конвейерную схему вычисления слагаемых весовых коэффициентов.

3. Разработка метода быстрой нумерации биноминально-полиадических чисел

Для обоснования возможности замены суммы весовых коэффициентов по диапазону значений разряда одним выражением сформулируем определения и рассмотрим свойства БП-прямоугольников.

Определение 1. **m**-мерным БП-прямоугольником называется прямоугольник, образованный **m** основаниями полиадического числа.

Наименьшим неделимым элементом такого прямоугольника есть двумерный БП-прямоугольник, образованный двумя основаниями полиадического числа. Элементом двумерного БП-прямоугольника является значение суммы, соответствующее БП-числу в **m**-мерном пространстве.

Определение 2. Полной **m**-й БП-линейкой называется часть или весь БП-прямоугольник, описываемый **m** основаниями полиадического числа. Причем относительно $\mathbf{(m+1)}$-мерного БП-прямоугольника **m**-мерная линейка является дробной.

В соответствии с введенными определениями основания полиадического числа λ_i являются основаниями двумерных БП-прямоугольников по их индексам (значениям элементов в верхнем левом углу БП-прямоугольника). В свою очередь, значение суммы **w** соответствует индексу диагонали в двумерном БП-прямоугольнике. По индексу суммы осуществляется подсчет количества допустимых БП-чисел в двумерном прямоугольнике. При этом значения оснований влияют на сдвиг индекса суммы относительно нулевого уровня и на количество допустимых последовательностей внутри двумерного прямоугольника. Значит, основания полиадических чисел и значение суммы разрядов биноминального числа с точки зрения биноминально-полиадического числа можно интерпретировать, соответственно, как параметры диапазона и сдвига и как отборочный (классифицирующий) параметр. Отсюда вытекает свойство БП-прямоугольников, состоящее в возможности подсчета количества допустимых БП-чисел для полной или дробной БП-линейки с любой конечной степенью мерности. Данное свойство создает условия для замены суммы весовых коэффициентов по диапазону значений разряда одним выражением. Для обоснования такой замены сформулируем и докажем теорему.

Теорема о быстрой БП-нумерации. Формирование кода номера $\mathbf{N(w, \Lambda)_m}$ для БП-числа $\mathbf{A=\{a_i\}_{i=\overline{1,m}}}$ можно проводить по схеме, в которой весовой коэффициент каждого $\mathbf{i}$-го разряда находится как количество допустимых последовательностей в $(\mathbf{m}-\mathbf{i}+\mathbf{1})$-мерном БП-прямоугольнике:

$$\mathbf{N}(\mathbf{w}, \Lambda)_{\mathbf{m}} = \sum_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{m}-1} \mathbf{V}\left(\mathbf{w}_{\mathbf{i}}, \Lambda^{(\mathbf{i})}\right)_{\mathbf{m}-\mathbf{1}+\mathbf{1}}; \qquad (2)$$

$$\Lambda^{(\mathbf{i})} = \{\lambda_1^{(\mathbf{i})}, \ldots, \lambda_{\mathbf{u}}^{(\mathbf{i})}, \ldots, \lambda_{\mathbf{m}-\mathbf{i}+1}^{(\mathbf{i})}\},$$

где $\Lambda^{(\mathbf{i})}$ - вектор оснований полиадического числа на $\mathbf{i}$-м шаге нумерации; $\lambda_{\mathbf{u}}^{(\mathbf{i})}$ - $\mathbf{u}$-е основание полиадического числа на $\mathbf{i}$-м шаге нумерации; $\mathbf{w}_{\mathbf{i}}$ - сумма $(\mathbf{m}-\mathbf{i}+\mathbf{1})$-х необработанных разрядов БП-числа; $\mathbf{V}\left(\mathbf{w}_{\mathbf{i}}, \Lambda^{(\mathbf{i})}\right)_{\mathbf{m}-\mathbf{i}+\mathbf{1}}$ - количество допустимых БП-чисел с количеством разрядов $\mathbf{m}-\mathbf{i}+\mathbf{1}$ на $\mathbf{i}$-м шаге нумерации для параметров $\mathbf{w}_{\mathbf{i}}$ и $\Lambda^{(\mathbf{i})}$.

Индекс шага изменяется в пределах $\mathbf{1} \le \mathbf{i} \le \mathbf{m}-\mathbf{1}$. Причем пересчет параметров нумерации $\mathbf{w}_{\mathbf{i}}$ и $\Lambda^{(\mathbf{i})}$ на каждом шаге $\mathbf{i}$ задается следующим образом:

$$\lambda_1^{(\mathbf{i})} = \mathbf{a}_{\mathbf{i}}, \; \lambda_{\mathbf{u}}^{(\mathbf{i})} = \lambda_{\mathbf{i}+\mathbf{u}-1}, \; \mathbf{u} = \overline{\mathbf{2}, \mathbf{m}-\mathbf{i}+\mathbf{1}}, \qquad (3)$$

$$\mathbf{w}_{\mathbf{i}} = \mathbf{w} - \sum_{\gamma=1}^{\mathbf{i}-1} \mathbf{a}_{\gamma}, \qquad (4)$$

где $\mathbf{a}_{\gamma}$ - значение обработанного разряда БП-числа.

Доказательство. Доказательство теоремы основано на доказательстве соотношения между весовыми коэффициентами $\sum_{\mathbf{h}=0}^{\mathbf{a}_{\mathbf{i}}-1} \mathbf{V}\left(\mathbf{w}_{\mathbf{i}}-\mathbf{h}, \Lambda^{(\mathbf{i})}\right)_{\mathbf{m}-\mathbf{i}}$ и $\mathbf{V}\left(\mathbf{w}_{\mathbf{i}}, \Lambda^{(\mathbf{i})}\right)_{\mathbf{m}-\mathbf{i}+\mathbf{1}}$, которые соответствуют сумме по значению диапазона разряда и быстрой схеме нумерации:

$$\sum_{\mathbf{h}=0}^{\mathbf{a}_{\mathbf{i}}-1} \mathbf{V}\left(\mathbf{w}_{\mathbf{i}}-\mathbf{h}, \Lambda^{(\mathbf{i})}\right)_{\mathbf{m}-\mathbf{i}} = \mathbf{V}\left(\mathbf{w}_{\mathbf{i}}, \Lambda^{(\mathbf{i})}\right)_{\mathbf{m}-\mathbf{i}+\mathbf{1}}. \qquad (5)$$

Доказательство равенства (5) основано на свойствах БП-прямоугольников. Покажем это на примере первого разряда $\mathbf{a}_1$ БП-числа. Для фиксированного $\mathbf{a}_1$ выражение в левой части равенства (5) указывает на количество допустимых БП-чисел с суммой, равной $\mathbf{w}$, у которых значение первого разряда $\mathbf{a}_1^{\bullet}$ меньше значения разряда $\mathbf{a}_1$ обрабатываемой последовательности. Другими словами, мы проводим суммирование количеств допустимых БП-чисел в $(\mathbf{m}-\mathbf{1})$-мерном БП-пространстве по $\mathbf{a}_1^{\bullet}$, принимающему значения в интервале $0 \le \mathbf{a}_1^{\bullet} \le \mathbf{a}_1$, т.е. общее количество слагаемых будет равно $\mathbf{a}_1$. Следовательно, величину $\sum_{\mathbf{h}=0}^{\mathbf{a}_1-1} \mathbf{V}\left(\mathbf{w}-\mathbf{h}, \Lambda^{(1)}\right)_{\mathbf{m}-1}$ можно интерпретировать как суммарное количество допустимых БП-чисел в $\mathbf{m}$-мерном БП-прямоугольнике, у которого значение первого основания равно $\lambda_1^{(1)} = \mathbf{a}_1$. В то же время величина в правой части равенства (5) для $\mathbf{i}=\mathbf{1}$ также (по определению) соответствует количеству БП-чисел с суммой $\mathbf{w}$ в $\mathbf{m}$-мерном БП-прямоугольнике при $\lambda_1^{(1)} = \mathbf{a}_1$. По аналогии доказывается выполнение равенства (5) для любой степени мерности.

Таким образом, равенство (5) доказано. Из выполнения равенства (5) следует равенство между нумератором, заданным выражением (1), и нумератором, отвечающим выражению (2) для быстрой схемы. При этом на каждом шаге нумерации после каждого отброса обработанного разряда БП-числа необходимо организовывать пересчет индексов необработанных разрядов. Такой пересчет организовывается исходя из того, что БП-прямоугольник начинает заполняться с более старших разрядов, начиная с $\mathbf{a}_1$. В этом случае допустимые элементы пробегают по стороне, содержащей основание с большим по значению индексом. Это соответствует более младшему разряду БП-числа. Поэтому обработка элемента на $\mathbf{i}$-м шаге приводит к сдвигу на один элемент влево индексов необработанных элементов на следующем шаге нумерации, т.е. выполняется выражение (3). Поскольку после каждого шага осуществляется исключение из дальнейшей обработки предыдущего разряда, то значение индекса очередного БП-прямоугольника сдвигается относительно нулевого уровня на величину, равную сумме значений ранее отброшенных разрядов. Тогда, чтобы привести индекс текущего БП-прямоугольника к нулевому уровню, требуется выполнить преобразования, задаваемые выражением (4).

Теорема доказана полностью.

Из сравнительного анализа левой и правой частей выражения (5) вытекает, что выигрыш для быстрой БП-нумерации относительно стандартной схемы нумерации обеспечивается при $\mathbf{a_i} \geq \mathbf{2}$. При дальнейшем увеличении значений разрядов $\mathbf{a_i} \geq \mathbf{m}$ преимущество быстрой нумерации достигает $\mathbf{a_i}$ раз для каждого шага обработки.

В ряде случаев обрабатываемые последовательности могут содержать нулевые элементы. В этих случаях существует возможность дополнительного уменьшения количества операций. Для обоснования возможности такого уменьшения рассмотрим два следствия из доказанной теоремы.

Следствие 1. Если обрабатываемая последовательность содержит нулевые элементы, то пропускается вычисление величин $\mathbf{V\left(w_i, \Lambda^{(i)}\right)_{m-i+1}}$ на соответствующем шаге, т.е. на том шаге, на котором нулевой разряд БП-числа берется в качестве основания полиадического числа с индексом, равным единице. В зависимости от индекса шага схема пропуска вычислений выглядит следующим образом:

- для $\mathbf{i=1}$ при $\mathbf{a_1=0}$ пропускается первый шаг;

- для $\mathbf{2 \leq i \leq m-2}$ при $\mathbf{a_u=0}$ пропускается шаг $\mathbf{i=u}$, т.е. $\mathbf{V\left(w_u, \Lambda^{(u)}\right)_{m-u+1}=0}$;

- для $\mathbf{i \geq m-1}$ при $\mathbf{a_i=0}$, где $\mathbf{i=\overline{m-1, m}}$, $\mathbf{V\left(w_2, \Lambda^{(2)}\right)_2=0}$.

В случае, когда нулю равны значения сразу нескольких разрядов, происходит вычеркивание нескольких шагов.

Недостатком такой обработки нулевых элементов является то, что нулевые значения учитываются при формировании величин $\mathbf{V\left(w_i, \Lambda^{(i)}\right)_{m-1+1}}$ для предшествующих шагов. Значит, в общем случае степень мерности БП-прямоугольника не снижается, а только лишь сокращается количество весовых коэффициентов. Рассмотрим следствие 2. Содержание данного следствия заключается в понижении степени мерности БП-прямоугольников (множеств).

Следствие 2. Из анализа выражений (2) - (4) следует:

- если $\mathbf{a_1=0}$, то осуществляется переход на шаг $\mathbf{i=2}$, т.е. на $\mathbf{(m-1)}$-мерный БП-прямоугольник (обеспечивается непосредственным понижением степени мерности);

- если $\mathbf{a_1 \neq 0}$, а $\mathbf{a_2=0}$, то осуществляется переход на шаг $\mathbf{i=2}$, т.е. на $\mathbf{(m-1)}$-мерный БП-прямоугольник. При этом индексы разрядов, стоящие после $\mathbf{i=2}$, т.е. $\mathbf{i=\overline{3,m}}$, уменьшаются на единицу, а $\mathbf{\lambda_1^{(2)}=a_1}$. Значит, по аналогии, если $\mathbf{a_u=0}$, то происходит переход на шаг $\mathbf{i=2}$. При этом индексы разрядов БП-числа, расположенные после нулевого разряда $\mathbf{a_u=0}$, уменьшаются на единицу:

$$\mathbf{a_\gamma^\bullet = a_{\gamma-1}}\,;\ \mathbf{\lambda_\gamma^\bullet = \lambda_{\gamma-1}} \text{ для } \mathbf{\gamma=\overline{u+1,m}},$$

где $\mathbf{a_\gamma^\bullet}$, $\mathbf{\lambda_\gamma^\bullet}$ - соответственно разряд и отвечающее ему основание после сдвига индексов (после вычеркивания нулевого разряда)

Значит, за счет предложенной процедуры сдвига нулевой разряд исключается из предыдущих шагов нумерации, а вместо обнуления веса $\mathbf{V\left(w_u, \Lambda^{(u)}\right)_{m-u+1}=0}$ обнуляется вес $\mathbf{V\left(w, \Lambda^{(1)}\right)_m=0}$. Следовательно, достигается уменьшение мерности БП-прямоугольника. В случае, когда нулю равны несколько разрядов БП-числа, степень мерности БП-прямоугольника снижается на количество нулевых разрядов, а индексы младших разрядов БП-числа последовательно уменьшаются на единицу.

Таким образом, разработана схема поразрядного вычисления весовых коэффициентов БП-числа. В этом случае сумма весовых коэффициентов по всему диапазону значений разряда БП-числа заменяется на одно выражение, учитывающее лишь значение разряда. С физической точки зрения вычисление количества допустимых последовательностей в $(\mathbf{a_i}-\mathbf{1})$-м $(\mathbf{m}-\mathbf{i})$-мерном БП-прямоугольнике заменяется на вычисление количества допустимых последовательностей в одном $\mathbf{m}$-мерном БП-прямоугольнике.

Однако, несмотря на сокращение количества операций, остается недостаток, вызванный необходимостью вычисления в общем случае $\frac{\mathbf{3m+2}}{\mathbf{2}}$ слагаемых, которые являются составными частями весового коэффициента. Поэтому для дополнительного снижения количества операций требуется использование конвейерной и параллельной схем вычисления отдельных слагаемых весового коэффициента для смежных разрядов БП-числа.

4. Оценка эффективности

Оценка эффективности для рассмотренных нумераций биноминально-полиадических чисел проводилась по времени кодирования реалистических изображений. При этом эффективность быстрой нумерации оценивалась с учетом наличия нулевых элементов в обрабатываемых последовательностях. Для больших значений разрядов при $\mathbf{a_i} \geq \mathbf{m}$ обрабатываемых последовательностей основное сокращение в количестве операций до 90% обеспечивалось в результате перехода к быстрой БП-нумерации. При обработке видеоданных преимущество быстрой биноминально-полиадической нумерации относительно нумерации по диапазону значений каждого разряда достигает 10 - 100 раз в зависимости от степени яркости изображений.

Заключение

Таким образом, можно сделать выводы:

1. Разработан метод быстрой биноминально-полиадической нумерации, основанный на замене схемы нумерации по диапазону значений каждого разряда на схему по отдельному значению разряда. Такая возможность появляется за счет свойства БП-множества, состоящего в возможности подсчета количества допустимых БП-чисел в БП-прямоугольнике с произвольными сторонами конечной длины.

2. По сравнению со схемой нумерации по диапазону значений каждого разряда разработанная быстрая схема позволяет снизить затраты операций в среднем до 100 раз. Преимущества быстрой схемы начинают проявляться при $\mathbf{a_i} \geq \mathbf{2}$ и $\mathbf{w} \geq \mathbf{2}$.

Литература

1. Зубарев Ю.В., Дворкович В.П. Цифровая обработка телевизионных и компьютерных изображений. – М.: Междунар. центр науч. и техн. информации, 1997. – 212 с.

2. Методы сжатия данных. Устройство архиваторов, сжатие изображений и видео / В. Ватолин, А. Ратушняк, М. Смирнов, В. Юкин. – М.: ДИАЛОГ – МИФИ, 2002. – 384 с.

3. Бондарев В.Н, Трестер Г., Чернега В.С. Цифровая обработка сигналов: методы и средства. – Севастополь: СевГТУ, 1999. – 398 с.

4. Королев А.В., Баранник В.В. Метод сокращения избыточности изображений // ИУСЖТ. – 2001. – № 2. – С. 85- 88.

5. Баранник В.В. Метод двухпризнакового биноминального кодирования двоичных данных // Системи обробки інформації. – Х.: НАНУ, ПАНМ, ХВУ. – 2002. – Вип. 6(22). – С. 24 – 28.

Поступила в редакцию 12.12.2003

Рецензент: д-р техн. наук, проф. О.Н. Фоменко, Харьковский военный университет, г. Харьков