

## Моделирование обтекания тела ламинарным потоком

*Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ»*

Рассмотрен метод численного моделирования обтекания тела ламинарным потоком. Для решения уравнений Навье – Стокса применены независимые переменные – завихренность  $\xi$  и функция тока  $\psi$ . В численной реализации использованы явные и неявные разностные схемы дифференциальных уравнений, построенных на основе разностных аппроксимаций первого и второго порядков точности. В одношаговой явной двухслойной по времени схеме для обеспечения устойчивости применена схема с разностями против потока.

**Ключевые слова:** ламинарный поток, завихренность, функция тока, разностная аппроксимация, уравнения Навье – Стокса, уравнение Пуассона.

Описание и моделирование многих классов задач механики вязкой жидкости связано с уравнениями Навье – Стокса [1 – 4]. Для плоского течения несжимаемой жидкости при отсутствии массовых сил в декартовой системе координат они имеют вид (без уравнения энергии):

– уравнение неразрывности

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0, \quad (1)$$

где  $\vec{V}$  – вектор скорости в декартовых координатах;

– уравнения движения

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + V_x \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + V_y \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \nu \Delta^2 \vec{V}, \quad (2)$$

где  $p$  – давление;  $\rho$  – плотность;  $\nu$  – кинематическая вязкость жидкости.

Уравнения (1) – (2) записаны относительно примитивных переменных  $p$ ,  $V_x$ ,  $V_y$ . Подход с использованием в качестве независимых переменных завихренности  $\xi$  и функции тока  $\psi$  является одним из самых распространенных методов решения двумерных уравнений Навье – Стокса для несжимаемой жидкости. Для представления этих уравнений с помощью независимых переменных  $\xi$  и  $\psi$  необходимо учесть, что вектор завихренности можно представить как

$$\vec{\xi} = \vec{\nabla} \times \vec{V}. \quad (3)$$

Для случая плоского течения формула (3) примет вид

$$\xi = \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}. \quad (4)$$

В декартовой системе координат функцию тока  $\psi$  определяют по формулам

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = V_x, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -V_y. \quad (5)$$

Используя новые независимые переменные и уравнения движения (2), можно получить следующее выражение:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + V_x \frac{\partial \zeta}{\partial x} + V_y \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \nu \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right),$$

или

$$\frac{D\zeta}{Dt} = \nabla^2 \zeta. \quad (6)$$

Подставляя выражения (5) в равенство (4), получаем дополнительное уравнение для независимых переменных  $\zeta$  и  $\psi$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\zeta,$$

или

$$\nabla^2 \psi = -\zeta. \quad (7)$$

Уравнение с частными производными (7) является уравнением Пуассона.

Таким образом, в рассматриваемом подходе система уравнений Навье – Стокса сводится к одному параболическому уравнению для переноса завихренности и одному эллиптическому уравнению (уравнению Пуассона), которая имеет вид

$$\begin{cases} \frac{D\zeta}{Dt} = \nu \nabla^2 \zeta, \\ \nabla^2 \psi = -\zeta. \end{cases} \quad (8)$$

Для решения данной системы в начальный момент задаем начальные параметры во всей области течения. На внешней границе потока принимаем следующие граничные условия:

$$V = V_\infty, \quad \zeta = 0,$$

а на поверхности обтекаемого тела

$$\psi = 0, \quad \zeta = -2 \frac{\partial \psi}{\partial n}.$$

Уравнение переноса (6) решаем с использованием следующей явной схемы против потока:

$$\begin{aligned} & \frac{\zeta_{i,j}^{n+1} - \zeta_{i,j}^n}{\Delta t} + V_{xi,j}^n \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)_{i,j}^n + V_{yi,j}^n \left( \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)_{i,j}^n = \\ & = \nu \left( \frac{\zeta_{i+1,j}^n - 2\zeta_{i,j}^n + \zeta_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{\zeta_{i,j+1}^n - 2\zeta_{i,j}^n + \zeta_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь дискретизация производных  $\left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)_{i,j}^n$  и  $\left( \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)_{i,j}^n$  зависит от знака проекций вектора скорости следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{если } V_{xi,j}^n \geq 0, \text{ то } \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)_{i,j}^n = \frac{\zeta_{i,j}^n - \zeta_{i-1,j}^n}{\Delta x}; \\ \text{если } V_{xi,j}^n < 0, \text{ то } \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)_{i,j}^n = \frac{\zeta_{i+1,j}^n - \zeta_{i,j}^n}{\Delta x}; \end{array} \right.$$

и

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{если } V_{yi,j}^n \geq 0, \text{ то } \left( \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)_{i,j}^n = \frac{\zeta_{i,j}^n - \zeta_{i,j-1}^n}{\Delta y}; \\ \text{если } V_{yi,j}^n < 0, \text{ то } \left( \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)_{i,j}^n = \frac{\zeta_{i,j+1}^n - \zeta_{i,j}^n}{\Delta y}; \end{array} \right.$$

где  $i, j$  – индексы номеров узлов равномерной сетки (рис. 1);  
 $n$  – шаг по времени.

При решении уравнения (9) необходимо использовать условие Куранта – Фридрихса – Леви [1,2], которое требует для устойчивости конечно-разностного аналога уравнения (6), чтобы область влияния этого уравнения по крайней мере включала в себя область влияния дифференциального уравнения. Это условие позволяет выбрать шаг по времени таким, чтобы обеспечить устойчивость решение дифференциального уравнения (6)

$$\Delta t \leq \frac{\min(\Delta x, \Delta y)}{\max(V)}$$

Уравнение Пуассона (7) решаем с использованием следующей неявной схемы:

$$\frac{\psi_{i+1,j}^{n+1} - 2\psi_{i,j}^{n+1} + \psi_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{\psi_{i,j+1}^{n+1} - 2\psi_{i,j}^{n+1} + \psi_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y^2} = \zeta_{i,j}^n. \tag{10}$$

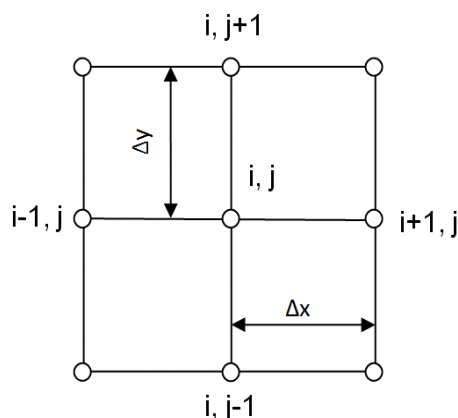


Рис. 1. Конечно-разностная сетка, используемая при решении задачи

Систему уравнений (8) решаем методом установления по времени, состоящим из следующих основных шагов [2]:

1. В момент времени  $t = 0$  задаем начальные значения  $\zeta$  и  $\psi$ .
2. Решаем уравнение переноса завихренности для  $\zeta$  (9) в каждой внутренней точке расчетной сетки в момент времени  $t + \Delta t$ .
3. Решаем итерационным методом уравнение Пуассона (10), находим новые значения  $\psi$  во всех точках сетки по новым значениям  $\zeta$  во внутренних точках.
4. Находим компоненты скорости по соотношениям (5).

5. Определяем значения  $\zeta$  на границах по значениям  $\zeta$  и  $\psi$  во внутренних точках.
6. Если решение не сходится, то возвращаемся к шагу 2.

По завершении описанной процедуры определяем компоненты скорости в каждом узле расчетной сетки.

Согласно описанному выше алгоритму был проведен расчет обтекания прямоугольного тела. Результаты расчётов показаны на рис. 2, 3.

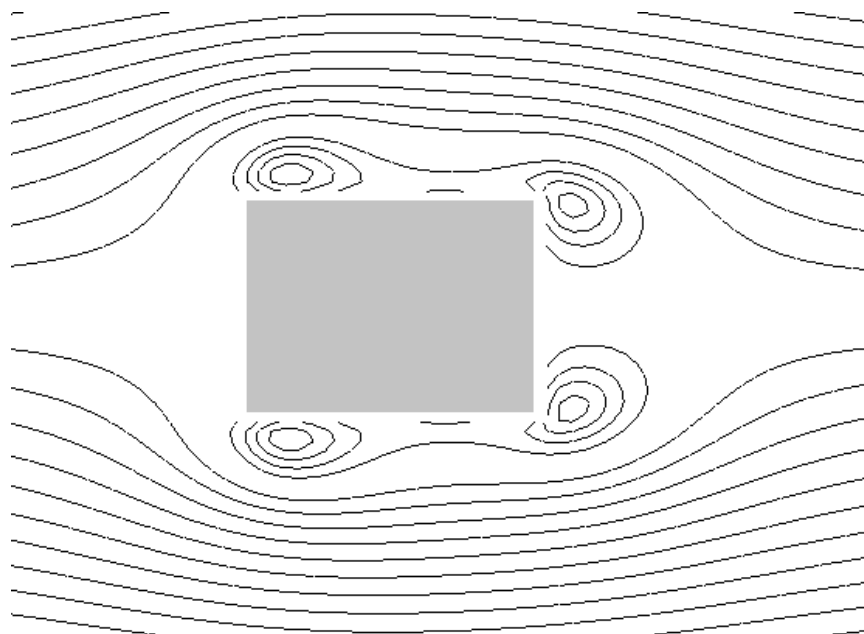


Рис. 2. Линии тока ( $Re = 250$ )

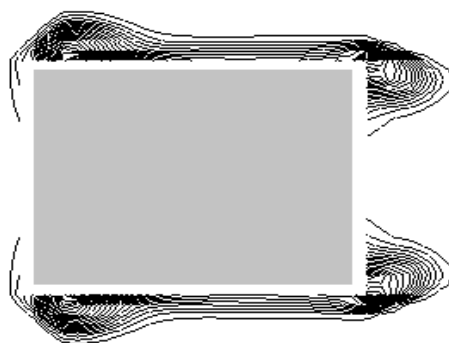


Рис. 3. Перенос завихренности

Широкое применение описанной системы уравнений Навье – Стокса с использованием независимых переменных  $(\zeta, \psi)$  для плоских задач объясняется тем, что система в этом виде является консервативной [1], т. е. обеспечивает выполнение определенных интегральных законов сохранения. При решении плоской задачи обтекания вязкой жидкости в переменных  $(\zeta, \psi)$  необходимо решать только одно уравнение переноса вихря параболического типа

(6), а при описании переменными  $(V_x, V_y, p)$  – два уравнения переноса количества движения (2). Уменьшение количества уравнений приводит к уменьшению погрешности расчётов, счёт становится более устойчивым, уменьшается компьютерное время расчетов. В работе [4] приведены способы повышения устойчивости счёта и уменьшения его погрешности с использованием метода последовательных приближений. В трехмерных задачах применяют в основном описание системы уравнений Навье – Стокса переменными  $(V_x, V_y, V_z, p)$ .

### Список литературы

1. Роуч, П. Вычислительная гидромеханика [Текст] / П. Роуч. – М.: Мир, 1980. – 616 с.
2. Андерсон, Д. Вычислительная гидромеханика [Текст] / Д. Андерсон, Дж. Таннехил, Р. Плетчер. – М.: Мир, 1990. – Т.1, 2. – 728 с.
3. Флетчер, К. Вычислительные методы в динамике жидкостей [Текст] / К. Флетчер. – М.: Мир, 1991. – Т.1. – 502 с. – Т. 2. – 552 с.
4. Тюрёв, В. В. Численные методы аэрогидродинамики [Текст]: учеб. пособие / В. В. Тюрёв, В. А. Тараненко. – Х.: Нац. аэрокосм. ун-т Н. Е. Жуковского "Харьк. авиац. ин-т.", 2013. – 180 с.

**Рецензент:** д.т.н., проф. В. В. Тюрёв Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е.Жуковского «ХАИ», г. Харьков

Поступила в редакцию 17.02.2014

### Моделювання обтікання тіла ламінарним потоком

Розглянуто метод числового моделювання обтікання ламінарним потоком тіла. Для вирішення рівнянь Нав'є – Стокса застосовано незалежні змінні – завихреність  $\xi$  і функцію струму  $\psi$ . У числовій реалізації використано явні й неявні різницеві схеми диференціальних рівнянь, побудованих на основі різницевої апроксимації першого та другого порядків точності. В однокроковій явній двошаровій за часом схемі для забезпечення стійкості застосовано схему з різницями проти потоку.

**Ключові слова:** ламінарний потік, завихреність, функція струму, різницева апроксимація, рівняння Нав'є – Стокса, рівняння Пуассона.

### Mathematical body flow of laminar simulation.

The numerical method surveyed flow body of laminar simulation. For solution Naive – Stokes equations are applied explanatory variables vortices  $\xi$  and flow function  $\psi$ . In numerical realization are used explicit and implicit difference circuits of the differential equations constructed on the basis of difference approximations of the first and second orders of exactitude. In the one-step explicit two-layer circuit on time, for security of stability, the circuit with differences to flow is applied.

**Keywords:** laminar flow, vorticity, flow function, difference approximation, Naive – Stokes equations, Poisson equation.