

Определение эффективной ширины потерявшей устойчивость обшивки на основе численного эксперимента

*Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского
«Харьковский авиационный институт»*

Уменьшение силы, воспринимаемой сжатой панелью, связано с особенностями деформирования обшивки после потери устойчивости. Упрощенно этот факт учитывается путем уменьшения ширины работающей с номинальными напряжениями обшивки. В данной работе эффективная ширина определяется по результатам численного эксперимента. Полностью геометрически нелинейная задача закритического поведения сжатой пластины решается методом конечного элемента, реализованном в программном обеспечении Nastran. По полученным результатам построена эмпирическая зависимость коэффициента редукации от величины номинальных напряжений. Показано, что его величина практически не зависит от относительной толщины, удлинения и жесткости ребер.

Ключевые слова: присоединённая обшивка, численный эксперимент, геометрически нелинейная задача.

Введение

Рационально спроектированная сжатая панель кессона крыла самолета допускает выпучивание обшивки между стрингерами, так называемую местную потерю устойчивости. Этот вид потери устойчивости происходит, когда панель далека от исчерпания несущей способности, а возникающие в ней напряжения не превышают предела текучести. Если до потери устойчивости считается, что в равномерно сжатой панели напряженное состояние однородно, то в процессе закритического выпучивания обшивки происходит перераспределение напряжений: появляются существенные изгибные напряжения; нормальные мембранные напряжения в примыкающей к стрингерам части обшивки увеличиваются с ростом внешней нагрузки, а в центре пластины остаются равными критическим [1, 2]. В результате такого перераспределения суммарная величина нагрузки, воспринимаемой обшивкой, уменьшается. Упрощенный учет этого обстоятельства в современных методах проектирования проводится путем редуцирования ширины обшивки, включающейся в работу совместно со стрингером $2c = \varphi b$, здесь $2c$ – ширина присоединённой к стрингеру обшивки (эффективная или приведенная ширина); $\varphi < 1$ – коэффициент редукации; b – исходная ширина обшивки, находящейся между стрингерами (шаг стрингеров).

Впервые такой подход был применен при конструировании кораблей [3], а формула для определения коэффициента редукации φ была получена Карманом, Зехлером и Доннелом [4]

$$\varphi = \sqrt{\frac{\sigma_{kr}}{\sigma_u}}, \quad (1)$$

где σ_{kr} – критические напряжения местной потери устойчивости обшивки;
 σ_u – напряжения в стрингере (номинальные напряжения).

В дальнейшем эта формула уточнялась авиационными инженерами Зехлером [5], Коксом [6] и Маргерром [7], что привело к следующему ее виду:

$$\varphi = \sqrt[3]{\frac{\sigma_{kr}}{\sigma_u}}. \quad (2)$$

Более точная формула для расчета коэффициента редукиции была приведена в работе [8]

$$\varphi = \left[1.2 \left(\frac{\sigma_{kr}}{\sigma_u} \right)^{0.4} - 0.65 \left(\frac{\sigma_{kr}}{\sigma_u} \right)^{0.8} + 0.45 \left(\frac{\sigma_{kr}}{\sigma_u} \right)^{1.2} \right]. \quad (3)$$

Кроме представленных выше формул существует множество других (см., например, [9 – 13]). Для сравнения получаемых ниже результатов выбраны эти три формулы, потому что (1) и (2) наиболее распространены в практике проектирования, а формула (3) считается наиболее точной. Недостатком формулы (1) является не совсем обоснованные предположения, положенные в основу ее вывода. Остальные формулы получены путем исследования закритического поведения сжатых пластин, но сами исследования проводились с использованием нелинейной теории Фёппля – Кармана, что не обосновано при значительных закритических уровнях нагрузок. Эта теория является лишь квадратичным приближением к полностью нелинейной теории, то есть при ее построении учитываются только квадраты углов поворотов, которые считаются соизмеримыми с деформациями, поэтому при больших перемещениях ее использование приводит к существенным погрешностям [14]. Нельзя не отметить важность многих экспериментальных исследований этой проблемы, но ценность полученных здесь результатов часто нивелируется погрешностями экспериментальных установок, связанными с неадекватным моделированием граничных условий [15].

1. Постановка численного эксперимента

Задача определения критических напряжений и полностью геометрически нелинейная задача исследования закритического поведения пластины решается методом конечного элемента, реализованного в Nastran [16]. Прямоугольная пластина по периметру закреплена таким образом, что перемещения из ее срединной плоскости отсутствуют. Нагрузка в виде перемещения δ прикладывается к стороне пластины 3 посредством RBE-элемента (см. рис. 1). Противоположная сторона 1 закреплена от перемещений в направлении сжатия с помощью такого же элемента. Стороны пластины 2 и 4 подкреплены балочными элементами – стрингерами. Рассмотрено два вида граничных условий по этим сторонам. В случае *A* изгибные деформации стрингеров в плоскости пластины не стеснены граничными условиями, т.е. кромки искривляются. Во втором случае (*B*), в котором более точно описывается поведение обшивки как части панели, оси стрингеров остаются прямолинейными. В случае *A* от перемещения в перпендикулярном сжатию направлении закрепляются два узла (точки 1 и 2). В случае неискривляющихся кромок в этом направлении закрепляется вся сторона 4, а равенство перемещений узлов на стороне 2 в направлении оси *y* обеспечивается RBE-элементом. Более подробно условия закрепления для обоих случаев показаны на рис. 1 и приведены в таблицах 1, 2.

Сила сжатия пластины P_{nl} определяется как реакция в ведущем узле RBE-элемента (в точках 3 или 4). Величина силы сжатия пластины в исходном состоянии равновесия определяется из решения линейной задачи

$$P_l = EF\varepsilon, \tag{4}$$

где $\varepsilon = \frac{\delta}{l}$ – однородная деформация;

E – модуль Юнга;

F, l – суммарная площадь сечения и длина панели.

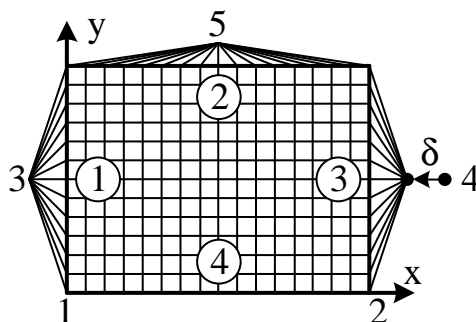


Рис. 1. Конечноэлементная модель пластины

Таблица 1
Закрепление пластины. Вариант А

	TX	TY	TZ
Сторона 1			+
Сторона 2			+
Сторона 3			+
Сторона 4			+
Точка 1		+	
Точка 2		+	
Точка 3	+		
Точка 4	+		
Сторона 1<-->Точка 3	+		
Сторона 3<-->Точка 4	+		

Таблица 2
Закрепление пластины. Вариант В

	TX	TY	TZ
Сторона 1			+
Сторона 2			+
Сторона 3			+
Сторона 4		+	+
Точка 3	+		
Точка 4	+		
Сторона 1<-->Точка 3	+		
Сторона 3<-->Точка 4	+		
Сторона 2<-->Точка 5		+	

Критическое значение величины сближения краев упруго опертой на стрингеры пластины δ_{kr} является решением бифуркационной задачи устойчивости. По этой величине определяется критическая сила сжатия

$$P_{kr} = \frac{EF\delta_{kr}}{l}. \tag{5}$$

На рис. 2 показана сходимость величины относительной сжимающей силы от количества элементов, используемых в расчете. Как можно видеть из графика, достаточную инженерную точность можно получить при использовании приблизительно 1000 элементов. В этом случае величина относительной сжимающей силы (по отношению к критическому ее значению) составляет 1,6619. Увеличение количества элементов до 4000 приводит к изменению величины силы до 1,6639, т.е.

результат уточняется на 0,12%. В дальнейшем во всех расчетах использована плотность конечно элементной сетки, соответствующая плотности сетки в данном примере с 1600 элементами.

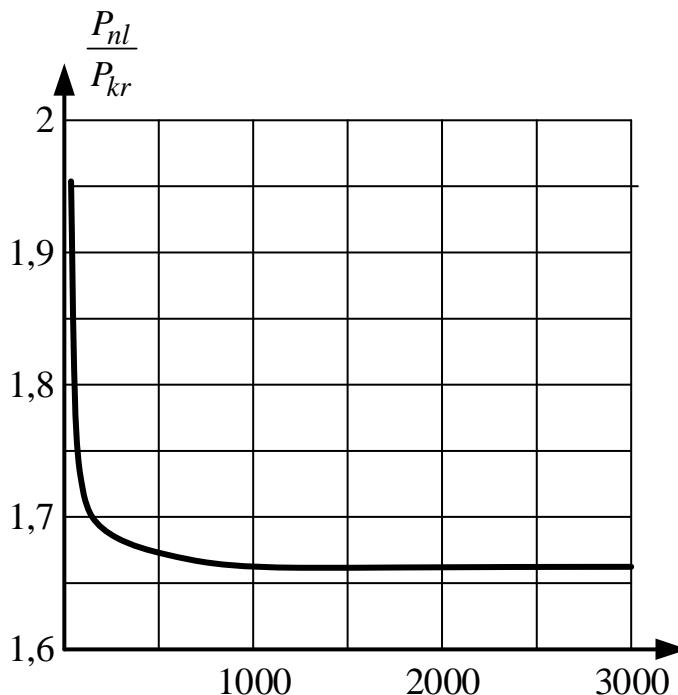


Рис. 2. Сходимость величины сжимающей силы от плотности конечно элементной сетки

2. Исследование напряженного состояния

Характерная кривая зависимости величины сжимающей силы от сближения краев пластины показана на рис. 3. Здесь величины сил и сближения краев отложены в долях от соответствующих критических значений. Начиная с момента потери устойчивости ($\bar{P}_{nl} = \bar{P}_l = \bar{\delta} = 1$), сила \bar{P}_{nl} , воспринимаемая выпученной пластиной, увеличивается гораздо медленнее, чем сила \bar{P}_l для той же пластины, но находящейся в исходной форме равновесия. С дальнейшим ростом нагрузки разница между величинами этих сил увеличивается. Именно эту особенность работы пластины, потерявшей устойчивость, должен отражать коэффициент редукции

$$\varphi = \frac{P_{nl}}{P_l}. \quad (6)$$

Заметим, что величина сжимающей силы является интегральным параметром, чего нельзя сказать о напряжениях в стрингере σ_u , которые фигурируют в формулах (1) – (3). Как показано на рис. 3 и 4, распределения относительных мембранных напряжений σ_x (по отношению к критическим σ_{kr}) сугубо неоднородны. Графики приведены для выпученного состояния пластины при величине номинальной сжимающей нагрузки, превышающей критическую в 4.6 раза. На рис. 3 показано распределение напряжений по стороне 1 и параллельной ей линии в середине пластины, на рис. 4 – по стороне 4 (вдоль стрингера) и паралл-

лельной ей линии в середине пластины. Также на этих рисунках показаны уровни средних напряжений $\bar{\sigma}_{nl} = \frac{P_{nl}}{P_{kr}} = 2.7$, напряжений в стрингере (номинальных)

$\bar{\sigma}_u = \frac{P_l}{P_{kr}} = 4.6$ и критических $\bar{\sigma}_{kr} = 1$.

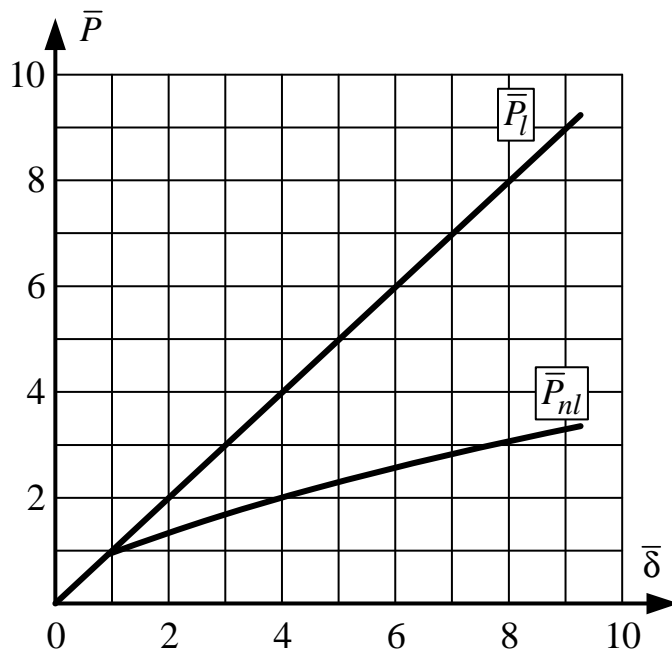


Рис. 3. График зависимости сжимающей силы от сближения краев



Рис. 4. Распределение относительных напряжений в поперечном направлении

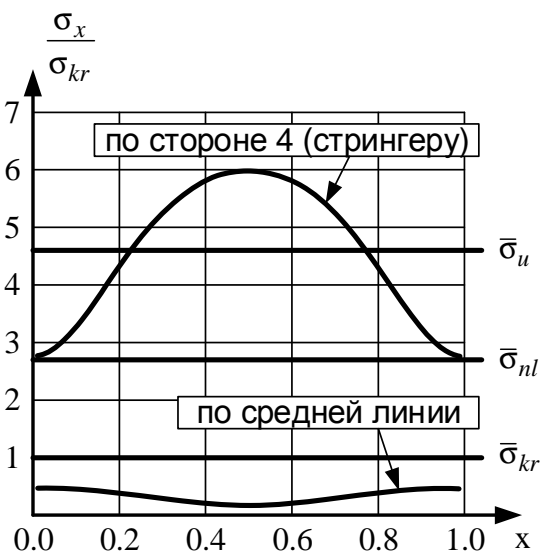


Рис. 5. Распределение относительных напряжений в продольном направлении

Как можно видеть из графиков, действительное распределение мембранных напряжений σ_x существенно отличается от распределения, приводимого в литературе (см., например, [1, 2]). Здесь наблюдается значительное уменьшение напряжений в угловых точках и увеличение напряжений в середине стрингера. Так, напряжения вдоль стрингера изменяются в диапазоне от трех критических до шести. При увеличении жесткости стрингеров эта разница несколько уменьшается, но неравномерность их распределения остается. Таким образом, возникает закономерный вопрос, какие напряжения принимать в качестве напряжений в стрингерах σ_u , которые используются в формулах (1) – (3). Кроме того, напряжения в зонах, удаленных от стрингеров, значительно меньше критических (в данном примере 0,19 – 0,48 в сравнении с 1), хотя считается, что они остаются равными критическим [1 – 4].

3. Определение коэффициента редукции

Коэффициент редукции φ вычисляется по формуле (6), в которой значение силы сжатия P_{nl} определяется в результате нелинейного расчета. На рис. 5 показана характерная зависимость коэффициента редукции от значения относительной силы сжатия $\bar{P}_l = \frac{P_l}{P_{kr}}$ для квадратной пластины без стрингеров с относительной толщиной 0,003 для случая с искривляющимися кромками.

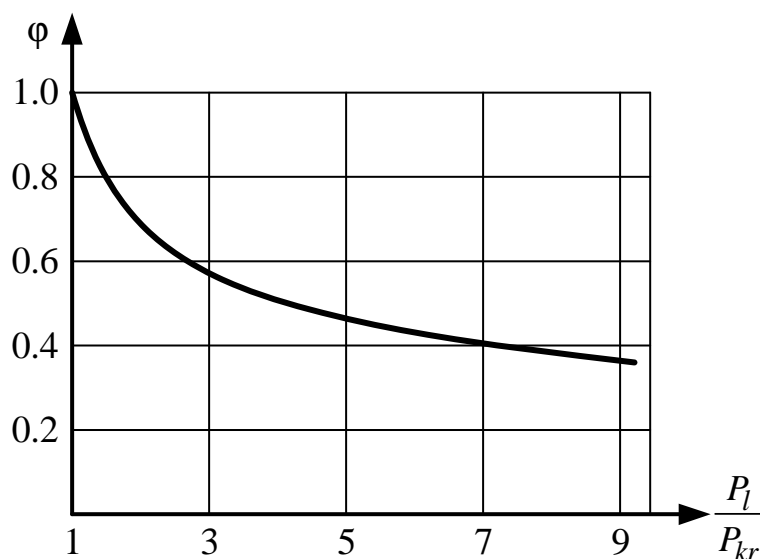


Рис. 6. Зависимость коэффициента редукции от значения относительной силы сжатия

Была проведена серия параметрических исследований с целью выяснить влияние на величину коэффициента редукции относительной толщины пластины, ее удлинения и относительных жесткостей стрингеров $\bar{EI} = \frac{EI}{Db}$, $\bar{GI}_k = \frac{GI_k}{Db}$, где

E и G – модуль продольной упругости и модуль сдвига, I и I_k – осевой момент инерции в плоскости пластины и момент инерции свободного кручения стрингера, D – цилиндрическая жесткость обшивки.

В результате проведенных исследований установлено, что изменение относительной толщины в диапазоне от 0,001 до 0,01 и изменение удлинения от 1 до 5 не влияет на вид зависимости приведенной на рис. 6. Незначительное изменение (в пределах 5%) наблюдается при изменении крутильной жесткости от нулевого значения, что соответствует свободному опиранию, до значения $\overline{EI} = \overline{GI}_k = 100$, что практически соответствует жесткому защемлению. Этот разброс значений не имеет какой-либо закономерности и связан, вероятнее всего, с погрешностями вычислений части силы, воспринимаемой обшивкой, и критической силы сжатия пластины.

Существенное влияние на величину сжимающей силы оказывают способ закрепления продольных кромок пластины и скачкообразное изменение формы равновесия: увеличение количества полуволн. Причем если в случае закрепления

A переход происходит при соотношении $\frac{\sigma_{kr}}{\sigma_u} = 13$ и мало сказывается на вели-

чине суммарной силы, то в случае B увеличение количества полуволн происходит при $\frac{\sigma_{kr}}{\sigma_u} = 3.2$ и величина сжимающей силы уменьшается существенно (см. рис. 7).

Результаты численного эксперимента были аппроксимированы приближен-

ными кривыми вида $a + b \left(\frac{\sigma_{kr}}{\sigma_u} \right)^c$, где коэффициенты a , b и c определены из

условия наименьшего квадратичного отклонения от экспериментальных данных. Окончательно для коэффициента редукции обшивки в случае искривляющихся кромок получена формула

$$\varphi = 0.85 \left(\frac{\sigma_{kr}}{\sigma_u} \right)^{0.62} + 0.15, \quad (7)$$

в случае прямых кромок –

$$\varphi = 1.11 \left(\frac{\sigma_{kr}}{\sigma_u} \right)^{0.36} - 0.11. \quad (8)$$

На рис. 7 показаны зависимости величин коэффициентов редукции, вычисленные по формулам (1) – (3), (7) и (8), а также значения, полученные в результате численного эксперимента.

При малых относительных напряжениях $\frac{\sigma_u}{\sigma_{kr}} < 4$ результаты численного эксперимента, которые соответствуют случаю A и аппроксимированы зависимостью (7), наиболее близки к значениям, полученным по формуле (1). Экспериментальные данные в случае B (формула (8)) более точно описываются формулой (3). Формула (2) дает завышенные значения коэффициента редукции.

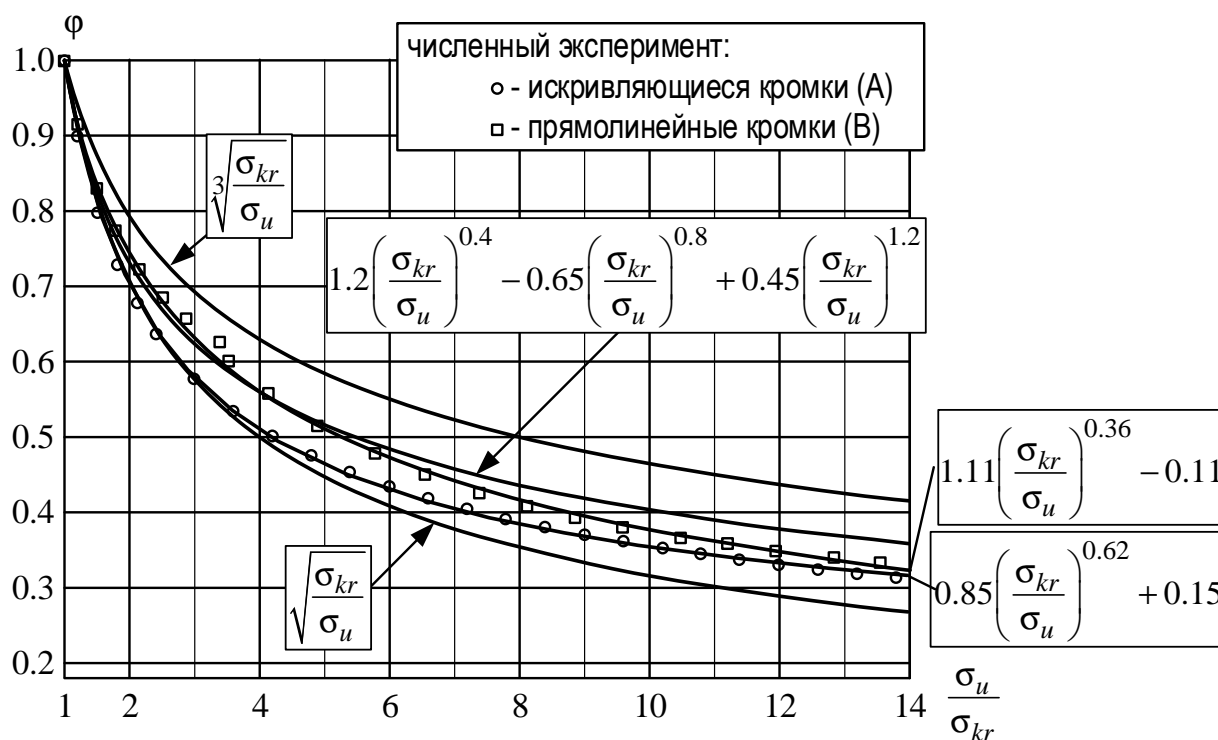


Рис. 6. Сравнение величин коэффициента редукции, получаемых по различным формулам

Выводы

В результате проведенных численных экспериментов показано незначительное влияние относительной толщины пластины, ее удлинения и жесткости ребер. Увеличение ширины присоединенной обшивки с увеличением жесткости подкрепляющих ребер учитывается повышением критических напряжений местной потери устойчивости обшивки σ_{kr} . По результатам численных экспериментов получены простые формулы для определения коэффициентов редукции ширины присоединенной обшивки в случае прямых и искривляющихся кромок. Полученные экспериментальные данные практически полностью укладываются между кривыми (1) и (3). Погрешность этих формул увеличивается с ростом номинальных напряжений. Формула (2) дает существенно завышенные результаты. При проектировании необходимо учитывать неравномерность распределения напряжений в части обшивки, непосредственно примыкающей к стрингеру.

Список литературы

1. Вольмир, А. С. Гибкие пластины и оболочки [Текст] / А.С. Вольмир. – М.: ГИТТЛ, 1956. – 419 с.
2. Brush, D. O. Buckling of Bars, Plates and Shells [Text] / D. O. Brush, B. O. Almroth. – New York: McGraw-Hill Book Company, 1975. – 379 p.
3. Faulkner, D. A Review of Effective Plating for Use in the Analysis of Stiffened Plating in Bending and Compression [Text] / D. Faulkner // Journal of Ship Research. – 1975. – Vol. 19 (1). – P. 1 – 17.

4. Karman, Th. The strength of thin plates in compression [Text]/ Th. Karman, E.E. Sechler, L.H. Donnell // ASME Applied Mechanics Transactions. – 1932. – Vol. 54. – P. 53 – 57.
5. Sechler, E. E. The Ultimate Strength of Thin Flat Sheets in Compression [Text] / E. E. Sechler // GALCIT Publication 27, Guggenheim Aeronautics Laboratory, California Institute of Technology, Pasadena, 1933. – 127 p.
6. Cox, H.L. Buckling of Thin Plates in Compression [Text] / H. L. Cox // Aeronautical Research Committee, R. & M. – 1933. – No. 1554. – P. 27 – 39.
7. Marguerre, K. Die Mittragende Dreite Desgedruckten Plattenstreifens [Text] / K. Marguerre // Luftfahrtforschung, – 1937. – Vol. 14, № 3. – P. 18 – 27.
8. Koiter, W.T. The Effective Width at Loads far in Excess of the Critical Load for Various Boundary Conditions [Text] / W. T. Koiter, NLL Report S287, Amsterdam. – 1943. – 89 p.
9. Chandra, R. Postbuckling Analysis of Rectangular Orthotropic Plates [Text] / R. Chandra, B. Raju // Int. J. Mech. Sci. – 1973. – Vol. 15. – P. 81 – 97.
10. Cox, H. L. The Buckling of a Flat Plate under Axial Compression and its Behavior after Buckling [Text] / H. L. Cox, Aeronautical Research Council, R. & M. 20201. – 1945. – 97 p.
11. Vilnay, O. A Generalized Effective Width Method for Plates Loaded in Compression [Text] / O. Vilnay, K. C. Rodney // Journal of Constructional Steel Research. – 1981. – Vol. 1, No 3. – P. 3 – 12.
12. Доннелл, Л. Г. Балки, пластины и оболочки. Пер. с англ. Под ред. Э. И. Григолюка [Текст] / Л. Г. Доннелл. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982. – 568 с.
13. Замула, Г.Н. Методика редуцирования потерявшей устойчивость обшивки при комбинированном нагружении [Тукст] / Г. Н. Замула, К. М. Иерусалимский // Ученые записки ЦАГИ. – 1989. – Том XX., № 6. – С. 71 – 82.
14. Минтюк, В. Б. Предельное состояние сжатых пластин из материала первого порядка [Текст] / В. Б. Минтюк // Авиационно-космическая техника и технология. – 2017. – № 5(140). – С. 36 – 43.
15. Singer, J. Buckling Experiments: Experimental Methods in Buckling of Thin-Walled Structures: Basic Concepts, Columns, Beams and Plates – Volume 1 / J. Singer, J. Arbocz, T. Weller. New York : John Wiley & Sons. – 1998. – 622 p.
16. MSC Nastran 2017 Quick Reference Guide [Electronic resource] / MSC Software. – Access mode: <https://simcompanion.mscsoftware.com/infocenter/index?page=content&id=DOC11146>. – 24.11.2016.

Поступила в редакцию 26.06.2018

Визначення на основі чисельного експерименту ефективної ширини обшивки, яка втратила стійкість

Зменшення сили, яка сприймається стиснутої панеллю, пов'язане з особливостями деформування обшивки після втрати стійкості. Спрощено цей факт враховується шляхом зменшення ширини обшивки, яка працює з номінальними напруженнями. Тут ефективна ширина визначається за результатами чисельного експерименту. Повністю геометрично нелінійна задача закритичної поведінки стиснутої пластини вирішується методом скінченого елемента, реалізованого в програмному забезпеченні NASTRAN. За отриманими результатами побудована емпірична за-

лежність коефіцієнта редукції від величини номінальних напружень. Показано, що його величина практично не залежить від відносної товщини, подовження і жорсткості ребер.

Ключові слова: приєднана обшивка, чисельний експеримент, геометрично нелінійна задача.

Solving the Problem about the Effective width of the Post-Buckling of Plate

Reduction of the force perceived by the compressed panel is associated with the features of deformation of the skin after the loss of stability. Simplified, this fact is taken into account by reducing the width of the sheathing working with nominal stresses. Here the effective width is determined by the results of a numerical experiment. A fully geometrically nonlinear problem of supercritical behavior of a compressed plate is solved by the finite element method realized in the NASTRAN software. Based on the results obtained, the empirical dependence of the reduction coefficient on the value of the nominal stresses is constructed. It is shown that its value is practically independent of the relative thickness, elongation and rigidity of the beam.

Keywords: effective width, numerical experiment, geometrically nonlinear problem.

Сведения об авторах:

Колодийчик Дмитрий Сергеевич – студент Национального аэрокосмического университета им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина,
e-mail: dkolod17@gmail.com.

Минтюк Виталий Борисович – канд. техн. наук, доц. кафедры прочности летательных аппаратов Национального аэрокосмического университета им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина,
e-mail: vitalii.myntiuk@khai.edu.