УДК 681.325

ИСКЛЮЧЕНИЕ ДУБЛИРУЮЩИХСЯ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ОПЕРАЦИЙ ПРИ ДВУМЕРНОМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ УОЛША

А.Н. Сиренький

Харьковский институт Военно-Воздушных Сил им. Ивана Кожедуба

Проводится анализ арифметических операций двумерного преобразования Уолша. Для уменьшения времени выполнения преобразования предлагается исключить дублирующиеся арифметические операции.

* * *

Проводиться аналіз арифметичних операцій двомірного перетворення Уолша. Для зменшення часу виконання перетворення пропонується виключити дублюючі арифметичні операції.

* * *

The analysis of arithmetic operations of bivariate transformation Walsh is offered. For reduction of time of performance of transformation it is offered to exclude duplicated arithmetic operations.

Постановка проблемы. В настоящее время цифровая обработка сигналов используется повсюду, включая радиолокацию, сейсмографию, связь, радиоастрономию, медицину и т. д. При решении некоторых задач возникает необходимость уменьшить время обработки сигнала. Одним из направлений решения является выбор разумно построенных алгоритмов [1-6].

Многие научные школы работают над повышением эффективности вычислительных процедур преобразований. Ортогональные преобразования (ОП) Фурье, Хаара, Уолша, Карунена-Лоэва, ДКП и др. имеют различную вычислительную сложность. Она зависит от количества арифметических операций (сложения/вычитания, деления/умножения) и используемых типов данных (комплексные, вещественные, целочисленные), а также от количества отсчетов сигнала, которые используются при получении коэффициента преобразования.

Анализ известных достижений. Для повышения эффективности процедур пре-образования применяются следующие подходы [5]:

- переход к целочисленным типам данных;
- уменьшение количества арифметических операций, выполнение которых требует много процессорного времени (операции умножения и деления);
- сокращение общего количества арифметических операций, путем исключения дублирующихся;
- исключение операций сложения/вычитания элементов, значения которых равно нулю;
- исключение операций умножения на «1» и «0»;
- распараллеливание операций преобразования.

Возможность использования приведенных подходов определяется свойствами ортогонального базиса.

Целью данной работы является анализ выполнения процедур двумерного преобразования Уолша (ДПУ) для исключения дублирующихся операций.

Основной материал. Рассмотрим преобразование Уолша в двумерном базисе, способ формирования которого предложен в работе [6]. Выражения для прямого и обратного двумерного преобразования Уолша в матричной форме имеют вид:

$$w_{kl} = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} x_{ij} h_{kl}(ij)\,; \qquad (1)$$

$$x_{ij} = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} w_{kl} h_{kl}(ij)\,, \qquad (2)$$

где x_{ij} - элемент (отсчет) блока изображения

$X(n)$, $i,j,k,l=\overline{0,N-1}$, $n=log_2 N$, $n=1,2,3,\ldots$;

w_{kl} - коэффициент преобразования Хаара (элемент трансформанты $W_x(n)$);

$h_{kl}(ij)$ - элемент подматрицы H_{kl} матрицы $H_w^2(n)$.

Так как базисная матрица $H_w^2(n)$ состоит из значений функции «+1» и «1» [6], то возможно исключение таких арифметических операций, как умножение на единицу, при выполнении прямого и обратного преобразований. Исключение указанных «избыточных» операций умножения позволяет значительно сократить время выполнения преобразования.

К «избыточным» операциям также можно отнести дублирующиеся арифметические операции. Например, при выполнении прямого ДПУ выражения для расчета коэффициентов $w_{2,2}$, $w_{2,1}$, $w_{2,3}$ в соответствии с выражением (1) имеют вид:

$$\begin{aligned} w_{2,2}=\frac{1}{64}\cdot((&x_{0,0}+x_{0,1}+x_{1,0}+x_{1,1})-(x_{0,2}+x_{0,3}+x_{1,2}+x_{1,3})-\\ &-(x_{2,0}+x_{3,0}+x_{2,1}+x_{3,1})+(x_{2,2}+x_{2,3}+x_{3,2}+x_{3,3})-\\ &-(x_{0,4}+x_{0,5}+x_{1,4}+x_{1,5})+(x_{0,6}+x_{0,7}+x_{1,6}+x_{1,7})+\\ &+(x_{2,4}+x_{2,5}+x_{3,4}+x_{3,5})-(x_{2,6}+x_{2,7}+x_{3,6}+x_{3,7})-\\ &-(x_{4,0}+x_{4,1}+x_{5,0}+x_{5,1})+(x_{4,2}+x_{4,3}+x_{5,2}+x_{5,3})+\\ &+(x_{6,0}+x_{6,1}+x_{7,0}+x_{7,1})-(x_{6,2}+x_{6,3}+x_{7,2}+x_{7,3})+\\ &+(x_{4,4}+x_{4,5}+x_{5,4}+x_{5,5})-(x_{4,6}+x_{4,7}+x_{5,6}+x_{5,7})-\\ &-(x_{6,4}+x_{6,5}+x_{7,4}+x_{7,5})+(x_{6,6}+x_{6,7}+x_{7,6}+x_{7,7}); \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} w_{2,1}=\frac{1}{64}\cdot((&x_{0,0}+x_{0,1}+x_{1,0}+x_{1,1})+(x_{0,2}+x_{0,3}+x_{1,2}+x_{1,3})-\\ &-(x_{2,0}+x_{3,0}+x_{2,1}+x_{3,1})-(x_{2,2}+x_{2,3}+x_{3,2}+x_{3,3})-\\ &-(x_{0,4}+x_{0,5}+x_{1,4}+x_{1,5})-(x_{0,6}+x_{0,7}+x_{1,6}+x_{1,7})+\\ &+(x_{2,4}+x_{2,5}+x_{3,4}+x_{3,5})+(x_{2,6}+x_{2,7}+x_{3,6}+x_{3,7})-\\ &-(x_{4,0}+x_{4,1}+x_{5,0}+x_{5,1})-(x_{4,2}+x_{4,3}+x_{5,2}+x_{5,3})+\\ &+(x_{6,0}+x_{6,1}+x_{7,0}+x_{7,1})+(x_{6,2}+x_{6,3}+x_{7,2}+x_{7,3})+\\ &+(x_{4,4}+x_{4,5}+x_{5,4}+x_{5,5})+(x_{4,6}+x_{4,7}+x_{5,6}+x_{5,7})-\\ &-(x_{6,4}+x_{6,5}+x_{7,4}+x_{7,5})-(x_{6,6}+x_{6,7}+x_{7,6}+x_{7,7}); \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} w_{2,3}=\frac{1}{64}\cdot((&x_{0,0}+x_{0,1}+x_{1,0}+x_{1,1})-(x_{0,2}+x_{0,3}+x_{1,2}+x_{1,3})-\\ &-(x_{2,0}+x_{3,0}+x_{2,1}+x_{3,1})+(x_{2,2}+x_{2,3}+x_{3,2}+x_{3,3})+\\ &+(x_{0,4}+x_{0,5}+x_{1,4}+x_{1,5})-(x_{0,6}+x_{0,7}+x_{1,6}+x_{1,7})-\\ &-(x_{2,4}+x_{2,5}+x_{3,4}+x_{3,5})+(x_{2,6}+x_{2,7}+x_{3,6}+x_{3,7})-\\ &-(x_{4,0}+x_{4,1}+x_{5,0}+x_{5,1})+(x_{4,2}+x_{4,3}+x_{5,2}+x_{5,3})+\\ &+(x_{6,0}+x_{6,1}+x_{7,0}+x_{7,1})-(x_{6,2}+x_{6,3}+x_{7,2}+x_{7,3})-\\ &-(x_{4,4}+x_{4,5}+x_{5,4}+x_{5,5})+(x_{4,6}+x_{4,7}+x_{5,6}+x_{5,7})+\\ &+(x_{6,4}+x_{6,5}+x_{7,4}+x_{7,5})-(x_{6,6}+x_{6,7}+x_{7,6}+x_{7,7}). \end{aligned} \quad (5)$$

Из выражений (3)-(5) видно, что они содержат одинаковые четырехточечные суммы отсчетов блока изображения:

$$< x_{0,0}+x_{0,1}+x_{1,0}+x_{1,1} >;$$

$$< x_{0,2}+x_{0,3}+x_{1,2}+x_{1,3} >;$$

$$< x_{2,0}+x_{3,0}+x_{2,1}+x_{3,1} >;$$

$$< x_{2,2}+x_{2,3}+x_{3,2}+x_{3,3} >;$$

$$< x_{0,4}+x_{0,5}+x_{1,4}+x_{1,5} >;$$

$$< x_{0,6}+x_{0,7}+x_{1,6}+x_{1,7} >;$$

$$< x_{2,4}+x_{2,5}+x_{3,4}+x_{3,5} >;$$

$$< x_{2,6}+x_{2,7}+x_{3,6}+x_{3,7} >;$$

$$< x_{4,0}+x_{4,1}+x_{5,0}+x_{5,1} >;$$

$$< x_{4,2}+x_{4,3}+x_{5,2}+x_{5,3} >;$$

$$< x_{6,0}+x_{6,1}+x_{7,0}+x_{7,1} >;$$

$$< x_{6,2}+x_{6,3}+x_{7,2}+x_{7,3} >;$$

$$< x_{4,4}+x_{4,5}+x_{5,4}+x_{5,5} >;$$

$$< x_{4,6}+x_{4,7}+x_{5,6}+x_{5,7} >;$$

$$< x_{6,4}+x_{6,5}+x_{7,4}+x_{7,5} >;$$

$$< x_{6,6} + x_{6,7} + x_{7,6} + x_{7,7} > .$$

Подобные четырехточечные суммы многократно вычисляются при расчетах различных коэффициентов.

При выполнении обратного преобразования в соответствии с выражениями (2), также выполняются дублирующиеся арифметические операций, что видно из следующих выражений:

$$\begin{aligned}
x_{0,3} = {} & (w_{0,0} + w_{0,1} + w_{1,0} + w_{1,1}) - (w_{0,2} + w_{0,3} + w_{1,2} + w_{1,3}) + \\
& + (w_{2,0} + w_{3,0} + w_{2,1} + w_{3,1}) - (w_{2,2} + w_{2,3} + w_{3,2} + w_{3,3}) + \\
& + (w_{0,4} + w_{0,5} + w_{1,4} + w_{1,5}) - (w_{0,6} + w_{0,7} + w_{1,6} + w_{1,7}) + \\
& + (w_{2,4} + w_{2,5} + w_{3,4} + w_{3,5}) - (w_{2,6} + w_{2,7} + w_{3,6} + w_{3,7}) + \\
& + (w_{4,0} + w_{4,1} + w_{5,0} + w_{5,1}) - (w_{4,2} + w_{4,3} + w_{5,2} + w_{5,3}) + \\
& + (w_{6,0} + w_{6,1} + w_{7,0} + w_{7,1}) - (w_{6,2} + w_{6,3} + w_{7,2} + w_{7,3}) + \\
& + (w_{4,4} + w_{4,5} + w_{5,4} + w_{5,5}) - (w_{4,6} + w_{4,7} + w_{5,6} + w_{5,7}) + \\
& + (w_{6,4} + w_{6,5} + w_{7,4} + w_{7,5}) - (w_{6,6} + w_{6,7} + w_{7,6} + w_{7,7}); \quad (6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_{0,3} = {} & (w_{0,0} + w_{0,1} + w_{1,0} + w_{1,1}) + (w_{0,2} + w_{0,3} + w_{1,2} + w_{1,3}) - \\
& - (w_{2,0} + w_{3,0} + w_{2,1} + w_{3,1}) - (w_{2,2} + w_{2,3} + w_{3,2} + w_{3,3}) + \\
& + (w_{0,4} + w_{0,5} + w_{1,4} + w_{1,5}) + (w_{0,6} + w_{0,7} + w_{1,6} + w_{1,7}) - \\
& - (w_{2,4} + w_{2,5} + w_{3,4} + w_{3,5}) - (w_{2,6} + w_{2,7} + w_{3,6} + w_{3,7}) - \\
& - (w_{4,0} + w_{4,1} + w_{5,0} + w_{5,1}) - (w_{4,2} + w_{4,3} + w_{5,2} + w_{5,3}) + \\
& + (w_{6,0} + w_{6,1} + w_{7,0} + w_{7,1}) + (w_{6,2} + w_{6,3} + w_{7,2} + w_{7,3}) - \\
& - (w_{4,4} + w_{4,5} + w_{5,4} + w_{5,5}) - (w_{4,6} + w_{4,7} + w_{5,6} + w_{5,7}) + \\
& + (w_{6,4} + w_{6,5} + w_{7,4} + w_{7,5}) + (w_{6,6} + w_{6,7} + w_{7,6} + w_{7,7}). \quad (7)
\end{aligned}$$

Анализ ДПУ показал, что количество арифметических операций сложения/вычитания зависит от размерности блока, на которые разбивается исходное изображение. На рис 1. показана зависимость количества арифметических операций сложения/вычитания от размерности блока изображения.

Таким образом, для исключения дублирующих арифметических операций сложения/вычитания, процедуру преобразования следует построить следующим образом:

1. Исходное изображение разбить на блоки размерностью $N \times N$.

2. Полученный блок изображения разбить на 4-х точечные непересекающиеся подблоки. В каждом из подблоков вычесть все необходимые суммы/разности.

3. Из полученных значений суммы/разности сформировать 8-ми точечные, затем 16-ти точечные и так далее, до получения суммы/разности состоящей из $N \times N$ отсчетов.

Заключение

Из анализа выполнения прямого и обратного ДПУ следует, что общее количество дублирующихся арифметических операций сложения/вычитания составляет больше 80% всех арифметических операций. Это определяет низкую эффективность двумерного преобразования по временным показателям. Путем исключения многократного выполнения одних и тех же арифметических операций общее количество выполняемых арифметических операций уменьшается на 80%. При этом уменьшается как время выполнения ортогонального преобразования, так и упрощается техническая реализация преобразования.

Для исключения дублирующих арифметических операций необходимо разработать быстрое двумерное преобразование Уолша.

Литература

1. Блейхнут Р. Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов. – М.: Мир, 1989. – 448 с.

2. Быстрые алгоритмы в цифровой обработке изображений. / Т.С. Хуанг, Дж.-О. Эклунд, Г.Дж. Нуссбаумер и др. Под ред. Т.С.Хуанга: – М.: Радио и связь, 1984. – 224 с.

3. Нуссбаумер Г. Быстрое преобразование Фурье и алгоритмы вычисления сверток. - М.: Радио и связь, 1985. – 248 с.

4. Ахмед Н., Рао К.Р. Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов. Под ред. И.Б. Фоменко. – М.: Связь, 1980. – 248 с.

5. Бахтаров Г.Д. Цифровая обработка сигналов. Проблемы и основные направления повышения эффективности // Зарубежная радиоэлектроника. – 1984 - С. 48 - 68.

6. Королева Н.А., Бохан К.А., Сиренький А.Н. Формирование двумерного базиса Уолша // Інформаційно-керуючі системи на залізничному транспорті. – 2003. - №2. – с. 10 – 15.

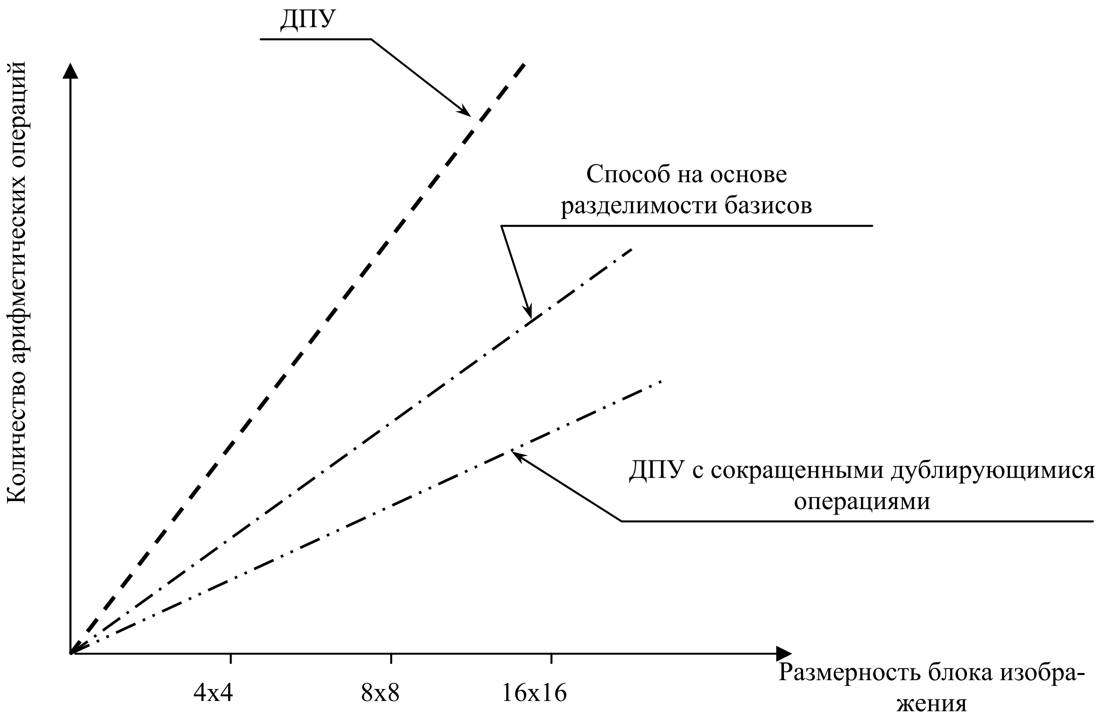

Рис. 1. Зависимость количества арифметических операций сложения/вычитания от размерности блока изображения

Поступила в редакцию 14.08.03

Рецензент: д-р техн. наук, профессор Жихарев В.Я., Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков