

УДК

Н.Ю. Дихтяр, Я.С. Мовсесян,  
В.Е. Саваневич, А. Б. Брюховецкий

## **«Метод отождествления астрономических измерений ССD-кадра с формулярами звездного каталога»**

*Харьковский национальный университет радиоэлектроники*

Разработан метод отождествления измерений кадра с формулярами звездного каталога. Этот метод заключается в решении задачи нахождения попарного соответствия между совокупностью сформированных на кадре измерений и множеством объектов звездного каталога, принадлежащих той же области небесной сферы, что и сформированный кадр. Задача отождествления сведена к задаче о назначениях, которая решается венгерским методом.

**Ключевые слова:** ССD -кадр, измерение кадра, формуляр каталога, отождествление, средний риск, метод максимального правдоподобия, венгерский метод.

### **Введение**

В настоящее время наблюдение небесных объектов осуществляется с помощью телескопов, оснащенных специальными астрономическими ССD - камерами, которые при наблюдении определенного участка небесной сферы формируют серии ССD -кадров [1, 2]. Во время обработки исследуемого ССD -кадра проводится обнаружение объектов. Результаты данной обработки по каждому из объектов представляются в виде измерений, содержащих их координаты. Сведения об известных небесных объектах находятся в звездных каталогах [3, 4, 5, 6], в которых, данные о каждом таком объекте сведены в отдельном формуляре.

Статья посвящается разработке метода отождествления измерений кадров с существующими формулярами каталога для его применения в программном обеспечении автоматического поиска астероидов и комет на серии ССD -кадров CoLiTec.

### **Анализ литературы**

Известные методы решения задачи отождествления измерений кадра и формуляров каталога объектов можно разделить на стробовые и бесстробовые, байесовские и небайесовские, с последовательным и параллельным поступлением данных.

Простейший метод заключается в разбиении задачи на последовательно решаемые подзадачи классификации измерений в стробах формуляров каталога с целью выбора одного из них независимо, в каждом стробе, для подтверждения объекта каталога. Данный метод назван стробовым. В его рамках [7] для каждого измерения, попавшего в строб формуляра каталога, вычисляется коэффициент правдоподобия его принадлежности к объекту каталога и для подтверждения объекта выбирается то из них, для которого этот коэффициент принимает максимальное значение. При использовании в качестве меры правдоподобия статистического расстояния между измерением кадра и объектом каталога (центром строба) для подтверждения объекта выбирается ближайшее к центру строба измерение (принцип «ближайшего соседа» [8, 9, 10]).

Стробовый метод является методом с последовательным поступлением данных: на обработку измерения поступают по одному.

Стробовый метод отождествления измерений кадра с формулярами каталога целесообразно использовать при большом SNR изображений объектов, соответствующих измерениям кадра, высоких порогах формирования измерений,

малом количестве ложных измерений и больших угловых расстояниях между объектами.

В противном случае показатели качества принимаемых с его использованием решений существенно снижаются и зачастую не устраивают потребителя. Связано это как с тем, что данный метод часто приводит к перепутыванию измерений в строках, так и с быстрым ростом его трудоемкости при увеличении количества измерений. Теоретическому развитию метода препятствует принципиальная невозможность введения в его рамках выражения для апостериорного среднего риска. В связи с этим стробовый метод относят к классу небайесовских.

Известен метод перебора гипотез о сочетании измерений кадра и формуляров каталога с учетом их пропуска и наличия ложных [7, 11, 12]. При этом не существует методов, которые бы давали решения с лучшими в среднем показателями качества при использовании любого критерия байесовской группы.

Этот метод является методом с параллельным поступлением всех измерений. Он основан на формировании всех гипотез о сочетании пар измерение кадра – формуляр каталога. Каждая такая гипотеза включает в себя гипотезы об отнесении каждого сформированного измерения к одному из объектов каталога или к ложному измерению. Гипотеза с наибольшим весом (максимальное значение функции правдоподобия, апостериорной вероятности и т. д.) признается истинной и выдается потребителю.

В рамках метода перебора гипотез о сочетании пар измерение кадра – формуляр каталога легко учитывается факт формирования от одного объекта на одном кадре не более одного измерения, факт пропуска измерения, факт неразрешения, т.е. формирования по нескольким близким объектам одного измерения (хотя это существенно увеличивает количество рассматриваемых гипотез [7]) и т.д.

Однако данный метод предписывает к рассмотрению огромное количество гипотез. Поэтому поиск наилучшей гипотезы о сочетании пар измерение кадра – формуляр каталога глобальным перебором вариантов принципиально нереализуем. В работе для решения поставленной задачи будет использован аппарат задачи о назначениях [13].

#### **Постановка задачи отождествления измерений кадра и формуляров каталога**

Изображение звезд формируется в фокальной плоскости телескопа, результатом чего является CCD -кадр [1, 2]. В процессе внутрикадровой обработки исследуемого кадра телескопа проведено обнаружение-измерение изображения объектов. Результаты данной обработки по одному объекту одного кадра представляются в виде измерения  $Y_{it}$  ( $i$ -е измерение  $t$ -го кадра) – совокупность оценок параметров выделенного изображения от объекта. Измерения содержат координаты  $\chi_{it}$ . Кроме того в состав измерения может входить яркость объекта  $A_{it}$ . Иными словами,  $Y_{it} = \{ A_{it}; \chi_{it} \}$ , где  $\chi_{it} = \{ x_{it}; y_{it} \}$  – координаты  $i$ -го измерения  $t$ -го кадра.

Оценки координат каждого объекта на кадре проводились независимо. Области кадра, в которых проводились оценки не пересекались.

В области небесной сферы, которой соответствует исследуемый кадр, находится  $Q_{sky}$  небесных объектов, доступных измерению с помощью используемых телескопа и сценария наблюдения. Сведения об известных небесных объектах содержатся в звездных каталогах. Используемый при классификации (отожде-

ствлении) кадра звездный каталог называется опорным звездным каталогом [3, 4, 5, 6]. Данные о каждом каталогизированном небесном объекте звездного каталога организационно сведены в формуляры. Считается, что формуляр каталога – это совокупность «каталожных» оценок параметров видимого движения небесного объекта:

$$\hat{\Theta}_{catjn} = \{ \hat{\theta}_{j1}, \hat{\theta}_{j2}, \dots, \hat{\theta}_{jM} \}, \quad (1)$$

где  $\hat{\theta}_{j\mu}$  – оценка  $\mu$ -го параметра видимого движения  $j$ -го небесного объекта.

При проведении отождествления [14, 15, 16] необходимо найти попарное соответствие между совокупностью сформированных на кадре измерений и множеством объектов звездного каталога, принадлежащих той же области небесной сферы, что и сформированный кадр. Иными словами, под отождествлением измерения кадра и формуляров звездного каталога понимают установление взаимно однозначного соответствия между измерением и формуляром звездного каталога, т. е. установление тождественности сведений, содержащихся в измерении и данном формуляре. Это означает, что сведения некоторого измерения и формуляра соответствуют одному и тому же небесному объекту.

В звездном каталоге не содержится информация обо всех небесных объектах, особенно часто отсутствуют данные об объектах со слабым блеском [3, 4, 5, 6]. Объекты, не вошедшие в каталог, называются некаталогизированными. Считается, что кадру соответствует  $Q_{nocat}$  некаталогизированных и  $Q_{cat}$  каталогизированных объектов.

Можно считать, что параметры некаталогизированных объектов распределены равномерно:

$$f_0(\mathbf{I}) = \prod_{m=1}^{N_{fN}} (u_{max\ m} - u_{min\ m})^{-1}, \quad (2)$$

где  $u_{min\ m}$ ,  $u_{max\ m}$  – соответственно минимальное и максимальное значение  $m$ -го параметра видимого движения;

$N_{fN}$  – количество параметров видимого движения.

При этом параметры измерений объектов, не попавших в каталог, также будут иметь равномерное распределение. Множество возможных значений параметров измерений одного небесного объекта образует пространство измерений (ПИ) одного небесного объекта. Множество возможных решений образует пространство решений (ПР)  $U_{sol\_space}$ , которое состоит из элементов  $u_{itjn} \in U_{sol\_space}$ ,  $k = \overline{0, Q_{sky}}$ , где  $u_{itjn}$  – решение о справедливости гипотезы  $H_{itjn}$  о принадлежности  $i$ -го измерения  $t$ -го кадра к  $j$ -му формуляру  $n$ -го каталога, с оценками параметров  $\hat{\Theta}_{catjn}$ .

Предполагается, что может быть введена вероятность формирования измерения при попадании небесного объекта в кадр телескопа. При этом априорные вероятности формирования измерений  $j$ -го объекта определяются только частотой просмотра соответствующего участка неба. В результате можно и удобно считать равновероятными априорные вероятности получения измерений от любых объектов звездного каталога, блеск которых не ниже проникающей телескопа.

При наличии информации только о небесных объектах из звездного каталога нет необходимости предъявлять какие-то требования к вероятности перепутывания измерений между некаталогизированными объектами, информация о которых не содержится в звездном каталоге. Все некаталогизированные объекты можно свести в так называемый нулевой объект. С другой стороны, перепутывание измерений между небесными объектами из звездного каталога приводит к потере точности определения положения исследуемых объектов, например астероидов. Предполагается, что все небесные объекты звездного каталога одинаково важны, а требования по вероятности перепутывания измерений между любыми двумя небесными объектами звездного каталога должны быть одинаковыми.

### Введение матрицы потерь

Условий описанных выше достаточно для введения матрицы потерь [17, 18, 19, 20]. Элементами матрицы  $\Pi_{loss}$  являются платы за причисление рассматриваемого измерения кадра к формуляру каталога. При этом  $jk$ -й элемент  $\Pi_{jk}$  является платой за причисление рассматриваемого измерения к  $k$ -му объекту при условии, что оно в действительности принадлежит  $j$ -му. Матрица потерь квадратная и состоит из  $(Q_{ncat} + 1) \times (Q_{cat} + 1)$  элементов. Строки матрицы соответствуют измерениям, а столбцы – объектам каталога. По главной диагонали расположены платы за правильные решения ( $j = k$ ). Элементы, которые расположены не на главной диагонали, соответствуют платам за ошибочные решения.

Наличие некаталогизированных объектов заставляет добавить справа столбец и снизу строку к простой матрице потерь, в которых выставлены платы за причисление измерения от некаталогизированного объекта каталогизированному и наоборот. Нет причин делать данные платы различными для различных объектов. Если бы некаталогизированные объекты отсутствовали, то достаточно было бы использовать простую матрицу потерь, состоящую из  $Q_{cat} \times Q_{cat}$  элементов.

Таким образом, используемая матрица потерь имеет следующий вид:

$$P_{loss} = \begin{pmatrix} 0 & P_{12} & \dots & P_{pr} \\ P_{21} & 0 & \dots & P_{pr} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{pr} & P_{pr} & \dots & 0 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Диагональные элементы равны нулю. Последние элементы строк и столбцов, кроме диагонального, равны некоей константе  $\Pi_{pr}$ . Данная константа является, с одной стороны, платой за отнесение измерения от  $j$ -го объекта к некаталогизированному объекту, с другой стороны, платой за причисление измерения некаталогизированного объекта  $k$ -му объекту каталога.

### Модель ошибок оценок параметров видимого движения

Ошибки оценок параметров видимого движения  $j$ -го небесного объекта, содержащиеся в  $j$ -м формуляре звездного каталога, можно назвать ошибками каталога. Распределение данных ошибок не противоречит нормальному закону с нулевыми математическими ожиданиями и корреляционной матрицей [21, 22, 23, 24, 25]  $Y_{catj}$ :

$$N_{\Theta_j}(\hat{\Theta}_{catj}, \Sigma_{catj}) = \frac{1}{(2\pi)^{N_{fn}/2} |\Sigma_{catj}|^{1/2}} \times \exp\left[-\frac{1}{2}(\Theta_{jn} - \hat{\Theta}_{catjn})^T \times \Sigma_{catjn}^{-1}(\Theta_{jn} - \hat{\Theta}_{catjn})\right], \quad (4)$$

где  $\mathbf{I}_{jn}$  – истинные параметры видимого движения небесного объекта, соответствующего  $j$ -му формуляру  $n$ -го звездного каталога.

Матрица  $\mathbf{Y}_{catjn}$  – диагональная, на ее главной диагонали находятся дисперсии  $y_{catjnm}^2$  оценок параметров видимого движения.

Распределение ошибок измерения параметров  $j$ -го небесного объекта не противоречит нормальному закону с нулевыми средними и корреляционной матрицей  $\mathbf{Y}_{frameit}$  [21, 23, 24, 25]:

$$N_{S[\mathbf{Y}_{it}]}(\mathbf{I}_{jn}, \mathbf{Y}_{frameit}) = \frac{1}{(2\pi)^{N_{fn}/2} |\mathbf{Y}_{frameit}|^{1/2}} \times \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{Y}_{it} - S[D_{\tau_t}[\mathbf{I}_{jn}]])^T \times \mathbf{Y}_{frameit}^{-1}(\mathbf{Y}_{it} - S[D_{\tau_t}[\mathbf{I}_{jn}]])\right], \quad (5)$$

где  $S[\cdot]$  – оператор пересчета измерений в систему координат, привязанную к формируемому кадру телескопа, расположенную в его картинной плоскости с центром в оптическом центре оптической системы телескопа;

$D_{\tau_t}[\Theta_j]$  – оператор прогноза положения небесного объекта с параметрами видимого движения  $\Theta_j$  на время привязки  $t$ -го кадра  $\tau_t$ .

Не сложно показать, что плотность распределения параметров измерения  $\mathbf{Y}_{it}$  от  $j$ -го небесного объекта при оценке параметров его видимого движения в каталоге  $\hat{\Theta}_{catj}$  определяется выражением

$$N_{S[\mathbf{Y}_{it}]}(\hat{\Theta}_{catjn}, \Sigma_{itjn(k)}) = \frac{1}{(2\pi)^{N_{fn}/2} (\Sigma_{itjn(k)})^{1/2}} \times \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{Y}_{it} - S[D_{\tau_t}[\mathbf{I}_{jn}]])^T \cdot (\mathbf{Y}_{jit(k)})^{-1}(\mathbf{Y}_{it} - S[D_{\tau_t}[\mathbf{I}_{jn}]])\right] \quad (6)$$

где  $\Sigma_{jit(k)} = \mathbf{Y}_{catjn} + \mathbf{Y}_{frameit}$  – суммарная корреляционная матрица ошибок параметров  $i$ -го измерения  $t$ -го кадра по объекту, соответствующему  $j$ -му формуляру  $n$  каталога и  $k$ -й отождествленной паре «измерение-формуляр».

В работе считается, что параметры различных измерений независимы между собой, как и независимы между собой параметры формуляров используемого звездного каталога. Это со значимой для практики точностью соответствует истине и позволяет получить простое с точки зрения практической реализации техническое решение с приемлемыми показателями качества принимаемых решений. При этом статистическое описание параметров подмножества формуляров звездного каталога соответствующих кадру (соответствующих области небесной сфе-

ры, что соответствует кадру) и совокупности измерений исследуемого кадра, имеет вид

$$W(\Omega_{cat1}) = \prod_{i=1}^{Q_{cat1}} \omega_{it}(\hat{\Theta}_{it}); \quad W(\Omega_{frame2}) = \prod_{j=1}^{Q_{frame2}} \omega_{jn}(\hat{\Theta}_{jn}), \quad (7)$$

где  $W(\Omega_{cat1})$  – закон распределения параметров звездного каталога;

$W(\Omega_{frame2})$  – закон распределения параметров измерений исследуемого кадра;

$\Omega_{cat1}, \Omega_{frame2}$  – множество измерений кадра и формуляров звездного каталога, соответствующих этому кадру (соответствующих участку звездного неба, соответствующему этому кадру);

$Q_{cat1}, Q_{frame2}$  – количество измерений кадра и формуляров звездного каталога, соответствующих этому кадру (соответствующих участку звездного неба, соответствующему этому кадру);

$\omega_{it}(\hat{\Theta}_{it})$  – плотность распределения данных о небесном объекте, содержащихся в  $i$ -м измерении  $t$ -го кадра;

$\omega_{jn}(\hat{\Theta}_{jn})$  – плотность распределения данных о небесном объекте, содержащихся в  $j$ -м формуляре  $n$ -го каталога.

### Средний риск как показатель качества классификации

Ранее были формально введены: статистическое описание измерения (функция правдоподобия выборки) (7), априорные вероятности получения измерения от  $j$ -го объекта (априорные вероятности состояний) (6), функция потерь (3). Перечисленных характеристик достаточно для использования в качестве показателя качества классификации измерений небесных объектов среднего риска [18, 19, 26, 27].

Средний риск [18, 19, 26, 27] вводится следующим образом. Результат классификации в условиях априорной неопределённости не может всегда быть безошибочным. Вероятность ошибки классификации выражается формулой

$$\alpha_{in} = \int_{\omega_k} f_{\hat{\Theta}_{catjn}}(Y_{it}) dY_{it}, \quad (8)$$

где  $i$  – номер объекта, которому принадлежит измерение;

$k$  – номер объекта (формуляра каталога), которому измерение причислено с помощью процедуры классификации;

$f_{\hat{\Theta}_{catjn}}(Y_{it})$  – плотность вероятности распределения параметров объекта с оценками параметров  $\hat{\Theta}_{catjn}$ ;

$\omega_k$  – область ПИ, в которой принимается решение о принадлежности измерения  $k$ -му небесному объекту (объекту, соответствующему формуляру каталога).

Выражение для условного математического ожидания потерь (условного риска) при принятии ошибочного решения для  $i$ -го объекта имеет вид

$$r_i = \sum_{k=0}^{Q_c} \Pi_{ik} \cdot \alpha_{in}. \quad (9)$$

Средний риск (безусловное математическое ожидание потерь) равен сумме условных математических ожиданий потерь с учетом априорных вероятностей формирования измерений от объектов:

$$\bar{R}_{ident} = \sum_{i=0}^{Q_c} P(\hat{\Theta}_{catjn}) r_i. \quad (10)$$

С учетом (7) и (8) выражение для среднего риска (10) можно переписать в виде:

$$\bar{R}_{ident} = \sum_{j=0}^{Q_c} \int_{\omega_j} \left( P(\hat{\Theta}_{cat0}) \Pi_{0j} f_{\hat{\Theta}_{cat0}}(\mathbf{Y}_{it}) + \dots + P(\hat{\Theta}_{catQ_c}) \Pi_{Q_cj} f_{\hat{\Theta}_{catQ_c}}(\mathbf{Y}_{it}) \right) d\mathbf{Y}_{it}$$

или

$$\bar{R}_{ident} = \sum_{j=0}^{Q_c} \int_{\omega_j} -z_j d\mathbf{Y}_{it}, \quad (11)$$

При этом дискриминантный информант  $j$ -го объекта [28] имеет вид

$$z_j = -(P(\hat{\Theta}_{cat0}) \Pi_{0j} f_{\hat{\Theta}_{cat0}}(\mathbf{Y}_{it}) + \dots + P(\hat{\Theta}_{catQ_c}) \Pi_{Q_cj} f_{\hat{\Theta}_{catQ_c}}(\mathbf{Y}_{it})). \quad (12)$$

При условии  $j = \overline{1, Q_c}$   $f_{\hat{\Theta}_{catj}}(\mathbf{Y}_{it}) = N_{S[\mathbf{Y}_{it}]}(\hat{\Theta}_{catj}, \mathbf{\Sigma}_{itjn(k)})$ , а для  $j = 0$   $f_{\hat{\Theta}_{catj}}(\mathbf{Y}_{it}) = f_0(\mathbf{Y}_{it})$ .

Минимально возможное значение среднего риска при заданном ПИ называют байесовским средним риском [18, 19, 26, 27].

**Байесовская процедура классификации измерения** [18, 19, 26, 27, 29]

Выдвигается  $Q_c$  гипотез  $H_{itjn}$ ,  $j = \overline{1, Q_c}$  о получении измерения  $\mathbf{Y}_{it}$  от одного из объектов, имеющего в каталоге оценки параметров  $\hat{\Theta}_{catj}$ , и гипотеза  $H_0$  ( $j = 0$ ) о том, что измерение получено от одного из некаталогизированных объектов.

Необходимо отнести измерение  $\mathbf{Y}_{it}$  к одному из объектов каталога с оценками параметров  $\hat{\Theta}_{catjn}$  либо к нулевому объекту (принять решение о справедливости одной из  $Q_c + 1$  рассмотренных гипотез). Множество возможных решений образует пространство решений (ПР)  $U$ , которое состоит из элементов  $u_{itjn} \in U$ ,  $k = \overline{0, Q_c}$ , где  $u_{itjn}$  – решение о справедливости гипотезы  $H_{itjn}$  о принадлежности  $i$ -го измерения  $t$ -го кадра к  $j$ -му формуляру  $n$ -го каталога с оценками параметров  $\hat{\Theta}_{catjn}$ .

Отнесение измерения  $\mathbf{Y}_{it}$  к объекту с оценками параметров  $\hat{\Theta}_{catjn}$  осуществляется РП над ПИ  $\mathcal{U}_{it}$ . Детерминированное РП разбивает ПИ на непересекающиеся области [18, 19, 26, 27].

Известно [18, 19, 26, 27], что средний риск  $\bar{R}_{ident}$  минимален, если ПИ  $\mathcal{U}_{it}$

разбито на взаимно непересекающиеся области  $u_k$ ,  $\bigcup_{j=0}^{Q_c} u_j = \mathbb{U}$ ,  $u_k \cap u_j = \emptyset$

(для всех  $k \neq j$ ) таким образом, что из принадлежности измерения к  $j$ -му объекту следует, что для данного измерения дискриминантный информант (12)  $j$ -го объекта равен любому другому или больше его:

$$z_j \geq z_k \text{ для всех } j, k = \overline{0, Q_c}, k \neq j. \tag{13}$$

Тем самым байесовская процедура классификации заключается, например, в принятии решения о принадлежности измерения тому объекту, для которого дискриминантный информант наибольший [21,29].

**Использование критерия максимального правдоподобия.** Задачу отождествления измерений кадра с формулярами звездного каталога можно также представить как задачу выбора наилучшей гипотезы с точки зрения критерия максимального правдоподобия [18,19, 23, 26, 27, 31, 32] о попарном отождествлении кадра измерений и формуляров звездного каталога.

Гипотезы об отождествлении измерений кадра и формуляров звездного каталога сложны и включают в себя совокупность простых гипотез о попарном отождествлении измерений кадра и формуляров каталога. В результате за истинную гипотезу принимают ту, которая наиболее вероятна.

Вероятность простой гипотезы определяется невязками между оценками координат в отождествляемых измерениях кадра и формулярах звездного каталога:

$$N_{\hat{\Theta}_{i(m)}} \left( \hat{\Theta}_{j(k)}, \sum_{itjn(k)} \right) = \frac{1}{(2\pi)^{N_{fn}} \det \left( \sum_{itjn(k)} \right)} \times \\ \times \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \hat{\Theta}_{i(k)} - \hat{\Theta}_{j(k)} \right)^T \sum_{itjn(k)}^{-1} \left( \hat{\Theta}_{i(k)} - \hat{\Theta}_{j(k)} \right) \right], \tag{14}$$

где  $m$  – номер рассматриваемой пары «измерение-формуляр»;

$i(k)$  и  $j(k)$  – номера измерения кадра и формуляра каталога из  $m$ -й отождествляемой пары;

$\sum_{itjn(k)} = \mathbf{Y}_{frameit} + \mathbf{Y}_{catjn}$  – суммарная корреляционная матрица ошибок параметров  $i$ -го измерения  $t$ -го кадра по объекту, соответствующему  $j$ -му формуляру  $n$  каталога и  $k$ -й отождествленной паре «измерение-формуляр»;

$\mathbf{Y}_{frameit}$ ,  $\mathbf{Y}_{catjn}$  – корреляционные матрицы  $j_1$ -го измерения и  $j_2$ -го формуляра.

Вероятность сложной гипотезы об отождествлении измерений кадра и формуляров звездного каталога определяется следующим выражением:

$$P(\Omega_{cat1}, \Omega_{frame2}) = \left[ \prod_{k=1}^{Q_{cat}} \mathcal{J}(\hat{\Theta}_{jn(k)}, \hat{\Theta}_{it(k)}) \right] \prod_{k=1}^{Q_{ncat}} \eta(*, \hat{\Theta}_{j(k)}), \tag{15}$$

где  $\mathcal{J}(\hat{\Theta}_{it(k)}, \hat{\Theta}_{jn(k)}) = \begin{cases} N_{\hat{\Theta}_{i(i)}}(\hat{\Theta}_{jn(k)}, \sum_{jnit(k)}), & \text{если в } \Omega_{frame2} \text{ есть пара } j(k), \\ C, & \text{в противном случае;} \end{cases} \tag{16}$



$$\eta^{(*, \Theta_{jn(k)})} = \begin{cases} 1, \text{ если } j(t) \text{ содержится в } \Omega_{cat1}, \\ C, \text{ в противном случае;} \end{cases} \quad (17)$$

$C$  – константа, учитывающая возможность отсутствия парного формуляра в отождествляемом звездном каталоге.

Вероятность сложной гипотезы (15) об отождествлении пар «измерение-формуляр» определяется произведением вероятностей простых гипотез о составе каждой пары. Вероятности простых гипотез о составе пар измерений кадра и формуляров каталога представляют собой первые  $Q_{ncat}$  членов. Формуляр может быть также фиктивным, т. е. таким, который учитывает возможность отсутствия для измерения соответствующего парного формуляра в звездном каталоге. Остальные члены произведения соответствуют тем формулярам звездного каталога, которые не были отождествлены с измерениями кадра. Формально считается, что вторая часть произведения имеет  $Q_{cat}$  множителей, соответствующих формулярам звездного каталога. Если некий формуляр отождествлен с измерением кадра, то соответствующий множитель второй части произведения приравнивается к единице, иначе множитель второго произведения приравнивается некоей константе  $C$ , соответствующей частной гипотезе о том, что данный формуляр звездного каталога не отождествлен.

Так как корреляционная матрица  $\sum_{j12(k)}$  диагональная, то распределение невязок между координатами в паре «измерение-формуляр» можно представить в виде произведения

$$N_{\hat{\Theta}_{i(k)}} \left( \hat{\Theta}_{j(k)}, \Sigma_{jnit(k)} \right) = \prod_{\mu=1}^{M_{mea}} N_{\hat{\Theta}_{\mu i(k)}} \left( \hat{\Theta}_{\mu j(k)}, \sigma_{\mu jnit} \right), \quad (18)$$

где  $M_{mea}$  – количество параметров измерения (формуляра каталога), используемых при отождествлении (обычно равно количеству параметров видимого движения  $N_{fN}$ );

$\mu$  – номер параметра, используемого при отождествлении;

$\sigma_{mit}$  – СКО ошибки оценки  $m$ -го параметра видимого движения объекта, содержащейся в  $i$ -м измерении  $t$ -го кадра;

$\sigma_{mjn}$  – СКО ошибки оценки  $m$ -го параметра видимого движения объекта, содержащейся в  $j$ -м формуляре  $n$ -го звездного каталога;

$\sigma_{\mu itjn} = \sigma_{mit} + \sigma_{mjn}$  – СКО (среднее квадратическое отклонение) оценки  $\mu$ -й координаты  $i$ -го измерения  $t$ -го кадра и  $j$ -го формуляра  $n$ -го каталога;

$$N_{\hat{\Theta}_{\mu i(k)}} \left( \hat{\Theta}_{\mu j(k)}, \sigma_{\mu jnit} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_{\mu jnit}} \exp \left[ -\frac{(\hat{\Theta}_{\mu i(k)} - \hat{\Theta}_{\mu j(k)})^2}{2\sigma_{\mu jnit}^2} \right] -$$

распределение невязок между  $\mu$ -й координатой  $i$ -го измерения и  $j$ -го формуляра.

Для решения задачи отождествления измерений кадра и формуляров каталога методом максимального правдоподобия необходимо подобрать такие сочетания пар «измерение-формуляр» в простых гипотезах, составляющих сложную гипотезу об отождествлении измерений кадра и формуляров каталога, чтобы вы-

полнялось условие:

$$\ln P(\Omega_{cat1}, \Omega_{frame2}) \xrightarrow{I(j,i)} \max, \tag{19}$$

где  $j, i$  – номера формуляра звездного каталога и измерений кадра соответственно;

$I\{j, i\}$  – множество пар «измерение-формуляр».

При этом каждому выбранному измерению кадра может соответствовать только один формуляр каталога и каждому формуляру каталога - одно измерение кадра.

**Задача отождествления измерений кадра и формуляров каталога как частный случай задачи о назначениях**

Процесс отождествления кадра и каталога можно графически представить в виде графа отождествления – двудольного графа (рис. 1). Двудольный граф – граф [33, 34, 35, 36, 37], множество вершин которого  $\Omega_{catn}$  можно разбить на два непересекающихся подмножества  $\Omega_{cat1}$  и  $\Omega_{frame2}$  так, что каждое ребро графа соединяет какую-нибудь вершину  $\Omega_{cat1}$  с какой-нибудь вершиной  $\Omega_{frame2}$ . При этом  $\Omega_{cat1}$  и  $\Omega_{frame2}$  являются соответственно множествами измерений кадра и формуляров каталога, а дуги графа взвешены весами  $\mathcal{J}_{ijn(k)}$  отождествления  $i$ -го измерения кадра и  $j$ -го формуляра каталога, весами, пропорциональными вероятностям простых гипотез. Иными словами, указанные дуги могут быть взвешены вероятностями того, что информация об одном и том же объекте содержится в  $i$ -м измерении кадра и  $j$ -м формуляре каталога или другими, связанными с указанными вероятностями величинами.

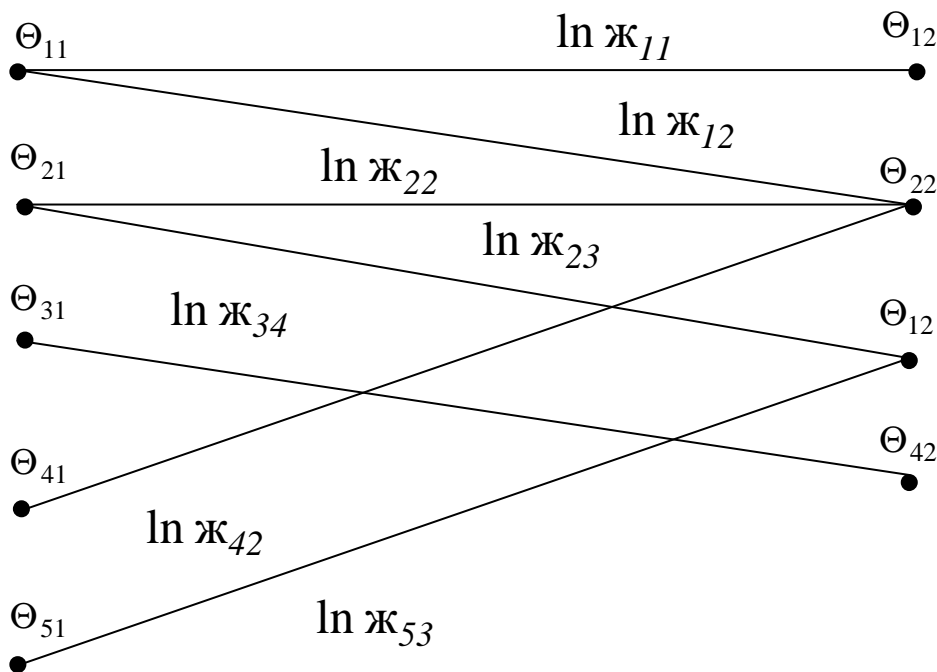


Рис. 1. Представление процесса отождествления измерений кадра и формуляров каталога двудольным графом

Возможность отождествления измерений кадра и формуляров каталога равносильна существованию в графе совершенного паросочетания. Для решения поставленной задачи необходимо, чтобы измерениям кадра и формулярам каталога было найдено соответствие. Такой взгляд на отождествление приводит к выводу, о том, что задача является частным случаем задачи о назначениях на двудольном графе [38, 39, 40, 41].

Задача о назначениях в контексте отождествления кадра и каталога может формулироваться следующим образом. Задано множество измерений кадра  $\Omega_{cat1} = \{ \theta_{11}, \dots, \theta_{Q_{cat1}} \}$ , каждое из которых может быть отождествлено с некоторыми из формуляров каталога  $\Omega_{frame2} = \{ \theta_{12}, \dots, \theta_{Q_{frame2}} \}$ . Вес отождествления измерения и формуляра  $\theta_{it}$  и  $\theta_{jn}$  при этом будет равен  $\ln \mu_{ijn}(k)$ .

Назначение, которое максимизирует вероятность гипотезы о сочетании пар «измерение-формуляр», соответствует наибольшему паросочетанию с максимальным суммарным весом [39, 40, 41].

Для того, чтобы существовало решение задачи о назначениях, необходимо, во-первых, чтобы в кадре и каталоге  $\Omega_{cat1}$  и  $\Omega_{frame2}$  количество элементов было одинаковым; во-вторых, согласно теореме Холла о свадьбах [38], необходимо, чтобы любые  $i$ -е измерения кадра отождествлялись («были знакомы») в совокупности, по меньшей мере, с  $j$  различными формулярами каталога или наоборот.

На практике выполнение любого из указанных условий существования решения является скорее счастливым исключением, чем правилом. В общем же измерения кадра ( $\Omega_{cat1}$ ) и формуляры каталога ( $\Omega_{frame2}$ ) содержат информацию об  $Q_c$  объектах. При этом кадр содержит информацию об  $(Q_c - Q_{ncat1})$  объектах, не содержащихся в формулярах каталога. В свою очередь, каталог содержит информацию об объектах, не представленных на кадре.

Формально можно доопределить задачу отождествления к задаче о назначениях со свойством существования однозначного решения. Для этого нужно дополнить совокупность измерений кадра и формуляров каталога фиктивными измерениями и формулярами так, чтобы их количество было одинаковым. В терминах теории графов доли  $\Omega_{cat1}$  и  $\Omega_{frame2}$ , двудольного графа дополняются  $(Q_c - Q_{frame2})$  и  $(Q_c - Q_{cat1})$  изолированными вершинами. Если таким образом сформировать граф, то он становится полным двудольным графом с долями по  $Q_c$  вершин:

$$\begin{aligned} Q_{cat1} + (Q_c - Q_{cat1}) &= Q_c; \\ Q_{frame2} + (Q_c - Q_{frame2}) &= Q_c, \end{aligned} \tag{20}$$

С помощью матрицы смежности можно представить двудольный граф с одинаковым количеством вершин  $Q_c$  в каждой его доле:

$$P_{adj}(\Omega_{catk}) = \begin{pmatrix} \ln \mathcal{J}_{q_1} & \ln \mathcal{J}_{q_2} & \dots & \ln \mathcal{J}_{q_{Q_c}} \\ \ln \mathcal{J}_{\xi_1} & \ln \mathcal{J}_{\xi_2} & \dots & \ln \mathcal{J}_{\xi_{Q_c}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \ln \mathcal{J}_{Q_c,1} & \ln \mathcal{J}_{Q_c,2} & \dots & \ln \mathcal{J}_{Q_c,Q_c} \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Граф отождествления можно представить в виде матрицы смежности [42]  $P_{adj}(\Omega_{catm})$ , элементами которой являются вероятности  $\mathcal{J}_{ij(n,k)}$ . Матрица смежности дополняется весами  $\ln C$ , для нулевой вероятности отождествления формуляров, и весом  $n \ln C$ , где  $n \gg 1$ , для вероятности отождествления фиктивных формуляров. Пример такой матрицы будет иметь вид

$$P_{adj}(\Omega_{catk}) = \begin{pmatrix} \ln \mathcal{J}_{q_1} & \ln \mathcal{J}_{q_2} & \ln \mathcal{J}_{q_3} & \ln \mathcal{J}_{q_4} \\ \ln \mathcal{J}_{\xi_1} & \ln \mathcal{J}_{\xi_2} & \ln \mathcal{J}_{\xi_3} & \ln \mathcal{J}_{\xi_4} \\ \ln \mathcal{J}_{\xi_1} & \ln \mathcal{J}_{\xi_2} & \ln \mathcal{J}_{\xi_3} & \ln \mathcal{J}_{\xi_4} \\ \ln \mathcal{J}_{q_1} & \ln \mathcal{J}_{q_2} & \ln \mathcal{J}_{q_3} & \ln \mathcal{J}_{q_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln \mathcal{J}_{q_1} & \ln \mathcal{J}_{q_2} & n \ln C & n \ln C \\ n \ln C & \ln \mathcal{J}_{\xi_2} & \ln \mathcal{J}_{\xi_3} & n \ln C \\ \ln \mathcal{J}_{\xi_1} & n \ln C & n \ln C & n \ln C \\ n \ln C & \ln \mathcal{J}_{q_2} & n \ln C & n \ln C \end{pmatrix} \quad (22)$$

где  $\ln \mathcal{J}_{ij(n,k)}$  – вес отождествления пары, состоящей из  $i$ -го измерения кадра  $\Omega_{cat1}$ , сформированного в  $t$ -й момент времени, и  $j$ -го формуляра  $n$ -го каталога  $\Omega_{frame2}$ .

После доопределения задачи отождествления к задаче о назначениях с однозначным решением в матрице смежности количество строк равно количеству столбцов. В общем же случае количество строк матрицы соответствует количеству измерений кадра, а количество столбцов – количеству формуляров каталога.

В целях экономии памяти матрица смежности может быть заменена списками смежности измерений кадра. Списки смежности содержат только ненулевые вероятности  $\mathcal{J}_{ij(n,k)}$ .

Строка матрицы смежности представляет собой вес отождествления  $i$ -го измерения кадра со всеми формулярами каталога, включая фиктивные.

Требуется из каждой строки матрицы выбрать по одному элементу  $\mathcal{J}_{ij(n,k)}$  так, чтобы максимизировать логарифм вероятности  $\ln P(\Omega_{cat1}, \Omega_{frame2})$ , определяемой выражением (15). При выборе элементов из строк матрицы  $P_{adj}(\Omega_{catn})$  (21) необходимо, чтобы выбранные элементы находились в разных столбцах. Иначе получится, что несколько измерений кадра назначаются одному формуляру каталога. Другими словами, необходимо из каждой строки и каждого столбца матрицы  $P_{adj}(\Omega_{catn})$  выбрать ровно по одному элементу так, чтобы сумма выбранных элементов была наибольшей.

Следовательно, можно показать, что задача о назначениях на двудольном графе сводится к выбору элементов столбцов квадратной матрицы по одному с каждой строки и каждого столбца, который обеспечивает максимальный суммарный вес выбранных элементов.

Для решения задачи отождествления измерений кадра и формуляров каталога необходимо выбрать из матрицы (21) такую последовательности элементов (по одному из каждой строки матрицы):

$$\{ \ln \mathcal{E}_{ij(1)}, \ln \mathcal{E}_{ij(2)}, \dots, \ln \mathcal{E}_{ij(Q_c)} \}, \quad (23)$$

суммарный вес которых имеет максимальное значение при выполнении условия  $i(k) \neq j(l), k \neq l$ .

Задача отождествления измерений кадра и формуляров каталога сводится к задаче о выборе пар «измерение-формуляр» с максимальным суммарным весом отождествления. Из этого следует, что данная задача (максимизации общего веса назначений) будет иметь вид

$$\sum_{k=1}^H \ln \mathcal{E}_{ij(k)} \rightarrow \max. \quad (24)$$

Отождествление (решение соответствующей задачи о назначениях) измерений кадра и формуляров каталога (24) может быть выполнено полным перебором возможных вариантов паросочетаний измерений кадра и формуляров каталога. Количество возможных вариантов отождествления  $Q_c$  измерений кадра и  $Q_c$  формуляров каталога равно  $Q_c!$ . Поэтому отождествление методом полного перебора не может быть реализовано за приемлемое время при большом количестве измерений (формуляров каталога).

При отождествлении всего лишь 10 измерений (формуляров) количество гипотез о сочетании пар «измерение-формуляр» будет равно  $10! = 3\,628\,800$ . Если для проверки одной гипотезы необходимо 10 операций умножений, то для проверки всех гипотез необходимо  $10! \times 10 = 36\,288\,000$  операций умножения. Среднее время выполнения одной операции умножения на ядре 4-ядерного процессора Intel Core i7 с тактовой частотой 2GHz равно  $\sim 5 \cdot 10^{-10}$  с. [43, 44]. Время проверки  $10!$  гипотез на указанной ЭВМ не превысит 0,1 секунды. При отождествлении групп, содержащих по 15 измерений (формуляров), время проверки  $15!$  гипотез составит не более двух часов. Но при увеличении количества измерений (формуляров) до  $20!$  время отождествления на указанной ЭВМ превысит 385 лет.

В этой связи отождествление (решение соответствующей задачи о назначениях) измерений кадра и формуляров каталога (24) целесообразно выполнять венгерским методом [45, 46] с трудоемкостью ее решения  $O(n^3)$  приведенных операций [46].

### Результаты/дискуссия

Результатами разработки метода отождествления измерений кадра с формулярами каталога есть его применение в программном обеспечении автоматического поиска астероидов и комет на серии CCD-кадров CoLiTeс. На рисунках 2 и 4 изображены исходные CCD-кадры, полученные в результате наблюдения. На рисунках 3 и 5, показаны те же кадры, но уже обработанные с помощью ПО CoLiTeс. На кадрах (рис. 3, 5) отображено 1000 самых ярких измерений, отождествленных с формулярами используемого звездного каталога.

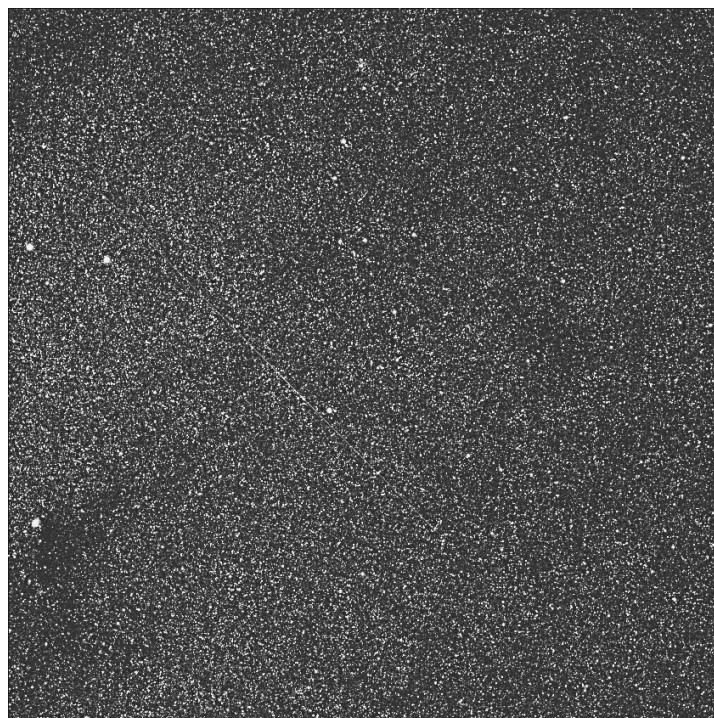


Рис. 2. Исходный CCD -кадр 1

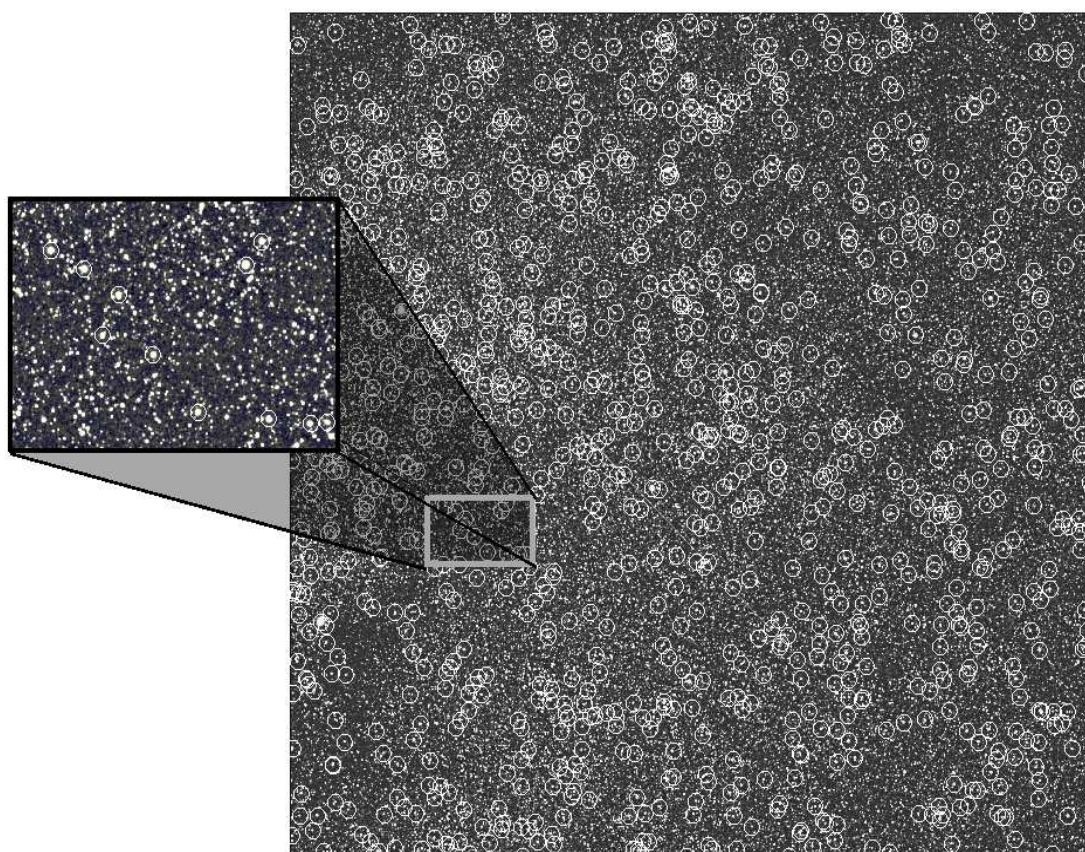


Рис. 3. 1000 самых ярких измерений кадра 1, отождествленных с формулярами звездного каталога



Рис. 4. Исходный CCD -кадр 2,

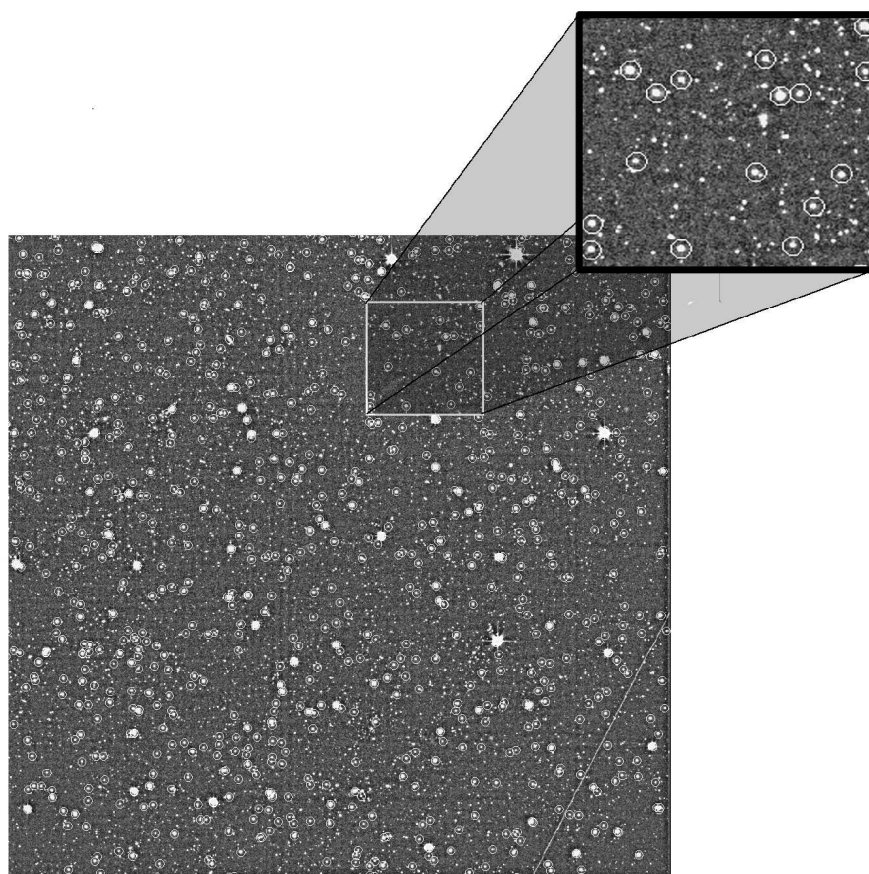


Рис. 5. 1000 самых ярких измерений кадра 2, отождествленных с формулярами звездного каталога

Данный метод отождествления измерений кадра с формулярами каталога обеспечивает существенно более надежное отождествление, чем в широко известной астрометрической программе *Astrometrica* [47, 48], а также значительно повышает точность наблюдений в ПО *CoLiTeс*.

С помощью *CoLiTeс*, в частности, и разработанного в статье метода впервые в СНГ и Балтии были открыты астероид и комета в автоматизированном режиме. С использованием *CoLiTeс* в 2012(2011) году сделано 80 (86)% наблюдений и 74 (75)% открытий астероидов в указанных странах.

С использованием *CoLiTeс* было открыто 4 кометы из 8, открытых в СНГ и Балтии более чем за 20 последних лет. 10 декабря 2010 года с использованием программы *CoLiTeс* была открыта комета C/2010 X1 (Elenin), которая стала первой кометой, открытой астрономом СНГ за последние 20 лет. Всего с помощью программы *CoLiTeс* открыто более 1560 астероидов. Среди них – четыре объекта, сближающихся с Землей, из 16 открытых за всю историю советской и постсоветской астрономии СНГ и Балтии, 21 троянский астероид Юпитера и 1 кентавр из двух, открытых в СНГ и Балтии. Еще четырем астероидам были посвящены отдельные электронные циркуляры MPC.

### Выводы

Разработан вычислительный метод отождествления измерений кадра с формулярами каталога. Данный метод отождествления позволяет найти попарное соответствие между совокупностью сформированных на кадре измерений и множеством объектов звездного каталога, принадлежащих той же области небесной сферы, что и сформированный кадр. Задача отождествления сведена к задаче о назначениях (24) на двудольном графе. Для решения задачи предлагается использовать венгерский метод.

Разработанный метод был применен при создании программного обеспечения автоматического поиска астероидов и комет на серии CCD кадров *CoLiTeс*. Результаты ПО *CoLiTeс* подтверждают достоверность и надежность работы данного вычислительного метода. Программный продукт может быть использован в различных обсерваториях мира, проводящих наблюдения

Дальнейшие исследования метода отождествления измерений кадра с формуляром каталога будут направлены на повышение эффективности этого метода (например, уменьшение вычислительных затрат и повышение точности оценки местоположения объекта).

### Список литературы

1. George, E. Smith The invention and early history of the CCD [Text] / E. Smith George // *Rev. Mod. Phys.* – 2010. – V. 3, № 82. – P. 2307–2312.
2. Janesick, J. R. *Scientific Charge-Coupled Devices* (SPIE Press Monograph Vol. PM83) // SPIE Publications – 2001. – P. 920
3. Zacharias, N.; Finch, C. T. et al (2013). The Fourth US Naval Observatory CCD Astrograph Catalog (UCAC4). // *The Astronomical Journal* – 145(2), id. 44, 14.
4. Zacharias, N., The fourth U.S. Naval Observatory CCD Astrograph Catalog (UCAC4) // Norbert Zacharias for the UCAC team, USNO, Washington DC. – July 2012 // [Электронный ресурс] – Режим доступа к ресурсу: [http://ad.usno.navy.mil/ucac/readme\\_u4v5](http://ad.usno.navy.mil/ucac/readme_u4v5) – Название с экрана.
5. Monet, D. The USNO-B1.0 Catalog / D. Monet, S. Levine, B. Canzian // [Электронный ресурс]. – Режим доступа к ресурсу: <http://tdc-www.harvard.edu/catalogs/ub1.html> – Название с экрана.
6. Hog, E., Fabricius, C., Makarov, V.V. et al. Construction and verification of the Tycho-2 Catalogue // *Astron. Astrophys.* 357, 367–386 (2000).
7. Кузьмин С.З. Цифровая радиолокация. Введение в теорию / С.З. Кузьмин.



– К.: Изд-во, 2000. – 428 с.

8. Прикладная статистика: Классификация и снижение размерности / С.А. Айвазян, В.М. Бухштабер, И.С. Енюков, Л.Д. Мешалкин. – М.: Финансы и статистика, 1989. – 607 с.

9. Определение параметров движения объектов в статистически неопределенных ситуациях/ Н.С. Гриценко, В.П. Логинов, В.И. Мальцев, К.К. Севастьянов, И.Г. Тихомирова //Зарубежная радиоэлектроника. – 1988. – № 2. – С. 3 – 29.

10. Цифровая обработка радиолокационной информации при сопровождении целей / А.М. Бочкарев, А.Н. Юрьев, М.Н. Долгов, А.В. Щербинин // Зарубежная радиоэлектроника. – 1991. – № 3. – С. 3 – 22.

11. Алгоритм различения траекторий движущихся объектов и оценки их координат / Б.Р. Левин, Н.В. Тегина, А.И. Юдицкий // Радиотехника и радиоэлектроника. – 1982. – Т.27. - №10. – С. 1942-1948.

12. Различение траекторий движущихся объектов и оценивание их параметров / Б.Р. Левин, Н.В. Тегина, А.И. Юдицкий // Вопросы радиоэлектроники. Сер. Общие вопросы радиоэлектроники. – 1983. – Вып. 14.– С. 78 – 86.

13. Прикладная статистика: Исследование зависимостей / С.А. Айвазян, В.М. Бухштабер, И.С. Енюков, Л.Д. Мешалкин. – М.: Финансы и статистика, 1985. – 488 с.

14. Astrometry.net: Blind astrometric calibration of arbitrary astronomical images / D. Lang, D.W. Hogg, K. Mierle et al. // Astron.J.139:1782, 2010 – P. 46.

15. Measuring the undetectable: Proper motions and parallaxes of very faint sources / D. Lang, D. W. Hogg, S. Jester et al. // The Astronomical Journal, Volume 137, Issue 5, 2009 – pp. 4400-4411.

16. Hogg, D.W. Astronomical imaging: The theory of everything // [Электронный ресурс] / D.W. Hogg, D. Lang. – Режим доступа к ресурсу: <http://arxiv.org/pdf/0810.3851v1.pdf> – Название с экрана.

17. Закс, Ш. Теория статистических выводов / Ш. Закс; пер. с англ. – М.: Мир, 1975. – 776 с.

18. Леман, Э. Проверка статистических гипотез: пер. С англ. / Э. Леман; пер. с англ. – М.: Наука, 1979. – 408 с.

19. DeGroot M. H. Optimal Statistical Decisions / M. H. DeGroot // Wiley-Interscience; WCL Edition edition – 2004. – P. 512

20. Christian, R. P. The Bayesian Choice / R. P. Christian // Springer Texts in Statistics . – 2007. – p. 606.

21. Pao, С.Р. Линейные статистические методы и их применения. /С.Р. Пао – М.: Наука, Гл. ред. физ-мат. лит, 1968. – 548 с.

22. Вентцель, Е.С. Теория вероятности и ее инженерные приложения. / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. – М.: Высш. шк.,2000. – 480 с.

23. Кобзарь, А.И. Прикладная математическая статистика. / А.И. Кобзарь. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 816 с.

24. Genz, A. Computation of Multivariate Normal and t Probabilities (Lecture Notes in Statistics) / A. Genz, F. Bretz Springer; 2009. – p.483

25. Gentle, J.E. Computational statistics / J.E. Gentle // New York: Springer. – 2009 p.315.

26. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. – М.: Радио и связь, 1989. – 656 с.

27. Орлов, А.И. Теория принятия решений: учеб. пособие / А.И. Орлов.– М.: Изд-во «Март», 2004. – 656 с.

28. Mahabal, A. A. Discovery, classification, and scientific exploration of transient events from the Catalina Real-time Transient Survey. / A.A. Mahabal, S. G. Djorgovski, A. J. Drake, et al. // Bull. Astr. – 2011. – Soc.39. – P. 387–408.

29. Айвазян, С.А. Прикладная статистика: Классификация и снижение размерности / С.А. Айвазян, В.М. Бухштабер, И.С. Енюков, Л.Д. Мешалкин. – М.: Финансы и статистика, 1989. – 607 с.
30. Iterative Smoother-Based Variance Estimation / G.A. Einicke, G. Falco, M.T. Dunn, D.C. Reid // Signal Processing Letters, IEEE (Volume:19 , Issue: 5) – 2012) – P. 275-278.
31. Harris, J. W. "Maximum Likelihood Method." Handbook of Mathematics and Computational Science. / J. W. Harris, H. Stocker, //New York: Springer-Verlag, p. 824, 1998.
32. Theuwissen, A.J. Solid-State Imaging with Charge-Coupled Devices / A.J. Theuwissen // Springer Science & Business Media – 1995. – 388 с.
33. Уилсон Р. Дж. Введение в теорию графов. – М.: Мир, – 1997. – 207 с.
34. Diestel, R. Graph Theory / R. Diestel // Springer-Verlag, Heidelberg – 2010. – P.451.
35. Зыков, А.А. Основы теории графов / А.А. Зыков // М.: Вузовская книга – 2004. - 664 с.
36. Bondy, A. Graph Theory (Graduate Texts in Mathematics) / A. Bondy, U.S.R. Murty // Springer – 2008. – P. 655.
37. Cohen, R. Complex Networks: Structure, Robustness and Function / R. Cohen, S. Havlin // Cambridge University Press– 2010. - P. 248.
38. Оре О. Теория графов. / О.Оре – М.: Наука, 1968. – 352 с.
39. Таха, Хемди А. Введение в исследование операций: Пер. с англ. / А. Таха, Хемди. – М.: Изд-е «Вильямс», 2005. – 912 с.
40. Brualdi R. A. Combinatorial Matrix Classes (Encyclopedia of Mathematics and its Applications // Cambridge University Press –2006. – P. 554.
41. Burkard, R. Dell'Amico M., Martello S. Assignment Problems 415 pages // Society for Industrial and Applied Mathematics, 2012. – P.415 .
42. Евстигнеев, В.А. Применение теории графов в программировании. / В.А. Евстигнеев – М.: Наука, – 1985. – 352 с.
43. Intel Core i7-5550U Processor (4M Cache, up to 3.00 GHz). // [Электронный ресурс] – Режим доступа к ресурсу: [http://ark.intel.com/products/84992/Intel-Core-i7-5550U-Processor-4M-Cache-up-to-3-00-GHz?\\_ga=1.261439374.205648874.1423212389](http://ark.intel.com/products/84992/Intel-Core-i7-5550U-Processor-4M-Cache-up-to-3-00-GHz?_ga=1.261439374.205648874.1423212389) – Название с экрана.
44. Соломенчук, В. Г. С60 Железо ПК 2011 / В. Г. Соломенчук, П. В. Соломенчук. – СПб.: БХВ-Петербург, 2011. – 384 с.
45. Burkard R. E., Dell'Amico M., Martello S. Assignment Problems // Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM, 3600 Market Street, Floor 6, Philadelphia, PA 19104), 2009. – P. 382.
46. Kuhn H. W. The Hungarian Method for the Assignment Problem // [Электронный ресурс] – Режим доступа к ресурсу: <http://tom.host.cs.st-andrews.ac.uk/CS3052-CC/Practicals/Kuhn.pdf> – Название с экрана.
47. Herbert R. Astrometrica: Astrometric data reduction of CCD images [Текст] / R. Herbert // Astrophysics Source Code Library, record ascl:1203.012. –2012.
48. Brian, E. Searching For Hazardous Asteroids / E. Brian, A. W. Puckett, K. Coble, et al. // American Astronomical Society, AAS Meeting #218, #224.04; Bulletin of the American Astronomical Society, Vol. 43. – 2011.

Поступила в редакцию 16.03.2015

## **Метод ототожнення астрономічних вимірювань CCD-кадру з формулярами зіркового каталогу**

Розроблено метод ототожнення вимірювань кадру з формулярами зоряного каталогу. Цей метод полягає в вирішенні задачі знаходження попарної відповідності між сукупністю сформованих на кадрі вимірювань і множиною об'єктів зоряного каталогу, що належать тій же області небесної сфери, що і сформований кадр. Задача ототожнення зведена до задачі про призначення, яка вирішується угорським методом.

**Ключові слова:** CCD-кадр, вимірювання кадру, формуляр каталогу, ототожнення, середній ризик, метод максимальної правдоподібності, угорський метод.

## **The method of identifying the astronomical measurement CCD-frame with the form of star catalog**

Method of identifying the measurement frame with the form of star catalog is developing. This method - is the method of solving the problem of finding the pairwise correspondence between the set of measurements formed on the frame and a plurality objects of the star catalog that belong to the same area of the sky that the formed frame. The problem of identification is reduced to the assignment problem, which is solved by the Hungarian method.

**Keywords:** CCD-frame, measuring frame, the form of catalog, the identification, average risk, maximum likelihood method, Hungarian method.