

Интегральные преобразования Фурье на смешанном спектре и их применение к задачам теплопроводности

Харьковский национальный экономический университет им. Семена Кузнеця
Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ»

Приведены новые обобщенные интегральные преобразования Фурье на смешанном спектре типа синус- и косинус- преобразования. На их основе получено точное решение стационарной задачи теплопроводности с учетом теплообмена в N -листной пластине книжной структуры. Все листы пластины – одинаковые полуполосы, но каждый лист составлен из двух различных кусков.

Ключевые слова: смешанный спектр, новые интегральные преобразования, пластина книжной структуры, задача теплопроводности, теплообмен со средой, точное решение.

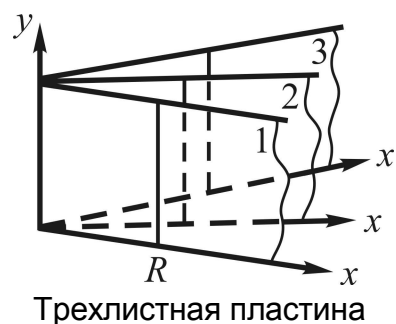
Введение

Задачи теплопроводности (стационарные и нестационарные) всегда привлекали внимание прикладных математиков, работающих в различных областях. Здесь уместно упомянуть таких ученых как Г. Карслоу, Д. Егерь, А. В. Лыков, А. А. Самарский, П. Н. Вабищев, В. Л. Рвачев и др., известных своими трудами и монографиями по методам решения задач теплопроводности. В этих работах, за небольшим исключением, изучались в основном задачи для отдельных тел, иногда кусочно-однородных.

За последние 50 лет интерес исследователей стали привлекать такие тепло-физические проблемы, в которых рассматриваются процессы распространения тепла в пластинах книжной или батарейной структуры [1, 2]. Для решения таких задач классические методы не всегда можно эффективно применить, поэтому появилась необходимость создания новых аналитических подходов и новых средств. В настоящей статье предложен метод решения задачи теплопроводности для N -листной пластины, каждый лист которой состоит из двух частей с разными материальными характеристиками. Метод основан на полученных авторами статьи новых интегральных преобразованиях типа синус- и косинус- преобразований Фурье.

1. Постановка задачи теплопроводности и сведение ее к двумерной

Рассмотрим пластину (рис.), состоящую из N одинаковых листов-полуполос (на рисунке их показано три), каждый из которых имеет кусочно-постоянные характеристики. Пластины помещены в пространство с температурой T_0 , а их боковые поверхности обмениваются температурой с окружающей средой. Задача сводится к решению уравнения теплопроводности в каждом отдельном листе:



$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \gamma(x)(T - T_0) = 0, \quad (1.1)$$

с некоторыми краевыми условиями на $y = 0$ и $y = h$ и условием $T(\infty) = 0$.

В уравнении (1.1) $\gamma(x) > 0$ – коэффициент теплообмена поверхности пластины с окружающей средой – кусочно-постоянная функция от координаты x , т. е. $\gamma(x) = \gamma_1$ при $x \in (0, R)$ и $\gamma(x) = \gamma_2$ при $x > R$.

Будем считать, что на линиях соединения отдельных кусков $x = R$ и $x = 0$ имеет место идеальный тепловой контакт. Условия сопряжения полей таковы:

$$T_k(R-0, y) = T_k(R+0, y), \quad \mu_1 \frac{\partial T_k(R-0)}{\partial x} = \mu_2 \frac{\partial T_k(R+0)}{\partial x} \quad (k = 1, 2, \dots, N); \quad (1.2)$$

$$T_k(0, y) = T_{k+1}(0, y) \quad (k = 1, 2, \dots, N-1), \quad \sum_{k=1}^N \frac{\partial T_k}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad (1.3)$$

где μ_j ($j = 1, 2$) – коэффициенты теплопроводности: μ_1 для $x \in (0, R)$ и μ_2 для $x > R$.

Заметим, что такие задачи ранее в научной литературе не рассматривались. Для своего точного разрешения они требуют новых средств. Ниже будут приведены обобщенные синус- и косинус- преобразования Фурье на смешанном спектре, что даст возможность получить точные решения этих задач.

Введем замену: $u(x, y) = T - T_0$, тогда для определения $u(x, y)$ получим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \gamma(x)u = 0 \quad (1.4)$$

с условием $u(x, y) = 0$ на бесконечности и прежними условиями сопряжения. Краевые условия на линиях $y = 0$ и $y = h$ пока оставим произвольными.

Если решать задачу методом разделения переменных и положить $u_k(x, y) = e^{\sqrt{r}y} \cdot X_k(x)$, то для $X_k(x)$ получим задачу на собственные значения:

$$X_k'' + (r - \gamma_j)X_k = 0, \quad X_k(\infty) < \infty \quad (j = 1, 2) \quad (1.5)$$

с условиями сопряжения (1.2) в точке $x = R$.

Что же касается условий (1.3), то их пока опустим и рассмотрим отдельно две задачи: а) $X_k(0) = 0$ – аналог спектральной задачи, родственной классическому синус- преобразованию Фурье; б) $X_k'(0) = 0$ – аналог косинус- преобразования Фурье. Ниже будут приведены соответствующие обобщенные преобразования Фурье.

2. Новые интегральные преобразования Фурье

Первой задачей, которую рассмотрим, будет спектральная задача:

$$z_s'' + (r - \gamma_1)z_s = 0, \quad x \in (0, R), \quad z_s'' + (r - \gamma_2)z_s = 0, \quad x > R \quad (2.1)$$

с краевыми условиями

$$z_s(0) = 0, \quad z_s(\infty) < \infty \quad (2.2)$$

и условиями сопряжения

$$z_s(R-0) = z_s(R+0), \quad z'_s(R-0) = \mu \cdot z'_s(R+0). \quad (2.3)$$

Собственные функции этой задачи вещественные, спектр ее при $\gamma_1 > \gamma_2$ непрерывный. Интегральное преобразование по собственным функциям такой задачи получено в [3]. Если $\gamma_2 > \gamma_1$, то спектр задачи – смешанный. Дискретная его часть – $r_n \in (\gamma_1, \gamma_2)$, где r_n – корни уравнения:

$$\mu \cdot \operatorname{tg}(R\sqrt{R-\gamma_1}) = -\sqrt{\frac{r-\gamma_1}{\gamma_2-r}}. \quad (2.4)$$

Собственные функции для этих собственных значений:

$$\tilde{z}_s(x, r_n) = \begin{cases} \sin\sqrt{r_n-\gamma_1}x, & x \in (0, R), \\ \sin\sqrt{r_n-\gamma_1}R \cdot e^{-\sqrt{\gamma_2-r_n}(x-R)}, & x > R. \end{cases} \quad (2.5)$$

Для непрерывной части спектра ($r > \gamma_2$) собственные функции имеют вид

$$z_s(x, r) = \begin{cases} \sin\sqrt{r-\gamma_1}x, & x \in (0, R), \\ a(r)\sin\sqrt{r-\gamma_2}(x-R) + b(r)\cos\sqrt{r-\gamma_2}(x-R), & x > R, \end{cases} \quad (2.6)$$

где $a(r) = \mu^{-1} \sqrt{\frac{r-\gamma_1}{r-\gamma_2}} \cos R\sqrt{r-\gamma_1}$, $b(r) = \sin R\sqrt{r-\gamma_1}$.

Интегральное разложение произвольной функции $f(x)$ по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля (Ш.–Л.) (2.1) – (2.3) строим операционным методом [4]. Опуская громоздкие стандартные вычисления, выпишем окончательные формулы:

$$f(x) = \frac{\mu}{\pi} \int_{\gamma_2}^{\infty} \frac{z_s(x, r)}{\omega_1(r)} \bar{f}(r) dr + \sum_{n=1}^K \frac{a_n}{h_1(r_n)} \tilde{z}_s(x, r_n) \quad (x > 0), \quad (2.7)$$

где K – число корней уравнения (2.4) из (γ_1, γ_2) , $\rho(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, R), \\ \mu, & R > 0, \end{cases}$

$$\bar{f}(r) = \int_0^{\infty} f(\xi) \rho(\xi) z_s(\xi, r) d\xi, \quad a_n = \int_0^{\infty} f(\xi) \rho(\xi) z_s(\xi, r_n) d\xi; \quad (2.8)$$

$$\omega_1(r) = \mu^2 \sqrt{r-\gamma_2} \cdot b^2(r) + \frac{r-\gamma_1}{\sqrt{r-\gamma_2}} \cos^2 R\sqrt{r-\gamma_1}, \quad h_1(r_n) = h(r_n) b(r_n); \quad (2.9)$$

$$h(r_n) = \frac{R}{2} \left[\left(\frac{\mu}{R\sqrt{\gamma_2-r_n}} + 1 \right) b(r_n) - \frac{\mu \cdot R\sqrt{\gamma_2-r_n} + 1}{R\sqrt{r_n-\gamma_1}} \cos R\sqrt{r_n-\gamma_1} \right].$$

Формулы (2.7), (2.8) будем рассматривать как прямое и обратное обобщенное преобразование Фурье типа синус-преобразования.

Теперь исследуем случай, когда первое из условий (2.2) заменяется условием $z'_c(0) = 0$, где через $z_c(x, r)$ обозначено решение задачи Ш.–Л. типа косину-

са. В этом случае, как и в рассмотренном выше, при $\gamma_1 > \gamma_2$ спектр задачи непрерывный, и соответствующее интегральное преобразование приведено в [3].

В случае $\gamma_2 > \gamma_1$ спектр задачи Ш.-Л. смешанный, его дискретная часть – простые корни уравнения

$$tgR\sqrt{r-\gamma_1} = \mu \sqrt{\frac{\gamma_2-r}{r-\gamma_1}}, \quad r \in (\gamma_1, \gamma_2), \quad (2.10)$$

а собственные функции для этих собственных значений имеют вид

$$\tilde{z}_c(x, \lambda_n) = \begin{cases} \frac{\cos \sqrt{\lambda_n - \gamma_1} x}{\cos R \sqrt{\lambda_n - \gamma_1}}, & x \in (0, R), \\ e^{-\sqrt{\gamma_2 - \lambda_n} (x-R)}, & x > R, \end{cases} \quad (2.11)$$

где λ_n – корни уравнения (2.10).

Для непрерывной части спектра ($r > \gamma_2$) имеем собственные функции

$$z_c(x, r) = \begin{cases} \cos \sqrt{r - \gamma_1} x, & x \in (0, R), \\ c(r) \cos \sqrt{r - \gamma_2} (x - R) + d(r) \sin \sqrt{r - \gamma_2} (x - R), & x > R, \end{cases} \quad (2.12)$$

$$c(r) = \cos R \sqrt{r - \gamma_1}, \quad d(r) = -\mu^{-1} \sqrt{\frac{r - \gamma_1}{r - \gamma_2}} \sin R \sqrt{r - \gamma_1}.$$

Интегральное разложение на основе собственных функций (2.11), (2.12) получим тем же методом, что и раньше. Оно имеет вид

$$f(x) = \frac{\mu}{\pi} \int_{\gamma_2}^{\infty} \frac{\sqrt{r - \gamma_2}}{\omega_2(r)} z_c(x, r) \tilde{f}(r) dr + \sum_{n=1}^{K_1} \frac{e_n}{h_2(\lambda_n)} \tilde{z}_c(x, \lambda_n) \quad (x > 0), \quad (2.13)$$

где K_1 – число корней уравнения (2.10),

$$\tilde{f}(r) = \int_0^{\infty} f(\xi) \rho(\xi) z_c(\xi, r) d\xi, \quad e_n = \int_0^{\infty} f(\xi) \rho(\xi) \tilde{z}_c(\xi, \lambda_n) d\xi; \quad (2.14)$$

$$h_2(\lambda_n) = h_0(\lambda_n) c^{-1}(\lambda_n), \quad \omega_2(r) = (r - \gamma_1) b^2(r) + \mu^2 (r - \gamma_2) c^2(r); \quad (2.15)$$

$$h_0(\lambda_n) = \frac{R}{2} \left[\left(\frac{\mu}{R \sqrt{\gamma_2 - \lambda_n}} + 1 \right) c(\lambda_n) + \left(\mu \sqrt{\frac{\gamma_2 - \lambda_n}{\lambda_n - \gamma_1}} + \frac{1}{R \sqrt{\lambda_n - \gamma_1}} \right) b(\lambda_n) \right]. \quad (2.16)$$

Равенства (2.13), (2.14) следует рассматривать как прямое и обратное обобщенные преобразование Фурье типа косинус- преобразования. Класс функций, для которого справедливы приведенные выше интегральные разложения, тот же, что и в теории классического преобразования Фурье. Значение правой части в формулах (2.7), (2.13) в точке сопряжения равно $(1 + \mu)^{-1} (f(R - 0) + f(R + 0))$, в остальных точках $x \in (0, +\infty)$ оно есть $\frac{1}{2} (f(x - 0) + f(x + 0))$. При $\mu = 1$,

$\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ найденные преобразования переходят соответственно в синус- и косинус- преобразования Фурье.

3. Решение задачи стационарной теплопроводности

Прежде всего определимся с краевыми условиями на линиях $y = 0$ и $y = h$. Ими могут быть условия первого, второго или третьего рода или всевозможные их комбинации. Остановимся на краевых условиях:

$$u_k(x, 0) = \varphi_k(x), \quad u'_{ky}(x, h) = \psi_k(x), \quad x > 0, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (3.1)$$

Относительно функций $\varphi_k(x)$ и $\psi_k(x)$ предположим, что они разлагаются в интеграл Фурье и что $\gamma_2 > \gamma_1$.

Решение уравнения теплопроводности (1.4) представим в виде

$$\begin{aligned} u_k(x, y) = & \int_{\gamma_2}^{\infty} z_s(x, r) [A_k(r)sh\sqrt{r}y + B_k(r)ch\sqrt{r}(y-h)] dr + \sum_{n=1}^K \tilde{z}_s(x, r_n) \times \\ & \times [\alpha_n^{(k)}sh\sqrt{r_n}y + \beta_n^{(k)}ch\sqrt{r_n}(y-h)] + \int_{\gamma_2}^{\infty} z_c(x, r) [C(r)sh\sqrt{r}y + D(r)ch\sqrt{r}(y-h)] dr + \\ & + \sum_{n=1}^{K_1} \tilde{z}_c(x, \lambda_n) [\delta_n sh\sqrt{\lambda_n}y + k_n ch\sqrt{\lambda_n}(y-h)], \end{aligned} \quad (3.2)$$

где K и K_1 – число корней уравнений (2.4) и (2.10) соответственно. Заметим, что в формулах для собственных функций и в формулах обращения коэффициент $\mu = \mu_2 \cdot \mu_1^{-1}$.

Функции $A_k(r)$, $B_k(r)$, $C(r)$, $D(r)$ и коэффициенты α_n^k , β_n^k , δ_n , k_n , входящие в (3.2), следует определить из краевых условий задачи (3.1) и условий сопряжения листов пластины на линии $x = 0$, т.е. из условий (1.3).

На линии $x = 0$ функции $z_s(0, r) = \tilde{z}_s(0, r_n) = 0$, а $z_c(0, r_n) = 1$, $\tilde{z}_c(0, \lambda_n) = c^{-1}(\lambda_n)$, поэтому условие $u_k(0, y) = u_{k+1}(0, y)$, вытекающее из (1.3), выполняется автоматически для $0 \leq y \leq h$.

Для удовлетворения второго условия из (1.3) учтем, что $z'_c(0, r) = \tilde{z}'_c(0, \lambda_n) = 0$ и наложим на неизвестные величины связи

$$\sum_{k=1}^N A_k(r) = \sum_{k=1}^N B_k(r) = \sum_{k=1}^N \alpha_n^{(k)} = \sum_{k=1}^N \beta_n^{(k)} = 0. \quad (3.3)$$

Положим в (3.2) $y = 0$, в результате чего найдем

$$\int_{\gamma_2}^{\infty} z_s(x, r) B_k(r) \cdot ch\sqrt{r}h dr + \sum_{n=1}^K \beta_n^{(k)} ch\sqrt{r}h \cdot \tilde{z}_s(x, r_n) + \sum_{n=1}^{K_1} k_n ch\sqrt{\lambda_n}h \cdot \tilde{z}_c(x, \lambda_n) +$$

$$+ \int_{\gamma_2}^{\infty} z_c(x, r) D(r) \cdot ch\sqrt{r} h dr = \varphi_k(x), \quad x > 0, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (3.4)$$

Просуммируем равенства (3.4) по их числу и учтем связи (3.3). Эта операция приведет к равенству

$$\int_{\gamma_2}^{\infty} z_c(x, r) D(r) ch\sqrt{r} h dr + \sum_{n=1}^{K_1} k_n ch\sqrt{\lambda_n} h \cdot \tilde{z}_c(x, \lambda_n) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi_k(x), \quad x > 0. \quad (3.5)$$

Если рассматривать равенство (3.5) как аналог косинус- преобразования, то можно воспользоваться формулами обращения (2.14), согласно которым получим

$$D(r) ch\sqrt{r} h = \frac{\mu \sqrt{r - \gamma_2}}{\pi \omega_2(r)} \int_0^{\infty} F(\xi) \rho(\xi) z_c(\xi, r) d\xi; \quad F(r) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi_k(x); \quad (3.6)$$

$$k_n ch\sqrt{\lambda_n} h = h_2^{-1}(\lambda_n) \int_0^{\infty} F(\xi) \rho(\xi) \tilde{z}_c(\xi, \lambda_n) d\xi.$$

Далее из (3.4), (3.5) с учетом того, что $D(r)$ и k_n известны, находим

$$\int_{\gamma_2}^{\infty} B_k(r) ch\sqrt{r} h \cdot z_s(x, r) dr + \sum_{n=1}^K \beta_n^{(k)} ch\sqrt{r_n} h \cdot \tilde{z}_s(x, r_n) = \varphi_k(x) - F(x), \quad x > 0.$$

Последнее равенство обращаем по формулам (2.8) и получаем искомые величины:

$$B_k(r) ch\sqrt{r} h = \frac{\mu}{\pi \omega_1(r)} \int_0^{\infty} F_k(\xi) \rho(\xi) \cdot z_s(\xi, r) d\xi; \quad (3.7)$$

$$\beta_n^{(k)} \cdot ch\sqrt{r_n} h = h_1^{-1}(r_n) \int_0^{\infty} F_k(\xi) \rho(\xi) \tilde{z}_s(\xi, r_n) d\xi, \quad F_k(x) = \varphi_k(x) - F(x). \quad (3.8)$$

Оставшиеся неизвестные величины определим из второго условия (3.1). Для этого вычислим $u'_{ky}(x, h)$ и приравняем к $\psi_k(x)$. После чего найдем

$$\int_{\gamma_2}^{\infty} z_s(x, r) A_k(r) \sqrt{r} \cdot ch\sqrt{r} h dr + \sum_{n=1}^K \tilde{z}_s(x, r_n) \sqrt{r_n} \alpha_n^{(k)} ch\sqrt{r_n} h + \\ + \sum_{n=1}^{K_1} \tilde{z}_c \sqrt{\lambda_n} \delta_n ch\sqrt{\lambda_n} h + \int_{\gamma_2}^{\infty} z_c(x, r) \sqrt{r} C(r) ch\sqrt{r} h dr = \psi_k(x), \quad x > 0. \quad (3.9)$$

Просуммируем равенства (3.9) по k и учтем связи (3.3), в итоге получим ри уравнение

$$\sum_{n=1}^{K_1} \tilde{z}_c \sqrt{\lambda_n} \delta_n ch\sqrt{\lambda_n} h + \int_{\gamma_2}^{\infty} z_c(x, r) \sqrt{r} C(r) ch\sqrt{r} h dr = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \psi_k(x), \quad x > 0. \quad (3.10)$$

Обращаем (3.10) с помощью формул (2.14):

$$\sqrt{r}C(r)ch\sqrt{rh} = \frac{\mu\sqrt{r-\gamma_2}}{\pi\omega_2(r)} \int_0^{\infty} \Phi(\xi)\rho(\xi)z_c(\xi,r)d\xi; \quad (3.11)$$

$$\sqrt{\lambda_n}\delta_nch\sqrt{\lambda_n}h = h_2^{-1}(\lambda_n) \int_0^{\infty} \Phi(\xi)\rho(\xi)\tilde{z}_c(\xi,\lambda_n)d\xi, \quad \Phi(x) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \psi_k(x). \quad (3.12)$$

Неизвестные $A_k(r)$ и $\alpha_n^{(k)}$ определим из равенства

$$\int_{\gamma_2}^{\infty} z_s(x,r)A_k(r)\sqrt{r} \cdot ch\sqrt{rh}dr + \sum_{n=1}^K \tilde{z}_s(x,r_n)\sqrt{r_n}\alpha_n^{(k)}ch\sqrt{r_n}h = \psi_k(x) - \Phi(x),$$

которое вытекает из уравнений (3.9), (3.10).

Последнюю формулу следует рассматривать как обобщенное синус- преобразование Фурье (2.7), (2.8).

По формулам обращения найдем

$$A_k(r)\sqrt{r}ch\sqrt{rh} = \frac{\mu}{\pi\omega_1(r)} \int_0^{\infty} \Phi_k(\xi)\rho(\xi)z_s(\xi,r)d\xi, \quad \Phi_k(x) = \psi_k(x) - \Phi(x); \quad (3.13)$$

$$\alpha_n^{(k)}\sqrt{r}ch\sqrt{rh} = h_1^{-1}(r_n) \int_0^{\infty} \Phi_k(\xi)\rho(\xi)\tilde{z}_s(\xi,r_n)d\xi. \quad (3.14)$$

В результате получили точное решение стационарной задачи теплопроводности. При других краевых условиях на горизонтальных границах решение находится аналогично. Следует подчеркнуть, что эти точные решения удалось получить, благодаря новым интегральным преобразованиям.

Выводы

1. Приведены новые обобщенные интегральные преобразования Фурье на смешанном спектре типа синус- и косинус- преобразований. Установлен класс функций, для которого справедливы эти преобразования.

2. Получено точное решение стационарной задачи теплопроводности в многолистной пластине, составленной из кусочно-однородных полуполос с учетом теплообмена с окружающей средой.

3. Предложенный метод можно использовать для решения нестационарной задачи с начальным условием для той же пластины и задачи с источниками тепла.

Список литературы

1. Рвачев, В. Л. Расчет температурного поля нагретой зоны сложной формы, состоящей из шасси и смонтированных на нем деталей [Текст] / В. Л. Рвачев, А. П. Слесаренко, В. Ф. Кравченко, В. К. Богородский // Теплофизика высоких температур. – 1972. – Т. 10, №2. – С. 239 – 242.

2. Дульнев, Г. Н. Теплообмен в радиоэлектронных аппаратах [Текст] / Г. Н. Дульнев, Э. М. Семьяшкин. – Л.: Энергия, 1968. – 359 с.

3. Проценко, В. С. Обобщенное интегральное преобразование Фурье на смешанном спектре и некоторые его приложения [Текст] / В. С. Проценко, Т. В.

Денисова // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н. Е. Жуковского «ХАИ». – Вып. 63. – Х., 2014. – С. 170 – 175.

4. Уфлянд, Я. С. О некоторых новых интегральных преобразованиях и их приложениях к задачам математической физики [Текст] / Я. С. Уфлянд // Вопросы математической физики. – Л.: Наука, 1976. – С. 93 – 106.

Поступила в редакцию 04.09.2015

Інтегральні перетворення Фур'є на змішаному спектрі та їх застосування до задач теплопровідності

Наведено нові узагальнені інтегральні перетворення Фур'є на змішаному спектрі типу синус- і косинус- перетворення. На цій основі отримано точний розв'язок стаціонарної задачі теплопровідності з урахуванням теплообміну в N -листовій пластині книжкової структури. Всі листи пластини – однакові півсмуги, проте кожен лист складено з двох різних кусків.

Ключові слова: змішаний спектр, нові узагальнені перетворення, пластина книжкової структури, задача теплопровідності, теплообмін з середовищем, точне розв'язання.

Integral Fourier transforms on the mixed spectrum and their application to the heat conductivity problems

A new generalized integral Fourier transforms on the mixed spectrum of the type of sine and cosine transform are given. On their basis the exact solution of the stationary heat conductivity problem considering of heat exchange for N -sheeted book structure plate is obtained. All sheets of the plate – the same half-strips, but each sheet is composed of two different pieces.

Keywords: mixed spectrum, a new integral transforms, book structure plate, heat conductivity problem, heat exchange with the environment, exact solution.