УДК 621.396:537.874.4

ТЕСТ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЧИСЛА СТАТИСТИЧЕСКИ НЕЗАВИСИМЫХ СИГНАЛОВ В ЗАДАЧАХ КОМПОНЕНТНОГО АНАЛИЗА

А.Д. Абрамов, канд. техн. наук, А.В. Крупка, Р.В. Нежальский

Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ»

Приводится решение задачи определения числа наблюдаемых сигналов в рамках метода наименьших квадратов. Синтезируется удобная в вычислительном отношении технология, которая обеспечивает оперативность получения результата, возможность использования табулированной статистики и управление величиной вероятности ошибки первого рода.

* * *

Наводиться рішення задачі визначення числа сигналів, що спостерігаються, в межах методу найменших квадратів. Синтезується зручна в обчислювальному відношенні технологія, що забезпечує оперативність одержання результату, можливість використання табульованої статистики і керування величиною імовірності помилки першого роду.

* * *

Solution of the number of observed signals detection problem is presented within the framework of the least-squares method. Convenient in calculation technology providing operational efficiency of the result retrieval, possibility of using tabulated statistics and control of alpha error possibility is synthesized.

Постановка проблемы. Разработка и совершенствование методов выделения статистически независимых компонент из наблюдаемого колебания является актуальной задачей теории и практики радиотехнических и диагностических измерений [1].

Анализ известных достижений. Известны процедуры для ”слепого” разделения сигналов, получившие в технической литературе название ICA (независимый компонентный анализ) [2,3].

Использование этих высокопроизводительных процедур разделения требует априорного знания информации о количественном составе источников, попадающих в “поле зрения” приемных сенсоров.

Выделение нерешенной проблемы. Указанный фактор существенно ограничивает возможности практического использования методологии “слепого” разделения в задачах диагностики и распознавания.

Цель статьи. Здесь решение задачи определения количественного состава компонент от неизвестного числа источников проведено в рамках метода наименьших квадратов.

Синтезирована удобная в вычислительном отношении технология, которая обеспечивает оперативность получения результата, возможность использования табулированной статистики и управление величиной вероятности ошибки первого рода.

Постановка задачи. В рамках независимого компонентного анализа задача может формулироваться так.

Существует N независимых источников сигналов (компонент).

Пусть в заданные моменты времени k ($k=\overline{1,K}$) на выходах M потенциальных сенсоров регистрируется $M-$мерный вектор наблюдений $u(k)$:

$$u(k)=\left[u_1(k),u_2(k),...,u_m(k)\right]^T , \qquad (1)$$

где $u_m(k)$ — отсчет наблюдения с выхода $m-$го сенсора, полученный в $k-$й момент времени ($m=\overline{1,M}$), “T” — знак транспонирования.

Связь между вектором наблюдения и $N-$мерным вектором $s^N(k)=\left[s_1(k),s_2(k),...,s_m(k)\right]^T$ сигналов $s_n(k)$ ($n=\overline{1,N}$) определяется равенством

$$u(k)=A^N s^N(k)+\varepsilon(k) ,\ k=\overline{1,K} . \qquad (2)$$

Здесь

$$A^N = [\Lambda_1, \Lambda_2, ..., \Lambda_N]. \qquad (3)$$

$\Lambda_n = \left[\varphi_n^{(1)}, \varphi_n^{(2)}, ..., \varphi_n^{(m)}\right]^T$ — "фазовое" распределение потенциала N – го источника, определяемое как его местоположением (x_n, y_n, z_n), $n = \overline{1, M}$, в пространственной декартовой системе (*xyz*), так и координатами (x_m, y_m, z_m), $m = \overline{1, M}$, приемных сенсоров, $\varphi_n^{(m)} = f(x_n, y_n, z_n, x_m, y_m, z_m)$, $n = \overline{1, N}$, $m = \overline{1, M}$, — известная функция координат, $\varepsilon(k) = [\varepsilon_1(k), \varepsilon_2(k), ..., \varepsilon_m(k)]^T$,

$\varepsilon_m(k)$ — k – й отсчет случайного гауссовского процесса (шум m – го сенсора).

Вектор $\varepsilon(k)$ имеет характеристики

$$\left\langle \varepsilon(k) \right\rangle = 0 ,$$
$$\left\langle \varepsilon(k_1)\varepsilon^T(k_2) \right\rangle = \sigma^2 I_M \delta(k_1 - k_2) , \qquad (4)$$

где $\delta(\cdot)$ — символ Кронекера, $I_M = diag(1,1,...,1)$ — единичная матрица размерности $M \times M$ из поля F , $I_M \in M_{M,M}(F)$, σ^2 — мощность помехи.

Амплитуды сигналов $s_n(k)$ ($n = \overline{1, N}$, $k = \overline{1, K}$) моделируются взаимно независимыми случайными величинами с мощностными показателями $\sigma_n^2 = \left\langle s_n^2(k) \right\rangle$.

Требуется разработать процедуру, позволяющую на основании выборки $u^K = [u(1), u(2), ..., u(K)]$ определить число N компонент при отсутствии априорных сведений об их местоположении, величине и характере распределения интенсивностей, мощности сенсорных шумов.

Основной материал. Решение задачи проведем в рамках метода наименьших квадратов (МНК). Для этого введем в изложение гипотезу H_{l-1} о наличии в наблюдаемом процессе (1) $l-1$ компонент с неизвестными мгновенными амплитудами $s_n(k)$ и параметрами x_n, y_n, z_n , $n = \overline{1, l-1}$. В качестве признака, характеризующего меру отличия минимальных значений нормированных невязок $RSS_{H_{l-1}}$ и RSS_{H_l} , соответствующих гипотезе H_{l-1} и ее сложной альтернативе H_l согласно МНК

$$RSS_{H_m} = \inf_{A^m, s^{mK}} \left\{ \frac{1}{MK} \sum_{k=1}^{K} [u(k) - A^m s^m(k)]^T \times \times [u(k) - A^m s^m(k)] \right\}, m = l-1, l \qquad (5)$$

используем значения статистики F_{l-1} [4]

$$F_{l-1} = \frac{RSS_{l-1} - RSS_l}{RSS_l} \times \frac{2(M - l - 1)}{2} . \qquad (6)$$

Последняя при выполнении H_{l-1} подчиняется F – распределению с $\nu = 2(M - l - 1)$ и 2 степенями свободы.

В статистике (5) прежде всего найдем точную нижнюю грань по вектору $s^m(k)$. Известно [5], что единственная экстремальная точка по $s^m(k)$ квадратичной функции, стоящей в фигурных скобках соотношения (5) достигается при

$$s^m(k) = \left(\left(A^m\right)^T A^m\right)^{-1} \left(A^m\right)^T u(k) . \qquad (7)$$

Тогда, после подстановки (7) в (5) и тождественных преобразований, получаем

$$RSS_{H_m} = \inf_{A^m} \left\{ \frac{1}{MK} \sum_{k=1}^{K} u^T(k) P_{m\perp} u(k) \right\} , \qquad (8)$$

где

$$P_{m\perp} = I_m - P_m = I_m - A^m((A^m)^T A^m)^{-1}(A^m)^T \qquad (9)$$

— идемпотентная матрица $P_{m\perp} \in M_{M,M}(F)$, P_m — проектор, заданный при помощи векторного базиса $\left\{\Lambda_m, m = \overline{1, M}\right\}$.

Для нахождения минимума RSS_{H_m} по A^m воспользуемся спектральным разложением ортогонального проектора $P_{m\perp}$ [6]:

$$P_{m\perp} = H_M \nu H_M^T . \qquad (10)$$

Здесь $\nu = diag(\nu_1, \nu_2, ..., \nu_M)$, $\nu_1 = \nu_2 = ... = \nu_m = 0$, $\nu_{m+1} = \nu_{m+2} = ... = \nu_M = 1$, а унитарная матрица $H_M = (H_1, H_2, ..., H_M)$ составлена из $M-$мерных векторов $H_j\,(j = \overline{1,M})$. Причем $H_M H_M^T = I_M$. С учетом (10) правую часть равенства (8) приводим к виду

$$RSS_{H_m} = \inf_{A^m}\left\{\frac{1}{M} Sp(\nu H_M R H_M^T \nu)\right\}. \qquad (11)$$

При выводе последнего соотношения введено обозначение

$$R = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} u(k) u^T(k) \qquad (12)$$

— выборочная корреляционная матрица вектора $u(k)$.

Теорема Релея-Ритца утверждает: минимум (11) достигается, когда столбцы H_j матрицы H_M совпадают с ортонормированными векторами T_j, отвечающими минимальным собственным значениям $t_j\,(j = \overline{m+1,M})$ матрицы R [6]. Как следствие: если верна гипотеза H_m и выполнены условия ортонормированности, то

$$RSS_{H_m} = \sum_{j=m+1}^{M} t_j . \qquad (13)$$

Подставив (13) в соотношение (6), получаем выражение для критической статистики F_{l-1}

$$F_{l-1} = \frac{2(M-l-1)}{2} \frac{\sum_{j=l}^{M} t_j - \sum_{j=l+1}^{M} t_j}{\sum_{j=l+1}^{M} t_j}, \qquad (14)$$

которая при выполнении H_{l-1} подчиняется $F-$распределению с 2 и $2(M-l-1)$ степенями свободы. Согласно (6) гипотеза H_{l-1} принимается при $F_{l-1} \le \Pi_{\alpha,l-1}$ и отвергается, если $F_{l-1} > \Pi_{\alpha,l-1}$. Порог $\Pi_{\alpha,l-1}$ определяется из таблиц $F-$распределения по заданному уровню значимости α (ошибка первого рода) и числу степеней свободы.

Из вышеприведенного следует, что технология обработки наблюдаемых процессов для принятия классификационного решения о числе источников сводится к следующим операциям. По совокупности дискретных сигналов, снятых в $k-$е моменты времени ($k = \overline{1,M}$) с M приемных сенсоров, формируют по правилу (12) выборочную корреляционную матрицу R. Затем определяют совокупность $\{t_j,\ j = \overline{1,M}\}$ ее собственных значений и переходят к последовательной проверке сложных гипотез H_{l-1}, $l = 1,2,...$. Для этого вычисляют критическую статистику F_{l-1} и сравнивают ее с порогом $\Pi_{\alpha,l-1}$. При $F_{l-1} > \Pi_{\alpha,l-1}$ гипотезу H_{l-1} отвергают. Переходят к проверке следующей гипотезы H_l. Если на некотором шаге, например, $(\rho-1)-$м, впервые выполнено $F_{\rho-1} \le \Pi_{\alpha,l-1}$, то выносится решение: наблюдаемый процесс обусловлен компонентами от $(\rho-1)$ источников. Процедура проверки на этом прекращается.

Для исследования качественных показателей предложенной технологии и синтезированного теста были проведены численные статистические эксперименты. Моделировалась обработка наблюдений, снятых с $8-$ми потенциальных сенсоров, эквидистантно расположенных на окружности заданного радиуса (в плоскости *x0y*). Эти данные в упрощенной форме могут характеризовать распределение потенциала на поверхности физического объекта (например, скальп человека), образованного от каких-либо источников (очагов) электрической (патологической) активности — диполей внутри мозга. Местоположение диполей в плоскости *x0y* связывалось с координатной функцией ϕ_m^n соотношением [1]:

$$\phi_m^n = \frac{a_x(x_m - x_n) + a_y(y_m - y_n)}{\left[(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n)^2\right]^{3/2}} \qquad (15)$$

где $\{x_m, y_m\}$ и $\{x_n, y_n\}$ — соответственно координаты $m-$го сенсора и $n-$го источника, а a_x и a_y — направляющие "косинусы" диполя $O_n(x_n, y_n)$ на оси *0x* и *0y*.

Случайные во времени "мгновенные" амплитуды $s_n(k)$ компонент генерировались с помощью гауссова датчика и задавались некоррелированными между собой.

Эффективность предложенной технологии проверялась на уровне цифрового статистического моделирования для заданного числа диполей, их местоположения и направления для конкретного значения отношения сигнал/шум.

Выводы

Анализ приведенных результатов показывает, что технология принятия решения о количественном составе источников, "отклики" на которые зарегистрированы системой сенсорных датчиков, во-первых, работоспособна при достаточных соотношениях сигнал/шум.

Качественные показатели существенно зависят от близости и ориентации диполей.

Во-вторых, технология оперативна и проста в вычислительном отношении.

В-третьих, технология использует табулированную статистику и позволяет управлять величиной ошибки первого рода.

Литература

1. В.В. Гнездинский. Обратная задача ЭЭТ и клиническая электроэнцефаллография. - М.: Наука. - 2000.
2. A.J. Bell and T.J. Sejnowski. An information maximization approach to blind separation and blind deconvolution, Neural Computation 7, 1995, pp. 1129-1159.
3. Te-Won Lee, M, Girolami, M.S. Lewicki and T.J. Sejnowski. Blind signal separation of more than mixtures. //IEEE Signal Processing Letters, In press. - 2001.
4. Худсон В. Статистика для физиков. - М.: Мир. - 1970.
5. Абрамов А. Д., Сугак В. Г., Разсказовский В. Б. Обнаружение-распознавание полезного сигнала в смеси с помеховыми отражениями от поверхности моря // Радиотехнические системы миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов волн. - Х.: Ин-т радиофизики и электроники НАН Украины. - 1991. - С. 33-38.
6. Корн Г. П., Корн Г. Т. Справочник по математике. - М.: Наука. - 1973. - 832 с.

Поступила в редакцию 28.07.03

Рецензент: д-р техн. наук, профессор Волосюк В.К., Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков