УДК 517.946

В. С. Проценко, Т. В. Денисова

Задачи математической физики составных тел, точно разрешимые с помощью нового интегрального преобразования на бесконечном промежутке

Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ»
Харьковский национальный экономический университет им. Семена Кузнеца

Предложено новое интегральное преобразование на бесконечном промежутке, обобщающее интегральное преобразование Фурье, которое базируется на собственных функциях задачи Штурма-Лиувилля с одной точкой сопряжения. С помощью этого преобразования решены задачи о колебании составного полупространства и нестационарной теплопроводности составного кругового цилиндра с учётом теплообмена с окружающей средой.

Ключевые слова: интегральное преобразование, непрерывный спектр, собственные функции, задача теплопроводности, упругие колебания.

Введение

Многие задачи математической физики такие, как установившиеся антиплоские колебания составного упругого полупространства или слоя, крутильные колебания составных бесконечных круговых цилиндров, задачи стационарной и нестационарной теплопроводности составных тел с учетом теплообмена и анизотропии материала и другие, сводятся к изучению некоторой неклассической задачи Штурма–Лиувилля с непрерывным спектром.

После того как исследована спектральная задача и найдено интегральное разложение произвольной функции по её собственным функциям, открывается возможность применения к решению указанных выше задач классического метода Фурье и получения их точных решений.

В настоящей статье получено новое интегральное разложение на бесконечном промежутке, обобщающее классическое преобразование Фурье, установлен класс функций, для которых оно справедливо, а также сходимость его в обыкновенных точках и в точке сопряжения разнородных тел.

Дано точное решение некоторых новых задач математической физики для тел, составленных из разных материалов.

1. Интегральное преобразование

Рассмотрим задачу Штурма–Лиувилля (Ш-Л) на интервале $(-\infty,+\infty)$ с точкой сопряжения $x=0$:

$$\begin{gathered} y_1''+(s-q)y_1=0, \quad x\in(0,\infty), \quad q>0, \\ y_2''+sy_2=0, \quad x\in(-\infty,0), \end{gathered} \tag{1.1}$$

$$y_1(0)=y_2(0), \quad \mu_1 y_1'(0)=\mu_2 y_2'(0), \quad \mu_1,\mu_2>0 \tag{1.2}$$

и условиями ограниченности решений на бесконечности.

Нетрудно установить вещественность собственных значений этой задачи и её собственные функции. Каждое $s\in(q,\infty)$ является двукратным собственным значением, отвечающие ему собственные функции имеют вид

$$\tilde{y}_1=\begin{cases} sin\sqrt{s-q}x, & x>0,\\ \mu_{12}\sqrt{\dfrac{s-q}{s}}\,sin\sqrt{s}\;x, & x<0,\end{cases}\quad \tilde{y}_2=\begin{cases} cos\sqrt{s-q}x, & x>0,\\ cos\sqrt{s}x, \quad x<0, & \mu_{12}=\mu_1/\mu_2\,.\end{cases} \tag{1.3}$$

Всякое s$\in(0,q)$ – однократное собственное значение с собственной функцией

$$\tilde{y}_3=\begin{cases} e^{-\sqrt{q-s}\;x}\,, & x>0\,,\\ -\mu_{12}\sqrt{\dfrac{q-s}{s}}\;sin\sqrt{s}\;x+cos\sqrt{s}\;x\;, & x<0.\end{cases} \tag{1.4}$$

Для получения искомого интегрального разложения по собственным функциям воспользуемся операционным методом работы [1]. Следуя этому методу, формально получим представление произвольной функции $f(x)$ при $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ в виде интеграла Римана–Меллина с двумя точками ветвления. Этот интеграл сначала преобразуется в интеграл по разрезу от собственных функций, а затем доказывается, что он сходится к $f(x)$. Другими словами, устанавливается равенство

$$J(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)], & x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty),\\ \dfrac{1}{\mu_1+\mu_2}[\mu_1 f(+0)+\mu_2 f(-0)], & x=0,\end{cases} \tag{1.5}$$

где

$$J(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_q^{\infty}[R_1(s)\tilde{y}_1(x,s)+R_2(s)\tilde{y}_2(x,s)]ds+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{q}R_3(s)\tilde{y}_3(x,s)ds; \tag{1.6}$$

$$R_k(s)=r_k(s)\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\rho(\xi)\tilde{y}_k(\xi,s)d\xi\,, \qquad \rho(x)=\begin{cases}\mu_{21}\,, & x<0,\\ 1\,, & x>0;\end{cases} \tag{1.7}$$

$$r_1(s)=\frac{\mu_{21}}{\Delta_1}\sqrt{\frac{s}{s-q}}\quad,\quad r_2(s)=\frac{1}{\Delta_1},\quad r_3(s)=\mu_{21}\frac{\sqrt{s}}{\Delta_2},\quad \mu_{21}=\mu_{12}^{-1}; \tag{1.8}$$

$$\Delta_1=\mu_{21}\sqrt{s}+\sqrt{s-q},\quad \Delta_2=q+s\left(\mu_{21}^2-1\right). \tag{1.9}$$

Формулы (1.6), (1.7) будем рассматривать как прямое и обратное интегральное преобразование функции $f(x)$. Принимаем, что $f(x)$ абсолютно интегрируема на $(-\infty,\infty)$ и удовлетворяет условию Дирихле.

Следует отметить, что при $q=0$ второе слагаемое в (1.6) пропадает, но формула (1.5) остаётся справедливой. Если в полученном таким образом равенстве положить ещё $\mu_1=\mu_2$, то будем иметь классическое интегральное преобразование Фурье.

Разложение, аналогичное (1.5),(1.6), по собственным функциям задачи (Ш-Л)

$$z_1''+s\cdot z_1=0,\;\; x>0;\qquad z_2''+(s-q)z_2=0,\;\; x<0,\;\; q>0$$

с теми же краевыми условиями и условиями сопряжения отличается от приведенного тем, что в нём собственные функции $\tilde{y}_k$ и функции $R_k(s)$ следует заменить соответственно на $\tilde{z}_k$ и $h_j(s)$ по схеме $\tilde{y}_3 \Leftrightarrow \tilde{z}_1,\ \tilde{y}_1 \Leftrightarrow \tilde{z}_2, \tilde{y}_2 \Leftrightarrow \tilde{z}_3$,

$$h_3 \Leftrightarrow R_2,\ h_2 \Leftrightarrow R_1,\ h_1 \Leftrightarrow R_3, \quad h_k(s) = p_k(s)\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\rho(\xi)\tilde{z}_k(\xi,s)ds, \tag{1.10}$$

$$p_1(s) = \frac{\sqrt{s}}{\omega_0(s)}, \qquad p_2(s) = \frac{\mu_{12}}{\omega_1(s)}\sqrt{\frac{s}{s-q}}, \quad p_3 = \frac{1}{\omega_1(s)}, \tag{1.11}$$

$$\tilde{z}_1 = \begin{cases} \mu_{21}\sqrt{\dfrac{q-s}{s}}\sin\sqrt{s}\,x + \cos\sqrt{s}x, & x>0, \\ e^{\sqrt{q-s}\,x}, & x<0, \end{cases} \qquad s \in (0,q), \tag{1.12}$$

$$\tilde{z}_2 = \begin{cases} \mu_{21}\sqrt{\dfrac{s-q}{s}}\sin\sqrt{s}\,x, \\ \sin\sqrt{s-q}x, \end{cases} \quad \tilde{z}_3 = \begin{cases} \cos\sqrt{s}x, & x>0, \\ \cos\sqrt{s-q}x, & x<0, \end{cases} \qquad s>q, \tag{1.13}$$

$$\omega_0 = \mu_{21}^2 q + s\left(1-\mu_{21}^2\right),\ \omega_1 = \mu_{21}\sqrt{s-q} + \sqrt{s}\ . \tag{1.14}$$

2. Приложение к задачам математической физики

2.1. Установившиеся колебания составного полупространства

Полупространство $y>0$ составлено из двух частей с разными материальными константами ρ,μ: одна часть $x>0$ имеет константы ρ_1, μ_1, другая часть $x<0 - \rho_2, \mu_2$. На границе $y=0$ приложено касательное усилие $\tau_{yz} = \tau(x)e^{i\omega t}$, где ω - круговая частота колебаний. Считаем, что функция $\tau(x)$ - абсолютно интегрируемая на $(-\infty,+\infty)$.

Задача сводится к интегрированию уравнения колебания [2]

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_k}{\partial y^2} + \omega_k^2 u_k = 0, \qquad \omega_k = \omega/a_k, \ \ a_k = \sqrt{\frac{\mu_k}{\rho_k}} \tag{2.1}$$

относительно амплитуды u_k $(k=1,2)$.

Краевые условия задачи:

$$\left.\frac{\partial u_k}{\partial y}\right|_{y=0} = -\mu_k\tau(x), \ (k=1,2), \qquad x \in (-\infty,+\infty). \tag{2.2}$$

При $x=0$ должны выполняться условия сопряжения сред

$$u_1 = u_2, \quad \mu_1\frac{\partial u_1}{\partial x} = \mu_2\frac{\partial u_2}{\partial x}, \qquad y>0. \tag{2.3}$$

На бесконечности $u_k(x,y)-$ограниченные величины.

Метод разделения переменных $u_k = e^{-\sqrt{r}y} X_k(x)$ приводит к системе $X_k'' + (r + \omega_k^2) X_k = 0$, $(k = 1,2)$. Примем для определённости $\omega_2 > \omega_1$ и положим $r = s - \omega_2^2$, тогда найдём $X_2'' + sX_2 = 0,$ $X_1'' + (s - q) X_1 = 0$, $0 < q = \omega_2^2 - \omega_1^2$. Положим $\tilde{y}(x,s) = \begin{Bmatrix} X_1(x,s), x > 0 \\ X_2(x,s), x < 0 \end{Bmatrix}$.

Решение задачи выбираем в виде

$$u(x,y) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \int_0^q A_3(s) e^{-\sqrt{r}\,y}\, \tilde{y}_3(x,s) ds + \int_q^\infty [A_1(s)\tilde{y}_1(x,s) + A_2(s)\tilde{y}_2(x,s)] \times$$

$$\times e^{-y\sqrt{r}} ds, \quad (x \in (-\infty, +\infty), y > 0). \tag{2.4}$$

Здесь $\tilde{y}_k(x,s)$ – собственные функции (1.3),(1.4).

Из условия (2.2) находим равенство

$$\int_0^q \sqrt{r} A_3(s) \tilde{y}_3(x,s) ds + \int_q^\infty [A_1(s)\tilde{y}_1(x,s) + A_2(s)\tilde{y}_2(x,s)] \sqrt{r}\ ds = f_1(x), \tag{2.5}$$

где $f_1(x) = \tau(x) \begin{cases} \mu_2^{-1}, x < 0, \\ \mu_1^{-1}, x > 0. \end{cases}$

Для нахождения неизвестных функций $A_k(s)$ из (2.5) воспользуемся формулой обращения (1.7). В результате чего найдём

$$A_k(s) = \frac{\pi^{-1}}{\sqrt{r}} r_k(s) \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi) \rho(\xi) \tilde{y}_k(\xi, s) d\xi .$$

Найденные $A_k(s)$ вместе с (2.4) дают точное решение задачи. Надо лишь определиться с выбором ветви функции $\sqrt{r}$, так как $r(s)$ меняет знак при $s \in (0, \infty)$.

Из физических соображений следует, что рассматриваемый колебательный процесс порождает волны, уходящие от источников, расположенных на конечном расстоянии от начала координат, на бесконечность. Выберем $arg \sqrt{r} = 0$ при $r > 0$ и $arg \sqrt{r} = \pi/2$ при $r < 0$. В этом случае решение будет физически корректным. Отметим, что в случае $\omega_1 = \omega_2$ (однородное упругое полупространство) именно такой выбор ветви корня [2] даёт правильное решение задачи.

2.2. Теплопроводность в составном бесконечном цилиндре с учетом теплообмена с окружающей средой

Бесконечный цилиндр радиусом R составлен из двух однородных изотропных материалов. Будем рассматривать осесимметричную задачу о распределении температуры в таком теле при заданных граничных и начальных условиях. Ось ox направим вдоль геометрической оси симметрии цилиндра, и будем считать, что плоскость $x=0$ есть плоскость раздела материалов.

Задача состоит в решении уравнения теплопроводности [3]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\gamma_k u=\frac{1}{a_k^2}\frac{\partial u}{\partial t}, \qquad (2.6)$$

где $\gamma_k>0,(k=1,2)$ – коэффициент теплообмена с окружающей средой каждой части цилиндра. Пусть часть цилиндра $x>0$ имеет характеристики a_1,μ_1,γ_1, другая часть $.x<0-a_2,\mu_2,\gamma_2$.

Краевые условия такие: $u(R,x,t)=\varphi(x)$ при $x\in(-\infty,+\infty)$, $u(\rho,x,t)-$ ограничена на бесконечности. При $x=0$ имеем условия сопряжения

$$u_1(\rho,0,t)=u_2(\rho,0,t), \qquad \mu_1\frac{\partial u_1}{\partial x}=\mu_2\frac{\partial u_2}{\partial x}. \qquad (2.7)$$

В начальный момент $t=0$ задана температура в цилиндре

$$u(\rho,x,0)=f(\rho,x), \qquad x\in(-\infty,+\infty),0<\rho<R. \qquad (2.8)$$

В силу линейности задачи её решение представляем в виде суммы двух функций $u=w_1+w_2$, где w_1-решение стационарной задачи при заданных краевых условиях; w_2-решение нестационарной задачи с нулевыми краевыми условиями и заданным начальным условием.

Функцию w_1 берём в виде

$$w_1(\rho,x)=\int_0^q A_1(s)I_0(\rho\sqrt{r})\tilde{z}_1(x,s)ds+\int_q^\infty[A_2(s)\tilde{z}_2(x,s)+A_3(s)\tilde{z}_3(x,s)]\times$$
$$\times I_0(\rho\sqrt{r})ds,$$

где $q=\gamma_2-\gamma_1,r=s+\gamma_1,\ \ I_0(x)-$функция Бесселя мнимого аргумента.

Примем для определенности $\gamma_2>\gamma_1$, тогда $q>0$.В этом случае $\tilde{z}_k(x,s)-$собственные функции задачи (1.12), (1.13).

Из граничных условий на поверхности цилиндра находим уравнение

$$\int_0^q A_1(s)I_0(\sqrt{r}R)\tilde{z}_1(x,s)ds+\int_q^\infty[A_2(s)\tilde{z}_2(x,s)+A_3(s)\tilde{z}_3(x,s)]I_0(\sqrt{r}R)ds=$$
$$=\varphi(x), \quad (-\infty<x<+\infty),$$

из которого по формулам обращения (1.10) находим неизвестные $A_k(s)I_0(\sqrt{r}R)=h_k(s)$. При этом функцию $f(x)$ в (1.10) заменяем на $\varphi(x)$.

Вторую часть решения ищем в виде разделённых переменных

$$J_0(\lambda_n\rho/R)e^{-rt}X_k(x),$$

где $J_0(x)-$функция Бесселя действительной переменной, λ_n-положительные корни уравнения $J_0(x)=0$. Выбор частных решений в таком виде обеспечивает выполнение нулевого граничного условия при $\rho = R$.

Для $X_k(x)$ имеем в силу (2.6) уравнение

$$X_k'' + (r/a_k{}^2 - \gamma_k - q_n)X_k = 0\ ,\ q_n = \lambda_n^2 / R^2\ ,\ \text{k=1,2.}$$

Вместо параметра разделения r введём параметр $s = r/a_1^2 - \gamma_1 - q_n$, тогда получим $X_1'' + sX_1 = 0$ для $x > 0$ и $X_2'' + (\varepsilon^2 s - \tilde{q}_n)X_2 = 0$ для $x < 0$, где $\tilde{q}_n = \gamma_2 - \varepsilon^2\gamma_1 + q_n(1-\varepsilon^2),\ \ \varepsilon = a_1/a_2$.

На участке $x < 0$ введем $x_1 = x\varepsilon$, на $x > 0$ положим $x_1 = x$. В результате такого преобразования приходим к системе

$$X_1'' + sX_1 = 0 \text{ при } x_1 > 0 \text{ и } X_2'' + (s - g_n)X_2 = 0 \text{ при } x_1 < 0, \text{ где } g_n = \tilde{q}_n / \varepsilon^2.$$

Примем $a_2 > a_1$, в этом случае $g_n > 0$ и мы приходим ко второму варианту задачи (Ш-Л) с одним измененным условием сопряжения $\mu_1 X_1'(0) = \mu_2 \varepsilon X_2'(0)$.

При $t > 0$ функция $w_2(\rho, x, t)$ имеет вид

$$w_2 = \sum_{n=1}^{\infty} J_0(\lambda_n \rho/R)\left\{\int_0^{g_n} A_n(s)e^{-r_n t}\tilde{z}_1(x_1,s)ds + \int_{g_n}^{\infty}[B_n(s)\tilde{z}_2(x_1,s) + \right.$$

$$\left. + C_n(s)\tilde{z}_3(x_1,s)]e^{-r_n t}ds\right\}, \qquad r_n(s) = sa_1^2 + (\gamma_1 + q_n). \qquad (2.9)$$

Из начального условия (2.8) получим равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} J_0(\lambda_n \rho/R)\Omega_n(x_1, 0) = f_1(\rho, x_1)\ , \quad f_1(\rho, x_1) = f(\rho, x_1) - w_1(\rho, x_1),$$

где через $\Omega_n(x_1, t)$ обозначена фигурная скобка в равенстве (2.9).

Обращаем последнее равенство с учетом свойств функции Бесселя $J_0(x)$ по формуле $[4]$

$$\int_0^{g_n} A_n(s)\tilde{z}_1(x_1,s)ds + \int_{g_n}^{\infty}[B_n(s)\tilde{z}_2(x_1,s) + C_n(s)\tilde{z}_3(x_1,s)]ds = \alpha_n(x_1)\ , \qquad (2.10)$$

где $\alpha_n(x_1) = 2R^{-2}J_1^{-2}(\lambda_n)\int_0^R f_1(\rho, x_1)J_0(\lambda_n \rho/R)\rho d\rho$.

Функции $A_n(s), B_n(s), C_n(s)$ найдём по формуле обращения (1.10) $A_n(s) = h_1(s),\ B_n(s) = h_2(s),\ C_n(s) = h_3(s)$, в которых функцию $f(x)$ следует заменить на $\alpha_n(x)$, переменную x .– на x_1, параметр q – на g_n.

Сумма $w_1(\rho, x)$ и $w_2(\rho, x, t)$ дает решение исходной задачи.

Заключение

1. Получены новые обобщенные интегральные преобразования Фурье на бесконечном промежутке с одной точкой сопряжения.

2. На основе этих преобразований в качестве иллюстрации их приложений предложены методы решения нового класса задач математической физики: а) о колебании составного упругого полупространства; б) задач нестационарной теплопроводности для бесконечного кругового составного цилиндра с учетом теплообмена с окружающей средой.

3. Изложенный метод решения позволяет исследовать и более сложные задачи для упругого слоя, цилиндра с полостью, составной полосы и др. для неоднородных уравнений.

Список литературы

1. Уфлянд, Я.С. О некоторых новых интегральных преобразованиях и их приложениях к задачам математической физики [Текст] / Я.С. Уфлянд // Вопросы математической физики. – Л.: Наука. – 1976. – С. 93 – 106.

2. Ворович, И.И. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей [Текст] / И.И. Ворович, В.А. Бабешко. – М.: Наука, 1979. – 320 с.

3. Карслоу,Г. Теплопроводность твердых тел [Текст] / Г. Карслоу, Д. Егер. – М.: Наука, 1964. – 488 с.

4. Толстов, Г.П. Ряды Фурье [Текст] / Г.П. Толстов. – М.: Наука, 1980. – 384 с.

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. В. А. Меньшиков, Националный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков

Поступила в редакцию 02.09.2014

Задачі математичної фізики складених тіл, які точно розв'язуються за допомогою нового інтегрального перетворення Фур'є на нескінченному проміжку

Запропоновано нове узагальнене інтегральне перетворення Фур'є, в основу якого покладено власні функції задачі Штурма–Ліувілля з однією точкою спряження.

За допомогою цього перетворення знайдено точні розв'язки задач математичної фізики про коливання пружного складеного півпростору і про розподіл нестаціонарного теплового поля у круговому складеному циліндрі.

Ключові слова: інтегральне перетворення, неперервний спектр, власні функції, задача теплопровідності, пружні коливання.

Problems of mathematical physics of composite bodies, exactly solvable by means of a new integral transform on an infinite interval

Generalized Fourier transform on an infinite interval with one point of conjugation is offered. With its help the problem of harmonic antiplanar oscillations of the composite elastic half-space and non-stationary thermal conductivity problem for a composite infinite circular cylinder considering heat exchange with the environment are solved.

Keywords: integral transform, continuous spectrum, eigenfunctions, thermal conductivity problem, elastic oscillations.