УДК 681.3

В.Г. РУБАНОВ, Е.Н. КОРОБКОВА

Белгородский государственный технологический университет, Россия

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ НАХОЖДЕНИЯ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ

Предложен способ получение булевых функций чувствительности, основанный на преобразовании области определения заданной функций в область определения функции чувствительности

цифровые системы, алгебра логики, булевы функции, булевы производные, функции чувствительности, область определения, множества, логические координаты

Постановка проблемы

Классический аппарат алгебры логики, достаточно точно отражая статику цифровых систем, недостаточен для описания динамики поведения систем во времени. Возникает проблема выбора описания и анализа динамики цифровых систем, наиболее полно удовлетворяющего требованиям, предъявляемым к системе.

Анализ существующих методов

Анализ существующих методов показал, что одним из наиболее эффективных направлений в описании динамики цифровых систем является аппарат булевых дифференциальных операторов [1,2].

Под дифференциальными операторами булевых функций обычно понимают операторы, применение которых к булевым функциям порождает новые булевы функции, описывающие условия изменения функций при изменении значений одного или некоторой группы аргументов [2].

Наибольшее практическое применение нашли дифференциальные операторы, предложенные и исследованные различными авторами, получившие названия: неориентированные и ориентированные булевы производные [3,4], кратные булевы производные [4], возрастающие и убывающие булевы производные [2], векторные ориентированные и неориентированные булевы производные или функции чувствительности [2,5], конъюнктивные и дизъюнктивные булевы производные [6].

Большинство известных способов нахождения булевых производных основано на непосредственном использовании аналитических выражений, определяющих тот или другой оператор. Все эти способы довольно громоздки, особенно в случае нахождения кратных и векторных производных, в силу необходимости выполнения большого числа промежуточных операций.

В [7] предложен способ нахождения ориентированных и неориентированных булевых производных, а в [8] – кратных производных, не требующий непосредственного выполнения этих операций, что значительно упростило алгоритм нахождения названных производных.

Цель статьи

Разработка аналогичного алгоритма для нахождения векторных булевых производных (функций чувствительности) функции $F(X)$ по подмножеству переменных $X_1 \subseteq X$.

Основное содержание

Понятие неориентированной векторной булевой производной или функции чувствительности впервые введено в [5] и представлено следующим образом:

$$\frac{\partial F(X)}{\partial X_1} = F(X) \oplus F(\overline{X}_1), \qquad (1)$$

где: $X=\{x_n, x_{n-1}, \ldots x_p, x_{p-1}, \ldots x_1\}$,

$X_1=\{x_p, x_{p-1}, \ldots x_1\}$, $\overline{X}_1=\{\overline{x}_p, \overline{x}_{p-1}, \ldots \overline{x}_1\}$.

Представляя выражение (1) в дизъюнктивной нормальной форме (ДНФ), получаем:

$$\frac{\partial F(X)}{\partial X_1}=\overline{F(X)}\cdot F(\overline{X}_1)\vee F(X)\cdot\overline{F(\overline{X}_1)}\,. \qquad (2)$$

Первое слагаемое этого выражения обычно называют возрастающей функцией чувствительности, а второе – убывающей, обозначая их в виде:

$$\frac{\partial^0 F(X)}{\partial X_1}=\overline{F(X)}\cdot F(\overline{X}_1)\,, \qquad (3)$$

$$\frac{\partial^1 F(X)}{\partial X_1}=F(X)\cdot\overline{F(\overline{X}_1)}\,. \qquad (4)$$

Функции (3.4) в отличие от (1.2) обычно называют ориентированными.

В основу алгоритма нахождения ориентированных (3.4) и неориентированных (1.2) функций чувствительности положено смысловое понятие их, заключающееся в том, что любая из этих функций характеризует изменение значения функции $F(X)$ при одновременном изменении значений некоторой группы ее аргументов $X_1 \in X$.

При этом убывающая функция чувствительности равна единице в том случае, если изменение значений всех переменных подмножества X_1 на противоположные вызывает изменение значения функции с единичного значения на нулевое значение.

Если при одновременном изменении значений всех переменных подмножества X_1 на противоположные значение функции остается неизменным (равным нулю или единице) или изменяется с нуля на единицу, то убывающая функция чувствительности равна нулю.

Аналогично – возрастающая функция чувствительности равна единице в том случае, если одновременное изменение значений всех переменных подмножества X_1 на противоположные вызывает изменение функции с нулевого значения на единичное.

Если при одновременном изменении значений всех переменных подмножества X_1 на противоположные значение функции остается неизменным (равным нулю или единице) или изменяется с единичного значения на нулевое, то возрастающая функция чувствительности равна нулю.

Возрастающая функция равна нулю также в случае, если происходит изменение переменных, не входящих в подмножество X_1, или имеет место изменение не всех переменных подмножества X_1.

Неориентированная функция чувствительности представляет собой логическую сумму убывающей и возрастающей функций. Она равна единице в том и только в том случае, если одновременное изменение всех переменных подмножества X_1 вызывает изменение функции с нулевого значения на единичное или наоборот.

Введем несколько определений, позволяющих упростить алгоритм нахождения функций чувствительности.

Определение 1. Две точки области определения функции называются противоположными, если значения всех переменных, определяющих одну из них, противоположны по отношению к значениям переменных, определяющих вторую.

Поскольку каждую из точек области определения можно характеризовать ее логической координатой (минтермом), то наряду с понятием противоположных точек будем пользоваться понятием противоположных минтермов.

Определение 2. Противоположные – это такие два минтерма, которые определяются взаимно – инверсными значениями всех переменных, входящих в них.

Если, например, задана функция от трех переменных $-F(x_3 x_2 x_1)$, то противоположными будут минтермы: $m_0=\overline{x}_3\overline{x}_2\overline{x}_1$ и $m_7=x_3 x_2 x_1$, $m_1=\overline{x}_3\overline{x}_2 x_1$ и

$m_6 = x_3 x_2 \bar{x}_1$, $m_2 = \bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1$ и $m_5 = x_3 \bar{x}_2 x_1$, $m_3 = \bar{x}_3 x_2 x_1$ и $m_4 = x_3 \bar{x}_2 \bar{x}_1$.

Для функции от n переменных связь между индексами противоположных минтермов m_i и m_j можно представить следующим образом:

$$i + j = 2^n - 1. \quad (5)$$

Следовательно, при нахождении пар противоположных минтермов, достаточно найти один из них в каждой паре, а второй записать автоматически в соответствии с приведенным соотношением.

Определение 3. Две точки области определения функции $F(X)$ называются противоположными по подмножеству переменных $X_1 \in X$, если одна из них определяется значениями переменных множества X, а вторая – противоположными значениями переменных подмножества X_1 и теми же самыми значениями остальных переменных множества X.

Определение 4. Противоположные минтермы по подмножеству переменных X_1 – это такие два минтерма, которые определяются взаимно – инверсными значениями переменных подмножества X_1 и одинаковыми значениями переменных подмножества $X_2 = X \setminus X_1$.

Если, например, задана функция от трех переменных – $F(x_3 x_2 x_1)$, то противоположными минтермами по подмножеству переменных $X_1 \in \{x_2, x_1\}$ будут следующие пары минтермов: $m_0 = \bar{x}_3 \bar{x}_2 \bar{x}_1$ и $m_3 = \bar{x}_3 x_2 x_1$, $m_1 = \bar{x}_3 \bar{x}_2 x_1$ и $m_2 = \bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1$, $m_4 = x_3 \bar{x}_2 \bar{x}_1$ и $m_7 = x_3 x_2 x_1$, $m_5 = x_3 \bar{x}_2 x_1$ и $m_6 = x_3 x_2 \bar{x}_1$. Если $X_1 \in \{x_3, x_1\}$, то противоположными минтермами по этому подмножеству будут следующие: $m_0 = \bar{x}_3 \bar{x}_2 \bar{x}_1$ и $m_5 = x_3 \bar{x}_2 x_1$, $m_1 = \bar{x}_3 \bar{x}_2 x_1$ и $m_4 = x_3 \bar{x}_2 \bar{x}_1$, $m_2 = \bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1$ и $m_7 = x_3 x_2 x_1$, $m_3 = \bar{x}_3 x_2 x_1$ и $m_6 = x_3 x_2 \bar{x}_1$.

Аналогичным образом можно представить противоположные минтермы по любому другому подмножеству переменных X_1.

В общем, если задана функция от n переменных и задан список переменных, по которому нужно найти производную, необходимо множество всех переменных разбить на два подмножества – X_1 и X_2, включив заданные переменные в подмножество X_1, а остальные – в подмножество X_2.

В этом случае противоположные минтермы m_i и m_j по подмножеству переменных X_1 можно представить в виде произведения неизменной части, образуемой литералами подмножества X_2, и минтермами p_i и p_j, образуемыми переменными подмножества X_1: $m_i = \widetilde{X}_2 p_i$, $m_j = \widetilde{X}_2 p_j$.

Такое представление позволяет противоположные минтермы во множестве переменных X определить через противоположные минтермы в подмножестве переменных X_1.

Определение 5. Два минтерма m_i и m_j во множестве переменных X противоположны по подмножеству переменных X_1, если противоположны минтермы p_i и p_j, определяющие их в подмножестве X_1.

При этом связь между индексами противоположных минтермов в подмножестве переменных X_1 можно представить аналогично (5):

$$i + j = 2^k - 1, \quad (6)$$

где к – число переменных, входящих в подмножество X_1.

В соответствии с вышеизложенным и с учетом введенных определений, можем заключить:

– убывающая функция чувствительности функции $F(X)$ по подмножеству переменных X_1 равна единице в некоторой точке области определения функции в том и только в том случае, если значение функции $F(X)$ в этой точке равна единице, а в противоположной ей точке по подмножеству переменных X_1 равна нулю;

– возрастающая функция чувствительности функции $F(X)$ по подмножеству переменных X_1 равна единице в некоторой точке области определения функции $F(X)$, если значение функции $F(X)$ в этой точке равно нулю, а в противоположной ей точке по подмножеству переменных X_1 равно единице;

– неориентированная функция чувствительности функции $F(X)$ по подмножеству переменных X_1 равна единице только в тех противоположных точках, в которых значения заданной функции $F(X)$ неодинаковы.

Предложенный подход к определению значений функции чувствительности в точках области определения функции $F(X)$ позволяет свести задачу нахождения функции чувствительности к задаче нахождения противоположных точек по подмножеству переменных X_1 и анализу значений функции в них.

Поскольку убывающая функция чувствительности равна единице в единичных точках функции $F(X)$, причем не во всех, а только в тех, которым соответствуют нулевые точки противоположные по переменным подмножества X_1, то для нахождения точек области определения функции $F(X)$, в которых убывающая функция чувствительности равна единице, необходимо выполнить операцию сжатия области определения функции $F(X)$ по подмножеству переменных X_1 [9].

В результате проделанной операции получим новое множество точек определения, координаты которых определяются переменными подмножества X_2, а переменные подмножества X_1 определяют зависимость единичных значений заданной функции в каждой точке новой области определения. Эти зависимости представлены в виде логической суммы минтермов, определяемых переменными подмножества X_1.

Если в эти логические суммы входят пары противоположных минтермов (сумма индексов которых равна $2^k - 1$), то эти пары исключаются, поскольку эти минтермы соответствуют единичным значениям функции в противоположных точках исходной области определения, следовательно, в этих точках убывающая функция чувствительности равна нулю. После исключения таких пар (если они имеются) в каждой точке новой области определения получаем множество точек, определяющих единичные значения убывающей функции чувствительности в виде отдельных минтермов или логической суммы не соседних минтермов, т.е. в виде обобщенной логической функции с зависимыми параметрами. Последующее представление убывающей функции чувствительности в минимальной ДНФ может быть осуществлено по методике, рассмотренной в [10].

В некоторых случаях более предпочтительнее осуществить обратный переход от представления функции чувствительности в сжатой области к представлению ее в исходной области с последующей записью функции в аналитическом виде в любой из известных форм.

Алгоритм этого перехода состоит в записи последовательности n – разрядных двоичных чисел, одна группа разрядов которых образована двоичным представлением номера набора в новой области, а вторая – двоичной формой представления индекса каждого из минтермов, определяющих функцию чувствительности на этих наборах.

Пусть для некоторой функции от пяти переменных в точке <6> новой области определения, определяемой переменными $x_4x_3x_2$, функция чувствительности по подмножеству переменных x_1x_0 представлена логической суммой минтермов $p_0 \vee p_2$, тогда этой точке новой области в исходной области будут соответствовать две точки, одна из которых соответствует минтерму p_0, а вторая - минтерму

p_2. Выполняя для каждой точки последовательную позиционную запись номера точки (110) и индексов минтермов (00, 10), получаем двоичные наборы 110.00 и 110.10 в исходной области определения, первому из которых соответствует логическая координата или минтерм m_{24}, а второму - m_{26}.

Если переменные подмножества X_1 не являются последовательно идущими переменными с младшими индексами, то усложняется не только алгоритм сжатия исходной области определения функции $F(X)$ [11], но и процедура перехода от представления функции чувствительности в сжатой области определения к представлению ее в исходной области. Это усложнение обусловлено тем, что номера наборов в новой области определения, образуемые переменными подмножества X_2, и минтермы, определяющие функцию чувствительности на этих наборах, могут определяться любыми сочетаниями переменных множества X. Следовательно, для определения индексов минтермов, определяющих функцию чувствительности в исходной области определения, необходимо в записи двоичной последовательности номера набора, определяемого переменными подмножества X_2, и индексов минтермов, определяемых переменными подмножества X_1, выполнить позиционную перестановку переменных, расположив их в порядке последовательного убывания индексов переменных, которым они соответствуют.

Если, например, для некоторой функции от пяти переменных после выполнения операции сжатия исходной области определения по переменным $x_4 x_2 x_0$ и удаления противоположных минтермов (если они есть) по этим переменным, в точке <2> новой области, определяемой переменными $x_3 x_1$, функция чувствительности по подмножеству переменных $x_4 x_2 x_0$ представлена логической суммой минтермов $p_1 \vee p_2 \vee p_7$, то этой одной точке новой области определения в исходной области будут соответствовать три точки, одна из которых определяется минтермом p_1, вторая – p_2, третья – p_7. Поскольку номер набора определяется переменными $x_3 x_1$, а индексы минтермов – переменными $x_4 x_2 x_0$, то последовательная запись номера набора и индексов минтермов в порядке следования переменных $x_3 x_1 . \ x_4 x_2 x_0$ для первой точки будет выглядеть как 10.001, для второй – 10.010, для третьей – 10.111.

Таким образом, первая точка определяется значениями $x_3 = x_0 = 1$, вторая – $x_3 = x_2 = 1$, третья – $x_4 = x_3 = x_2 = x_0 = 1$. После позиционной перестановки переменных в порядке последовательного убывания индексов ($x_4 x_3 x_2 x_1 x_0$) и подстановки значений переменных для каждой из трех точек получаем номера наборов в исходной области определения: для первой точки – 01001, для второй – 01100, для третьей – 11101, которым соответствуют логические координаты или минтерма m_9, m_{12}, m_{29}.

Алгоритм нахождения точек области определения функции $F(X)$, в которых возрастающая функция чувствительности равна единице, аналогичен. Единственное отличие состоит в том, что на первом шаге алгоритма производится сжатие инверсного значения функции – $\overline{F}(X)$. Это обусловлено тем, что возрастающая функция чувствительности равна единице в подмножестве нулевых точек заданной функции. При этом следует отметить, что обычно необходимости в раздельном нахождении убывающей и возрастающей функций чувствительности по рассмотренному алгоритму нет. Достаточно по этому алгоритму найти любую одну из них, а вторую записать автоматически, воспользовавшись тем, что она равна единице в противоположных точках подмножества переменных X_1, т.е. в выражении для одной из ориентированных функций чувствительности записать противоположные значения переменных подмножества X_1.

Выбор первичного нахождения той или другой ориентированной функции чувствительности обычно диктуется соотношением между числом единичных и нулевых наборов.

Если число наборов, на которых заданная функция равна единице, меньше числа нулевых наборов, то по рассмотренному алгоритму находится убывающая функция чувствительности, а возрастающая определяется инвертированием переменных подмножества X_1. При обратном соотношении единичных и нулевых наборов по рассмотренному алгоритму находится возрастающая функция чувствительности, а убывающая определяется инвертированием переменных подмножества X_1.

Выводы

Проведен анализ известных способов нахождения функций чувствительности по заданному подмножеству переменных. Отмечены их недостатки. Предложен способ нахождения ориентированных и неориентированных производных. Способ основан на преобразовании области определения заданной функции в область определения функций чувствительности путем ее сжатия и преобразования. Одним из *дальнейших направлений* исследования является анализ предложенного алгоритма на примере конкретных функций, а также разработка машинной версии его.

Литература

1. Бохманн Д. Булево дифференциальное исчисление. Обзор // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. - 1977.- №5. - С. 126 – 133.

2. Бохманн Д., Постхоф Х. Двоичные динамические системы. – М.: Энергоатомиздат, 1986. – 400 с.

3. Reed I.S. A class of multiple – error correcting codes and decoding scheme. – Trans IRE, 1954. - vol IT – 4.- P. 38 – 49.

4. Akers S.B. On a theory of Boolean functions. – J. Soc. Indust.. Appl. Math.. 1959. - vol. 7.- №4. - P. 487 – 498.

5. Sellers F., Hsido M., Beasons L. Analysis error with Boolean difference.// IEEE. Trans. On Comput.. - 1968. - vol. c – 17.- P. 676 – 683.

6. Thayse A. Disjunctive and conjunctive operators for Boolean functions. – Philips Res. Repts., 1973. - vol. 28.- P. 1 – 16.

7. Коробкова Е.Н. О применении метода сжатия области определения логических функций к нахождению булевых производных. // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии: Сб. науч. трудов. – Х.: НАКУ «ХАИ». – 2003. – Вып. 18. – С. 177 – 186.

8. Коробкова Е.Н. Нахождение кратных булевых производных с использованием операции сжатия их области определения. // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии: Сб. науч. трудов. – Х.: НАКУ «ХАИ». – 2003. – Вып. 20. – С. 62 – 69.

9. Рубанов В.Г., Коробкова Е.Н. Разработка алгоритма сжатия области логических функций. // Труды современного гуманитарного университета. Белгородский филиал. – Белгород. 2000. – Вып. 18. – С. 105 – 112.

10. Коробков Н.Г., Коробкова Е.Н. Разработка алгоритма минимизации обобщенных логических функций с зависимыми параметрами. // Системи обробки інформації. – Х. : НАНУ. ПАНМ. ХВУ.– 2002.– Вып. 2(18). – С. 225 – 230.

11. Коробкова Е.Н. Анализ табличного алгоритма сжатия области определения полностью определенных логических функций. // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии: Сб. науч. трудов. – Х.: НАКУ «ХАИ». – 2003. – Вып. 17. – С. 42 – 56.

Поступила в редакцию 11.10.03

Рецензент: д-р техн. наук, профессор Сироджа И.Б., Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков